Г. БАРХОВЪ.

РУКОВОДСТВО АЛГЕБРЫ.

КУРСЪ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ

въ систематическомъ изложеніи.

ИЗДАНІЕ
Т-ва „В. В. ДУМНОВЪ, наслѣдн. бр. САЛАЕВЫХЪ".

ВЪ МОСКВѢ
Мясницкая улица, д. № 5,

ВЪ ПЕТРОГРАДѢ
Большая Конюшенная, № 1.

1915.

ТОВАРИЩЕСТВО НА ПАЯХЪ
ТИП. РЯБУШИНСКИХЪ
МОСКВА, СТРАСТНОЙ БУЛ.,
ПУТИНКОВСКІЙ ПЕР., Д. №3.
1915.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЧАСТЬ III.

ДОПОЛНЕНІЯ И ПРИМѢНЕНІЯ.

А. Прогрессіи и ихъ примѣненія.

Б. Непрерывныя дроби и ихъ примѣненія.

В. Соединенія и ихъ примѣненія.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Характерною чертою въ исторіи развитія математики за послѣднее столѣтіе является все ярче и ярче обнаруживавшееся сознаніе въ необходимости болѣе строгаго логическаго обоснованія самыхъ ея началъ. Спеціально въ области оперированія надъ числами (ариѳметика и алгебра) достаточно привести имена Ома, Грассмана, Шредера и, наконецъ, Вейерштрасса, Г. Кантора, Дедекинда и Таннери, чтобы указать на главнѣйшіе этапы въ успѣхахъ систематизаціи названной части математики. Результаты же, достигнутые математикою въ указанномъ направленіи, не могутъ быть игнорируемы и при преподаваніи ея въ школѣ. Согласованіе съ ними того матеріала общей ариѳметики и алгебры [1]), который принято проходить въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ у насъ въ Россіи, и приспособленіе ихъ для цѣлей школы и составляетъ задачу предлагаемой книги. Она есть плодъ долголѣтняго педагогическаго опыта и многолѣтней работы по приведенію въ строгую логическую связь названнаго матеріала. Предпринять же такую работу мы сочли нужнымъ потому, что являемся убѣжденнымъ сторонникомъ того педагогическаго направленія, которое считаетъ наилучшимъ средствомъ для прочнаго закрѣпленія въ памяти учениковъ того, что они изучаютъ,—приведеніе сообщаемыхъ ученикамъ знаній въ систему и выясненіе логической связи между отдѣльными частями преподаваемаго предмета.

При составленіи книги нами была принята во вниманіе литература предмета, существующая на языкахъ русскомъ, нѣмецкомъ, французскомъ, итальянскомъ и англійскомъ, но оказалось, что при этомъ и для самостоятельной творческой мысли оставалось мѣсто.

Логическая же связь въ общей ариѳметикѣ и алгебрѣ мѣстами такого свойства, что мы врядъ ли безъ основанія могли опасаться, что при сжатомъ изложеніи она могла бы быть не совсѣмъ правильно понята. Съ другой стороны мы желали избѣжать неравномѣрности, и поэтому мы и излагаемъ въ книгѣ все съ почти такою подробностью, которой долженъ придерживаться на урокахъ преподаватель. Но

[1]) Мы здѣсь придерживаемся терминологіи нѣмецкихъ математиковъ, которые собственно алгеброю называютъ только ученіе объ уравненіяхъ.

мы полагаемъ, что для ученика эта особенность книги можетъ быть только полезна, такъ какъ ему такимъ образомъ дается возможность найти въ ней еще разъ подробное объясненіе того, что было преподано на урокѣ. Необходимо было, при такой подробности въ изложеніи, выдѣлить особымъ шрифтомъ и особою нумераціею (числа на поляхъ въ угловатыхъ скобкахъ) все то, что составляетъ наиважнѣйшія звенья системы или важно въ какомъ-либо другомъ отношеніи и потому должно быть удержано памятью по возможности дословно.

Едва ли нужно объяснять, что распредѣляя матеріалъ въ систематическомъ порядкѣ [1]), мы не могли имѣть въ виду, чтобы содержаніе книги сообщалось ученикамъ сразу же безъ всякихъ пропусковъ. Такъ, напр., теоремы I главы лучше будутъ поняты учениками послѣ того, какъ они, путемъ постепенной подготовки, будутъ приведены къ сознанію необходимости въ доказательствахъ, а, слѣдовательно, и къ пониманію значенія этихъ теоремъ.

Подобнымъ образомъ теоремы II главы могли бы быть даны ученикамъ сначала отчасти и безъ строгаго доказательства; а конецъ главы XX уже обработанъ въ такомъ видѣ, чтобы въ изученіе главы XXIII можно было вникать поотольку, поскольку это позволятъ умственный уровень класса и время.

Таннери считаетъ безусловно необходимымъ, чтобы при преподаваніи математики преподаватель никогда не скрывалъ отъ учениковъ, когда имъ по той или другой причинѣ допускается какой-либо пропускъ или какая - либо неточность. Позволяя себѣ указанныя выше облегченія, преподаватель, пользующійся предлагаемымъ руководствомъ, невольно выполнялъ бы упомянутое требованіе Таннери.

Три части, изъ которыхъ состоитъ эта книга, представляютъ собою такое распредѣленіе матеріала, которое мы считаемъ единственно возможнымъ въ систематическомъ курсѣ элементарной алгебры. Оно очень обычно у нѣмецкихъ математиковъ и примѣнено, напр., и Ф. Клейномъ въ его книгѣ «Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus», вышедшей въ прошломъ году и составляющей продолженіе изданной имъ и Шиммакомъ книги: «Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen». Будучи же такимъ систематическимъ курсомъ, предлагаемое руководство могло бы содержать ученіе о функціональной зависимости только въ видѣ особой части, которую мы и не преминемъ еще присовокупить къ нему въ слѣдующемъ изданіи, если бы критики и коллеги признали его желательнымъ. Но общая ариѳметика отъ введенія по-

---

[1]) Во избѣжаніе недоразумѣній считаемъ необходимымъ замѣтить, что «Вступленіемъ» должно быть только подготовлено пониманіе примѣненія буквъ, и что только со II главы начинается систематическое изложеніе собственно ариѳметики.

нятія о функціи нисколько не выиграла бы ни въ ясности ни въ наглядности. Въ алгебрѣ же (т.-е. въ ученіи объ уравненіяхъ) до извѣстной степени и можетъ быть достигнута наглядность путемъ примѣненія графическаго способа изображенія функцій, но въ наше время какъ-то странно даже доказывать, что при первоначальномъ ознакомленіи съ уравненіями примѣненіе понятія о функціи недопустимо, такъ какъ вѣдь въ большинствѣ случаевъ въ функціи независимую перемѣнную должно представлять себѣ измѣняющеюся *непрерывно*, а выраженіе въ числахъ непрерывности достигается, какъ это выяснено знаменитыми изслѣдованіями Дедекинда, только по введеніи ирраціональныхъ чиселъ.

Но и съ дидактической стороны мы считаемъ слишкомъ раннее ознакомленіе учащихся съ понятіемъ о функціональной зависимости опаснымъ: какъ нельзя учить буквенной ариѳметикѣ (какъ она ни важна) до полнаго усвоенія ариѳметики обыкновенной такъ и понятіе о функціи мы считаемъ неправильнымъ давать ученикамъ до полнаго усвоенія ими другихъ болѣе простыхъ понятій. Сначала необходимо ознакомить ихъ со статическою, такъ сказать, частью элементарной математики, а затѣмъ уже только допустить и кинематическое пониманіе ея: сначала учащійся долженъ основательно освоиться со значеніемъ буквы въ смыслѣ произвольнаго числа, затѣмъ со значеніемъ ея въ смыслѣ числа неизвѣстнаго, и уже послѣ всего этого съ примѣненіемъ ея и въ смыслѣ величины измѣняющейся. Только при такой постепенности и можно ожидать *отчетливаго* усвоенія всѣхъ этихъ понятій.

Несмотря на все вниманіе, съ которымъ мы составляли эту книгу, недосмотры въ ней, конечно, возможны, и мы будемъ весьма признательны всякому, кто возьметъ на себя трудъ сообщить намъ о тѣхъ изъ нихъ, которые онъ замѣтитъ.

Считаемъ своимъ пріятнымъ долгомъ выразить здѣсь свою искреннюю и глубокую признательность всѣмъ лицамъ, не отказавшимъ намъ въ своихъ совѣтахъ и указаніяхъ или содѣйствовавшихъ изданію этой книги. Живѣйшую благодарность мы приносимъ также гг. Дедекинду, Г. Кантору, Гмейнеру и Таннери за ту большую нравственную поддержку, которую они намъ оказали своими отвѣтами на наши письменные запросы.

Изъ очень многочисленныхъ источниковъ, которыми мы пользовались при составленіи книги, мы считаемъ нужнымъ назвать слѣдующіе:

Энциклопедія математическихъ наукъ, издаваемая, по порученію академій наукъ въ Геттингенѣ, Лейпцигѣ, Мюнхенѣ и Вѣнѣ, на нѣмецкомъ языкѣ фирмою Тейбнеръ и на французскомъ фирмою Готье-Вилларъ.

Schlömilch. Handbuch der Mathematik.

O. Stolz und J. A. Gmeiner. Theoretische Arithmetik.

H. Weber und J. Wellstein. Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis.

Jules Tannery. Léçons d'Algèbre et d'Analyse.

Того же автора. Introduction a la théorie des fonctions d'une variable.

Того же автора. Leçons d'Arithmétique.

Pincherle. Lezioni di Algebra complementare.

G. Chrystal. Text-book of Algebra.

Ревель, январь 1912 г.
(Юрьевъ, Лифл. г., іюль 1914 г.).

Авторъ.

ВСТУПЛЕНІЕ.

Разсмотримъ задачу:

Найти процентныя деньги съ капитала въ 600 рублей, отданнаго въ ростъ на 2 года изъ 4 процентовъ годовыхъ.

Какъ извѣстно, искомыя процентныя деньги вычисляются дѣйствіями, указанными слѣдующимъ выраженіемъ:

$$\frac{4 \,.\, 600 \,.\, 2}{100} \text{ руб.}$$

Для всѣхъ задачъ, отличающихся отъ разсмотрѣнной лишь числовыми данными, отвѣтъ получится путемъ выполненія въ томъ же порядкѣ тѣхъ же дѣйствій, которыя указаны вышеприведеннымъ выраженіемъ, т. е., всегда нужно будетъ процентную таксу умножить на капиталъ, это произведеніе умножить на время, а новое произведеніе раздѣлить на 100. Нагляднѣе это можно выразить такъ:

$$\textit{Процентныя деньги} = \frac{\textit{Процентная такса} \times \textit{Капиталъ} \times \textit{Время}}{100}.$$

Если же мы введемъ сокращенія и напишемъ вмѣсто словъ «Процентная такса» букву T, вмѣсто слова «Капиталъ» букву K, вмѣсто слова «Время» букву B и вмѣсто словъ «Процентныя деньги» букву Π, то правило для вычисленія процентныхъ денегъ выразится еще проще такъ:

$$\Pi = \frac{T \,.\, K \,.\, B}{100}.$$

Ясно, что здѣсь буквами Π, K, B, T обозначаются числа, но числа **неопредѣленныя**, такъ какъ каждая изъ этихъ буквъ можетъ означать всякое число.

Такія неопредѣленныя числа могли бы встрѣчаться въ самой задачѣ; она могла бы, напр., гласить:

«Найти процентныя деньги съ капитала въ K рублей, отданнаго въ ростъ на B лѣтъ изъ T процентовъ годовыхъ».

Рѣшить же эту задачу способомъ приведенія къ единицѣ слѣдовало бы слѣдующимъ образомъ:

Со 100 руб. получается въ 1 годъ процентныхъ денегъ T руб.,

съ 1 » » » 1 » » » $\frac{T}{100}$ »,

съ K » » » 1 » » » $\frac{T.K}{100}$ »,

съ K » » » B лѣтъ » » $\frac{T.K.B}{100}$ ».

Отвѣтъ получился тотъ же, который былъ полученъ выше.

И какъ эту задачу, такъ и всякую другую можно рѣшать, замѣнивъ въ ней данныя числа буквами. И во всякомъ такомъ случаѣ мы и отвѣтъ получили бы не въ видѣ нѣкотораго опредѣленнаго числа, а также въ видѣ нѣкотораго выраженія, въ которомъ буквы были бы соединены между собою знаками ариѳметическихъ дѣйствій. Смыслъ же такого отвѣта былъ бы тотъ, что онъ выражалъ бы *общее правило*, указывающее, какія дѣйствія должно производить, чтобы найти искомое число во всякой задачѣ, отличающейся отъ данной только данными числами.

Всякое рѣшеніе такого вида называется *общимъ рѣшеніемъ*. Достаточно въ немъ буквы замѣнить данными въ каждомъ частномъ случаѣ числами и выполнить указанныя дѣйствія, чтобы получить рѣшеніе и этого частнаго случая. Такъ, напр., если бы была дана задача, отличающаяся отъ рѣшенной выше только тѣмъ, что въ ней были бы даны процентная такса 6, капиталъ 700 рублей и время $1\frac{1}{2}$ года, то процентныя деньги оказались бы равными $\frac{6 . 700 . 1\frac{1}{2}}{100}$, т. е. 63 рублямъ.

Но оказывается, что при рѣшеніи задачъ въ неопредѣленныхъ числахъ не всегда бываетъ достаточно ставить между ними, т. е. между буквами, знаки, указывающіе, какія дѣйствія должно произвести, такъ какъ выраженія, въ которыхъ буквы соединены знаками дѣйствій между собою или также еще и съ опредѣленными числами, допускаютъ упрощенія и различныя преобразованія. Оказывается, что иногда бываетъ необходимо изслѣдованіе, возможно ли вообще между двумя буквами поставить знакъ какого-либо дѣйствія, напр., знакъ — между двумя буквами, когда вторая можетъ означать и такое число, которое больше перваго. Оказывается, наконецъ, необходимымъ строго провѣренное, точное знаніе тѣхъ законовъ или правилъ, которые должны быть соблюдены при производствѣ дѣйствій, для того, чтобы результаты не оказались неправильными (такъ, напр., недостаточно пользоваться при умноженіи правиломъ, что произведеніе не измѣняется отъ измѣненія порядка множителей, а нужно выяснить, почему это такъ бываетъ, ибо только послѣ этого можетъ сдѣлаться очевиднымъ, что это всегда должно быть такъ).

Изъ всего этого видно, что для полученія общихъ рѣшеній задачъ необходимо особое умѣнье производить дѣйствія надъ буквами и надъ выраженіями, въ которыхъ буквы соединены знаками дѣйствій между собою или же еще и съ опредѣленными числами.

Такимъ образомъ постепенно и создалась наука, называемая **алгеброю**[1]).

Въ ариѳметикѣ могутъ разсматриваться всегда лишь частные случаи задачъ. Алгебра же, разсматривая дѣйствія надъ буквами, изъ которыхъ каждая можетъ обозначать *любое число*, обладаетъ въ силу этого тѣмъ преимуществомъ, что доказываетъ правильность пріемовъ, примѣняемыхъ при вычисленіяхъ для *всѣхъ* чиселъ вообще, а потому и для *всѣхъ* однородныхъ случаевъ заразъ. По той же причинѣ она въ состояніи строго доказывать также справедливость истинъ, касающихся самихъ чиселъ.

Для обозначенія неопредѣленныхъ чиселъ въ алгебрѣ принято пользоваться малыми буквами латинскаго алфавита, хотя ничто не мѣшаетъ прибѣгать и къ другимъ буквамъ, напр., къ латинскимъ прописнымъ или къ греческимъ.

Примѣняютъ различныя буквы (a, b, c, d, e и т. д.), чтобы указать, что обозначенныя ими числа между собою не равны (хотя въ частныхъ случаяхъ они могутъ быть и равными). Если же при какомъ-либо разсужденіи требуется очень много буквъ, или желательно указать на какое-либо соотвѣтствіе между числами, то примѣняютъ буквы съ приписанными справа внизу маленькими числами, которыя называются указателями, напр., a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 и т. д.. Иногда же примѣняются для той же цѣли знаки такого вида: a', a'', a''', b', c'', d''' и т. д., т. е. буквы съ приписанными справа наверху одною, двумя, тремя и т. д. черточками.

Но есть часть алгебры, въ которой буквы примѣняются еще и въ другомъ смыслѣ, а именно для обозначенія *искомыхъ* чиселъ, чиселъ хотя бы и опредѣленныхъ, но пока еще *неизвѣстныхъ*. Дѣйствія же надъ буквами, означающими неизвѣстныя числа, должны производиться не иначе, какъ и надъ буквами, означающими числа неопредѣленныя, такъ какъ, вѣдь, въ послѣднемъ случаѣ каждая буква можетъ означать всякое число.

Поэтому основою для всей алгебры является та часть ея, которая называется **общею ариѳметикою**, и содержаніе которой составляетъ слѣдующее:

1) выясненіе происхожденія ариѳметическихъ дѣйствій и ихъ зависимости другъ отъ друга[2]);

2) законы, относящіеся къ производству этихъ дѣйствій;

3) постепенное расширеніе понятія о числѣ;

4) постепенное расширеніе понятій о дѣйствіяхъ послѣ всякаго введенія новаго рода чиселъ[3]);

и *вмѣстѣ со всѣмъ этимъ*:

5) преобразованіе выраженій, въ которыхъ буквы соединены знаками дѣйствій между собою или же и съ опредѣленными числами.

---

[1]) Первые зачатки алгебры можно обнаружить у математиковъ XV и XVI столѣтія; отчетливѣе всего они видны у Віэты (Viète, † 1603).

[2]) При развитіи ученія о нихъ оказалось нужнымъ дѣйствія, разсматриваемыя въ обыкновенной ариѳметикѣ, дополнить еще нѣкоторыми другими.

[3]) Напр., распространеніе понятія объ умноженіи и на дроби послѣ введенія этихъ чиселъ.

Другую часть алгебры составляетъ ученіе о рѣшеніи уравненій и неравенствъ. Въ этой части разсматриваются способы выражать при помощи равенствъ и неравенствъ условія задачъ, главнымъ же образомъ способы находить изъ такихъ равенствъ и неравенствъ искомыя рѣшенія.

Въ нашей книгѣ эти части отдѣлены одна отъ другой. Но часто отдѣльныя главы второй изъ нихъ такимъ образомъ вставляются между соотвѣтствующими главами общей ариѳметики, что составляютъ какъ бы примѣненія предшествующихъ главъ ея.

Во второй части встрѣчается столько трудностей, что является необходимою въ качествѣ продолженія начальной алгебры еще *алгебра высшая*. Въ начальной же разсматриваются, наконецъ, еще всякія примѣненія и дополненія, выборъ которымъ въ различныхъ странахъ и различными авторами дѣлается различный, при чемъ въ число ихъ иногда включаютъ и основныя понятія изъ совершенно другихъ областей математики.

Такъ какъ ариѳметическія дѣйствія надъ буквами представляютъ нѣчто новое, то, приступая къ изученію алгебры, важно усвоить себѣ слѣдующее:

I. Въ общей ариѳметикѣ буквами обозначаютъ неопредѣленныя числа, т. е. буква можетъ означать всякое число, но, конечно, только всякое цѣлое число, пока рѣчь идетъ только о цѣлыхъ числахъ, всякое цѣлое число или дробь только послѣ введенія дѣйствій надъ дробями, и т. д. [1]).

II. Когда правильность пріема при производствѣ какого-либо дѣйствія разъяснена на неопредѣленныхъ числахъ, то она доказана этимъ неоспоримо вообще для всѣхъ такого же рода случаевъ и для всѣхъ вообще чиселъ, *которыя уже введены*.

---

[1]) Кромѣ названныхъ существуетъ еще нѣсколько родовъ чиселъ.

ЧАСТЬ I.

Общая ариѳметика.

ГЛАВА I.

Общія понятія.

§ 1. **Математика.** Алгебра есть часть математики. Математика же есть наука о величинахъ.

Первое представленіе о томъ, что̀ означаетъ «больше», «равняется», «меньше», и что̀ называется «увеличеніемъ» и «уменьшеніемъ», создается въ насъ при посредствѣ нашихъ чувствъ. Все то, къ чему примѣнимы эти понятія, называется *величиною*. Величины суть, напр.: объемы, площади, линіи, углы, вѣсъ, время. Эти величины называются *сплошными*.

Особый родъ величины представляетъ собраніе одинаковыхъ предметовъ или предметовъ, разсматриваемыхъ нами какъ одинаковые, что указывается обозначеніемъ ихъ однимъ и тѣмъ же словомъ. Такая величина называется *количествомъ*[1]). Въ противоположность сплошнымъ величинамъ количества называются величинами *раздѣльными*.

§ 2. **Сравненіе количествъ.** Чтобы сравнить количество съ другимъ количествомъ, можно отмѣтить въ нихъ по предмету въ каждомъ, затѣмъ опять въ каждомъ по предмету, и продолжать такъ, не возвращаясь ни къ одному изъ предметовъ вновь, до тѣхъ поръ, пока предметы одного количества не будутъ отмѣчены всѣ. Если послѣ этого въ другомъ количествѣ также не окажется не отмѣченныхъ предметовъ, то количества называются равными; если же въ этомъ послѣднемъ количествѣ не отмѣченные еще предметы окажутся, то говорятъ, что оно больше перваго, первое же меньше его, и что первое составляетъ часть его.

---

[1]) Этимъ словомъ мы переводимъ нѣмецкое слово «Menge». Понятіе, обозначаемое имъ, такое основное, что во всякомъ языкѣ для него должно существовать свое слово. Поэтому мы находимъ неудачными встрѣчающіяся для него обозначенія «комплексъ» или «ансамбль». Доказательствомъ правильности нашего перевода можетъ послужить то, что во всѣхъ случаяхъ, когда мы говоримъ «количество», въ нѣмецкомъ языкѣ правильно говорить «Menge».

§ 3. **Рядъ натуральныхъ чиселъ.** Но сравненіе количествъ можетъ быть облегчено примѣненіемъ одного изъ важнѣйшихъ изобрѣтеній человѣческаго ума, которое состоитъ въ слѣдующемъ.

Въ количествахъ «яблоко и яблоко», «лошадь и лошадь», «столъ и столъ» есть нѣчто общее, для обозначенія чего говорятъ *«предметъ и предметъ»*; но это общее выражаютъ еще лучше, примѣняя во всѣхъ этихъ случаяхъ слово *«два»* и называя эти количества «два яблока», «двѣ лошади», «два стола», «два предмета». Такимъ же образомъ вмѣсто того, чтобы говорить *«предметъ и предметъ и предметъ»*, говорятъ *«три предмета»*, вмѣсто—*«предметъ и предметъ и предметъ и предметъ»*, говорятъ *«четыре предмета»* и т. д. Расширяя понятіе о количествѣ, и всякій отдѣльный предметъ иногда бываетъ удобно разсматривать какъ количество, и въ такомъ случаѣ говорятъ про «о д и н ъ предметъ».

Если мы, обозрѣвая количество, отмѣчаемъ предметъ за предметомъ и произносимъ при этомъ: одинъ предметъ, два предмета, три предмета и т. д., или записываемъ знаки, существующіе для словъ одинъ, два, три и т. д., то говорятъ, что мы с ч и т а е м ъ эти предметы. Вмѣстѣ же съ понятіемъ о счетѣ создается и первоначальное понятіе о ч и с л ѣ. Считая:

1, 2, 3, 4, 5, . . . и т. д.,

мы получаемъ рядъ н а т у р а л ь н ы х ъ ч и с е л ъ, который можетъ быть продолженъ безъ конца.

Считаемые предметы называются е д и н и ц а м и. Сосчитавъ всѣ предметы количества, мы получаемъ *число, соотвѣтствующее этому количеству*, или, другими словами, узнаемъ число единицъ въ этомъ количествѣ. Равныя количества содержатъ одно и то же число предметовъ, вмѣсто чего можно также сказать, что равнымъ количествамъ соотвѣтствуютъ равныя числа. Если же количества не равны, то и числа имъ соотвѣтствуютъ не равныя.

Такъ создаются **первоначальныя понятія о равныхъ и неравныхъ числахъ** (пока только такихъ, которыя принадлежатъ къ натуральному ряду) [1]:

Р а в н ы м и н а з ы в а ю т с я ч и с л а, к о т о р ы я с о о т в ѣ т с т в у ю т ъ р а в н ы м ъ к о л и ч е с т в а м ъ.

И з ъ д в у х ъ ч и с е л ъ н а з ы в а е т с я т о б ó л ь ш и м ъ, к о т о р о е с о о т в ѣ т с т в у е т ъ б ó л ь ш е м у к о л и ч е с т в у, и т о м е н ь ш и м ъ, к о т о р о е с о о т в ѣ т с т в у е т ъ м е н ь ш е м у к о л и ч е с т в у.

Если вмѣстѣ съ числомъ упоминается названіе предметовъ, которые считались, то такое число называется п р е д м е т н ы м ъ или и м е н о в а н н ы м ъ; если же число не сопровождается названіемъ предметовъ (и это названіе даже не подразумѣвается), то оно называется о т в л е ч е н н ы м ъ.

---

[1]) При всякомъ расширеніи понятія о числѣ должно быть опредѣляемо, что слѣдуетъ понимать подъ равными и неравными числами въ новой области чиселъ.

§ 4. Сравненіе величинъ. Сплошныя величины могутъ часто быть сравниваемы между собою непосредственно. Такъ, напр., прямыя линіи можно съ цѣлью сравненія накладывать одну на другую такъ, чтобы одинъ конецъ одной совпадалъ съ однимъ концомъ другой. Если при этомъ совпадутъ и оба другіе конца этихъ линій, то онѣ равны, если же нѣтъ, то не совпавшій конецъ одной окажется между концами другой. Эта другая такимъ образомъ окажется состоящею изъ отрѣзка, равнаго первой линіи, и еще одного отрѣзка. Про нее говорятъ, что она больше первой, про первую же, что она меньше другой и есть часть ея.

Подобнымъ же образомъ могутъ быть сравниваемы между собою и другія сплошныя величины. Но очень часто этотъ способъ не примѣнимъ или неудобенъ. Въ такихъ случаяхъ примѣняютъ числа и для этого сравненіе сплошныхъ величинъ сводятъ къ сравненію количествъ при посредствѣ пріема, который называется измѣреніемъ и который состоитъ въ томъ, что сравниваемыя величины представляютъ состоящими изъ одинаковыхъ частей (при чемъ иногда бываетъ необходимо одну часть взять меньше остальныхъ) и послѣ опредѣленія *числа* частей въ каждой изъ нихъ сравниваютъ между собою эти числа [1]).

Во всемъ изложенномъ до сихъ поръ числа какъ бы противопоставлялись величинамъ; но, согласно данному въ § 1 опредѣленію величины, они и сами также должны считаться величинами.

§ 5. Математическія предложенія. Въ математикѣ, въ частности и въ алгебрѣ, принято выражать обнаруживаемыя и изучаемыя въ ней истины въ сжатой и легко запоминающейся формѣ. Формулированныя такимъ образомъ истины называются п р е д л о ж е н і я м и.

Разъясненія, въ какомъ смыслѣ предполагается примѣнять разсматриваемыя или вводимыя вновь понятія, называются о п р е д ѣ л е н і я м и.

Предложенія, справедливость которыхъ признается безъ доказательства, называются а к с і о м а м и.

Предложенія, которыхъ справедливость можетъ быть доказана, называются т е о р е м а м и.

Теорема, вытекающая непосредственно изъ опредѣленія какого-либо понятія или обнаруживающаяся при доказательствѣ другой теоремы, называется с л ѣ д с т в і е м ъ.

§ 6. Составъ математическаго предложенія. Содержаніе всякаго математическаго предложенія (теоремы, слѣдствія, аксіомы) должно состоять изъ 2 частей: 1) указанія того, о какихъ понятіяхъ или величинахъ въ немъ идетъ рѣчь и что о нихъ предполагается, и 2) указанія того, что при названномъ предположеніи (или названныхъ предположеніяхъ) относительно ихъ утверждается.

Сообразно съ этимъ, для болѣе отчетливаго указанія предстоящей задачи, доказательству теоремы предпосылаютъ иногда въ расчлененномъ видѣ названныя 2 части. Такъ будемъ дѣлать обыкновенно и мы, и будемъ

---

[1]) Подробности этого пріема разсматриваются позднѣе (§§ 468—474).

при этомъ называть первую часть *предположенiемъ*, вторую — *утвержденiемъ*.

§ 7. **Основныя предложенія о равныхъ величинахъ** [1]).

III. **Аксіома.** Всякую величину можно замѣнить равною ей.

IIIa. **Опредѣленіе.** Замѣна величины равною ей называется *подстановкою.*

Знакъ $=$ обозначаетъ *«равняется».*

Знакъ $>$ обозначаетъ *«больше».*

Знакъ $<$ обозначаетъ *«меньше».*

Знакъ $\neq$ обозначаетъ *«не равняется».*

IV. **Опредѣленіе.** Выраженное при помощи знака $=$ сообщеніе о томъ, что двѣ величины равны между собою (или требованіе того, чтобы двѣ величины были равными другъ другу) [2]), называется *равенствомъ*, величины же эти частями его.

IVa. **Опредѣленіе.** Выраженное при помощи знака $>$ или $<$ сообщеніе о томъ, что изъ двухъ величинъ одна больше другой (или требованіе того, чтобы изъ двухъ величинъ одна была больше другой) [2]), называется *неравенствомъ*, величины же эти частями его.

Такъ въ равенствѣ $a = b$
и неравенствахъ $a > b$
и $a < b$
a—лѣвая или первая часть ихъ, b—правая или вторая.

V. **Теорема.** Части равенства могутъ быть замѣнены одна другою.

Предположеніе:

$$a = b$$

Утверждаемъ:

$$b = a$$

Доказательство:

Въ лѣвой части равенства

$$a = a,$$

которое разумѣется само собою, мы на основаніи предположенія можемъ, по аксіомѣ III, подставить b вмѣсто a. Послѣ такой подстановки получается:

$$b = a,$$

то есть, оказывается справедливымъ то, что требовалось доказать.

---

[1]) Предложенія III—VII, равно какъ и позднѣе теорема VIII, относятся не только ко *всякаго рода* числамъ, но и вообще къ величинамъ.

[2]) О равенствахъ и неравенствахъ послѣдняго рода подробно говорится во II части.

VI. **Теорема.** Двѣ величины, порознь равныя третьей, равны между собою.

Предположеніе:

$$a = c$$

и

$$b = c.$$

Утверждаемъ:

$$a = b.$$

Доказательство:

Если (предположеніе)

$$a = c$$

и

$$b = c,$$

то, по аксіомѣ III въ первомъ равенствѣ можно величину c замѣнить величиною b, послѣ чего и получается равенство:

$$a = b,$$

которое требовалось доказать.

§ 8. **Знаки дѣйствій, выраженіе, скобки.** Знаки, служащіе для указанія, какъ изъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ должно образоваться новое число, называются знаками дѣйствій. Числа, соединенныя знаками дѣйствій между собою, составляютъ выраженіе. Выраженіе не только указываетъ дѣйствія, которыя слѣдуетъ произвести, но обозначаетъ также и число, которое должно получиться отъ этихъ дѣйствій. Если выраженіе нужно соединить знакомъ дѣйствія съ новымъ числомъ, то это выраженіе заключаютъ въ скобки.

Примѣчаніе. Въ какихъ случаяхъ, на основаніи соглашенія, скобки опускаются, это будетъ видно изъ смысла выраженій, которыя будутъ разсматриваться, и будетъ, кромѣ того, выражено въ видѣ особаго правила въ § 115.

§ 9. **Общій законъ, относящійся къ одинаковымъ дѣйствіямъ надъ равными величинами.**

Теорема. Если къ равнымъ величинамъ прибавимъ поровну, то получимъ величины равныя.

Предположеніе:

$$a = b$$
$$c = d.$$

Утверждаемъ:

$$a + c = b + d.$$

Доказательство:

Въ правой части равенства

$$a + c = a + c,$$

которое разумѣется само собою, мы, по аксіомѣ III, можемъ подставить b вмѣсто a и d вмѣсто c, такъ какъ по предположенію $a = b$ и $c = d$.

Послѣ же такой подстановки оказывается, что и въ самомъ дѣлѣ

$$a + c = b + d.$$

Совершенно такимъ же образомъ доказываются теоремы:

а) Если отъ равныхъ величинъ отнимемъ поровну, то получимъ величины равныя.

б) Если равныя величины умножимъ на равныя [1]), то получимъ величины равныя.

в) Если равныя величины раздѣлимъ на равныя, то получимъ величины равныя.

И т. д.

Всѣ эти теоремы можно выразить вмѣстѣ слѣдующимъ образомъ.

VII. **Теорема.** Если равныя величины соединимъ съ равными одними и тѣми же дѣйствіями и въ одномъ и томъ же порядкѣ, то получимъ величины равныя

ГЛАВА II

Прямыя дѣйствія.

§ 10. **Сложеніе.** Изъ понятія о прибавленіи или присоединеніи одного предмета къ другому въ насъ создается понятіе о математическомъ сложеніи. Если, напр., прибавить къ водѣ, находящейся въ одномъ сосудѣ, воду изъ другого, то послѣ этого получится въ первомъ изъ нихъ въ одномъ мѣстѣ воды и по *объему* и по *вѣсу* столько же, сколько ея было прежде въ двухъ мѣстахъ. Новый объемъ называется суммою прежнихъ двухъ объемовъ, новый вѣсъ—суммою прежнихъ двухъ вѣсовъ. Притомъ всякимъ признается за истину, не подлежащую никакому сомнѣнію, что какъ сумма объемовъ, такъ и сумма вѣсовъ получилась бы та же, если бы вода была перелита изъ перваго сосуда во второй. Такимъ же образомъ въ геометріи признается, что результатъ сложенія линій или площадей, производимаго построеніемъ, получается всегда одинъ и тотъ же, въ какомъ бы порядкѣ это сложеніе ни производилось.

Понятіе о сложеніи величинъ является такимъ образомъ однимъ изъ первоначальныхъ, равно какъ таковою же и та истина, что результатъ сложенія не зависитъ отъ порядка, въ которомъ оно производится.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что какими бы числами ни выражались величины, сложеніе этихъ чиселъ должно считать возможнымъ, и что только въ такомъ случаѣ эти числа будутъ удовлетворять своему назначенію, если результатъ и ихъ сложенія не будетъ зависѣть отъ порядка, въ которомъ оно будетъ производиться.

Все ученіе о сложеніи чиселъ беретъ своё начало отъ понятія о счетѣ. Чтобы узнать, напр., какое

---

[1]) Понимать нужно, конечно, такія величины, на которыя можно множить, т. е. числа.

число получится отъ сложенія 3 и 5, мы кладемъ рядомъ 3 какихъ-либо предмета и 5 такихъ же предметовъ и считаемъ, а результатъ этого счета запоминаемъ, какъ и результаты всѣхъ простѣйшихъ, основныхъ случаевъ сложенія.

Опредѣленіе сложенія (какъ и остальныхъ такъ называемыхъ прямыхъ дѣйствій) должно быть дано сначала для чиселъ натуральнаго ряда, а затѣмъ уже позднѣе и для другихъ чиселъ по мѣрѣ того, какъ они будутъ вводиться.

Опредѣленіе. Сложеніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго по нѣсколькимъ даннымъ числамъ отыскивается новое число, содержащее столько же единицъ, сколько содержатъ единицъ всѣ данныя числа вмѣстѣ. 1

§ 11. **Слагаемыя, сумма.** Числа, которыя слѣдуетъ сложить, называются, какъ извѣстно, слагаемыми. Но было бы логичнѣе, слѣдуя примѣру нѣмецкихъ математиковъ, называть ихъ первоначально, пока не доказана теорема 2, одно *увеличиваемымъ*, а другое *прибавляемымъ*.

Результатъ, получаемый отъ сложенія, называется суммою.

Чтобы выразить, что требуется сложить числа a и b, пишутъ такъ:

$$a+b.$$

Но такъ какъ числа a и b неопредѣленныя, то и результатъ этого сложенія пишется: $a+b$. Поэтому и **выраженіе $a+b$ называется суммою.**

§ 12. **Независимость величины суммы отъ порядка слагаемыхъ.** Названная истина справедлива, какъ мы постепенно убѣдимся, для всѣхъ родовъ чиселъ, какіе существуютъ. Поэтому мы теорему, выражающую ее, формулируемъ, не упоминая, для какихъ именно чиселъ она дѣйствительна, хотя мы ее доказать можемъ теперь только для чиселъ натуральнаго ряда; и такого же правила мы будемъ придерживаться и впредь при формулированіи предложеній.

Теорема. Отъ перемѣны порядка слагаемыхъ величина суммы не измѣняется[1]. 2

Утверждаемъ:

$$a+b=b+a$$
$$a+b+c=a+c+b=b+a+c= \text{ и т. д.. }$$

Доказательство.

Число $a+b$ соотвѣтствуетъ количеству, которое получается отъ соединенія въ одно тѣхъ количествъ, которымъ соотвѣтствуютъ числа a и b. Отъ котораго бы изъ предметовъ, составляющихъ названныя количества, мы ни начали считать совокупность всѣхъ этихъ предметовъ, число должно получиться всегда одно и то же, такъ какъ составъ ея при этомъ вѣдь не измѣняется.

---

[1]) **Перемѣстительный** или *коммутативный* **законъ сложенія.**

А такъ какъ сказанное остается въ силѣ для всякаго числа слагаемыхъ, то изъ этого и слѣдуетъ справедливость теоремы для всякаго числа слагаемыхъ.

§ 13. **Умноженіе.** Въ томъ частномъ случаѣ, когда всѣ слагаемыя равны между собою, отъ сложенія производится новое дѣйствіе—у м н о ж е н і е. Если, напр., требуется произвести сложеніе $a+a+a+a$, то вмѣсто этого пишутъ $4 . a$ и говорятъ, что требуется найти, чему равняется 4 раза a, или что требуется a умножить на 4. Для чиселъ натуральнаго ряда опредѣленіе умноженія гласитъ:

3 **Опредѣленіе.** Умножить a на n значитъ найти, чему равняется сумма n слагаемыхъ a.

Повторяющееся слагаемое (a) называется теперь **множимымъ**, число же (n), показывающее, сколько разъ это слагаемое повторяется, называется **множителемъ**. Результатъ умноженія называется **произведеніемъ**.

Чтобы выразить, что требуется умножить a на n, пишутъ.

$n \times a$ или $n . a$ или na [1]).

Но такъ какъ числа a и n неопредѣленныя, то такимъ же образомъ пишется и результатъ этого дѣйствія. Поэтому и **выраженіе $n . a$ называется произведеніемъ.**

По поводу приведеннаго выше третьяго способа указанія предписаннаго умноженія должно замѣтить, что *въ алгебрѣ знакъ умноженія передъ буквами и передъ скобками обыкновенно не пишется*, такъ что, напр., выраженія $4a$, $a(b+c)$ и $7(2+5a)$ означаютъ $4 . a$, $a . (b+c)$ и $7 . (2+5 . a)$.

§ 14. **Независимость величины произведенія отъ порядка сомножителей.** Произведеніе $3 . 5$ можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

I I I I I
I I I I I
I I I I I

Изображенное здѣсь количество единицъ расположено такъ, что мы имѣемъ 3 горизонтальныхъ ряда по 5 единицъ въ каждомъ $(3 . 5)$ и въ то же время 5 вертикальныхъ столбцовъ по 3 единицы въ каждомъ $(5 . 3)$. Слѣдовательно:

$$3 . 5 = 5 . 3.$$

Такимъ же образомъ можетъ быть изображено произведеніе какихъ угодно двухъ натуральныхъ чиселъ. А изъ этого слѣдуетъ, что **вообще получается тотъ же результатъ умноженія, если множимое дѣлается множителемъ, а множитель множимымъ**, т.-е. что **всегда**

$$\mathbf{ab = ba.}$$

[1]) Знакъ для умноженія × впервые встрѣчается у англичанина Oughtred'а въ его книгѣ Clavis mathematica, напечатанной въ 1631 г.; точка въ качествѣ знака умноженія въ первый разъ встрѣчается въ 1693 г. у Лейбница, но распространеніе получила чрезъ учебники Христіана Вольфа въ началѣ XVIII столѣтія.

На этомъ основанiи множимое и множитель получаютъ общее названiе: ихъ называютъ сомножителями или производителями или просто обоихъ множителями.

Сообразно съ этимъ мы будемъ въ соотвѣтствующихъ случаяхъ говорить о *перемноженiи* чиселъ между собою, вмѣсто того, чтобы говорить, что одно число умножается на другое.

Доказанная же здѣсь независимость величины произведенiя *двухъ* сомножителей отъ порядка ихъ есть частный случай слѣдующей болѣе общей истины:

Теорема. Отъ перемѣны порядка сомножителей величина произведенiя не измѣняется[1]).

Доказательство.

Чтобы выразить, что произведенiе чиселъ b и c слѣдуетъ еще умножить на a, пишутъ такъ:

$$a(bc),$$

при чемъ скобки указываютъ, что сначала нужно перемножить между собою числа b и c, а затѣмъ уже полученный результатъ умножить на a. Представивъ произведенiе $a(bc)$ въ слѣдующемъ видѣ:

$$b \text{ строкъ} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{c + c + c + \ldots + c}^{a \text{ столбцовъ}} \\ c + c + c + \ldots + c \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ c + c + c + \ldots + c, \end{array} \right.$$

мы убѣждаемся, что

$$a(bc) = b(ac).$$

Такимъ же образомъ можетъ быть доказано, что

$$a(bc) = c(ab).$$

А такъ какъ выше уже было доказано, что

$$bc = cb,\ ac = ca,\ ab = ba$$

то должно быть:

$$a(bc) = a(cb) = b(ac) = b(ca) = c(ab) = c(ba) = (bc)a = (cb)a = (ac)b = (ca)b = \\ = (ab)c = (ba)c.$$

Такъ оказывается, что величина произведенiя *трехъ* чиселъ остается одною и тою же, въ какомъ бы порядкѣ ни производилось умноженiе. А поэтому мы имѣемъ право писать и безъ скобокъ:

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba.$$

---

[1]) **Перемѣстительный** или коммутативный **законъ умноженiя.**

Поставивъ въ предпослѣднемъ рядѣ равенствъ вездѣ cd вмѣсто c и переставляя затѣмъ въ скобкахъ сомножителей между собою, а также между собою сомножителей внѣ скобокъ и сомножителей, выражаемыхъ каждою парою скобокъ, мы убѣждаемся, что величина произведенія *и четырехъ* чиселъ остается одною и тою же, въ какомъ бы порядкѣ ни производилось умноженіе.

Такимъ же образомъ, какимъ мы перешли отъ произведенія трехъ сомножителей къ произведенію четырехъ, можно перейти отъ четырехъ сомножителей къ пяти, отъ нихъ къ шести сомножителямъ и т. д. безъ конца.

Изъ этого и видно, что величина произведенія всякаго числа сомножителей не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей, другими словами, не зависитъ отъ порядка, въ которомъ производятся умноженія.

§ 15. **Коэффиціентъ.** Если въ произведеніи встрѣчаются сомножителями опредѣленныя числа, то ихъ можно, по предыдущей теоремѣ, переставить такъ, чтобы они пришлись всѣ рядомъ, и затѣмъ перемножить ихъ. Такимъ образомъ всегда можетъ быть достигнуто, чтобы въ произведеніи былъ только одинъ опредѣленный сомножитель. Обыкновенно онъ пишется впереди другихъ сомножителей и въ такомъ случаѣ получаетъ особое названіе:

5 **Опредѣленіе.** Если въ произведеніи среди сомножителей одинъ — опредѣленное число и если онъ притомъ поставленъ впереди другихъ, то его называютъ коэффиціентомъ[1]).

Напр., въ произведеніяхъ $3abc$, $7px$, $2d(a+4bm)$ сомножители 3, 7 и 2 суть коэффиціенты; въ послѣднемъ же выраженіи третій сомножитель — сумма, въ которой второе слагаемое есть произведеніе съ коэффиціентомъ 4.

§ 16. **Возвышеніе въ степень.** Въ томъ частномъ случаѣ, когда всѣ сомножители равны между собою, отъ умноженія производится новое дѣйствіе — возвышеніе въ степень (или возведеніе въ степень или потенцированіе). Если, напр., требуется произвести умноженіе $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, то вмѣсто этого пишутъ a^5 и говорятъ,

---

[1]) Co — efficient въ переводѣ означаетъ сопроизводитель (efficient=factor=производитель). По смыслу слова термины «сомножитель» (или «производитель») и «коэффиціентъ» слѣдовало бы примѣнять такъ: a и b суть сомножители или производители (факторы) произведенія $a\,b$, при этомъ a коэффиціентъ числа b, b коэффиціентъ числа a, вообще каждый изъ сомножителей произведенія коэффиціентъ остальныхъ. Такъ слово коэффиціентъ и опредѣляется нѣкоторыми математиками. Но установился обычай, по которому это обозначеніе примѣняется только къ тому сомножителю, который по своимъ качествамъ отличается отъ другихъ. коэффиціентомъ называютъ *опредѣленнаго* (численнаго) сомножителя *среди неопредѣленныхъ* (буквенныхъ) *извѣстнаго среди неизвѣстныхъ*, неизмѣняющагося *(постояннаго) среди перемѣнныхъ*, при чемъ отличіе его отъ другихъ отмѣчается во всѣхъ этихъ случаяхъ еще тѣмъ, что его ставятъ впереди другихъ, а въ послѣднихъ двухъ случаяхъ обыкновенно еще тѣмъ, что его обозначаютъ первыми буквами алфавита, а неизвѣстныя и перемѣнныя величины послѣдними.

что требуется a возвысить въ 5-ую степень, или a возвести въ 5-ую степень, или a потенцировать на 5. Основное опредѣленіе этого новаго дѣйствія гласитъ:

Опредѣленіе. Возвысить a въ n-ую степень (или потенцировать a на n) значитъ найти, чему равняется произведеніе n сомножителей a. 6

Повторяющійся сомножитель (a) называется теперь основаніемъ, число же (n), показывающее, сколько разъ этотъ сомножитель повторяется, называется показателемъ. Результатъ возвышенія въ степень называется степенью.

Чтобы выразить, что требуется возвысить a въ n-ую степень, пишутъ a^n [1]). Но такъ какъ a и n числа неопредѣленныя, то такимъ же образомъ пишется и результатъ этого дѣйствія. Поэтому и **выраженіе a^n называется степенью.**

a^2 читаютъ также «a въ квадратѣ» или «a—квадратъ», a^3 читаютъ также «a въ кубѣ» или «a—кубъ»; 4-ая степень называется также биквадратомъ.

§ 17. Сложеніе суммъ.

Теорема. Чтобы сложить число съ суммою, можно сложить его съ однимъ изъ ея слагаемыхъ, результатъ со вторымъ, новый результатъ съ третьимъ и т. д. до послѣдняго [2]). 7

Док. Положимъ, что сложить нужно число a съ суммою чиселъ $b+c+d+\ldots+n$.

По теоремѣ 2 можно сначала выполнить сложеніе послѣднихъ чиселъ въ произвольномъ порядкѣ и затѣмъ къ этому результату прибавить a. Но такое вычисленіе ничѣмъ не отличается отъ сложенія, предписываемаго выраженіемъ $b+c+d+\ldots+n+a$, въ которомъ, по той же названной теоремѣ, a можетъ занять и всякое другое мѣсто, напр., и первое.

А изъ этого и слѣдуетъ справедливость теоремы.

Опуская въ правой части равенства скобки для указанія того, что слагаемыя данной суммы можно прибавлять въ произвольномъ порядкѣ, мы доказанную теорему можемъ выразить въ знакахъ слѣдующимъ образомъ:

$$a+(b+c+d+\ldots+n)=a+b+c+d+\ldots+n.$$

Отсюда же по теоремѣ V слѣдуетъ, что должно быть также:

$$a+b+c+d+\ldots+n=a+(b+c+d+\ldots+n).$$

А это послѣднее равенство выражаетъ слѣдующее правило:

Слѣдствіе. Если нужно прибавить число, къ результату второе число, къ этому результату третье и т. д., то вмѣсто этого можно прибавить сумму этихъ чиселъ. 8

---

[1]) Descartes (Géometrie. 1637 г.) установилъ этотъ способъ изображенія степени.

[2]) **Сочетательный** или ассоціативный **законъ сложенія.**

9 **Теорема.** Суммы слагаютъ, соединяя всѣ ихъ слагаемыя въ одну сумму.

Док. Положимъ, что требуется сложить суммы $a+b+c$ и $l+m+n+p$. Примѣняя теоремы 7 и 2 въ указываемомъ порядкѣ, мы имѣемъ:

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)+(l+m+n+p) \\
&=(a+b+c)+l+m+n+p \qquad [7] \\
&=l+m+n+p+(a+b+c) \qquad [2] \\
&=l+m+n+p+a+b+c \qquad [7] \\
&=a+b+c+l+m+n+p \qquad [2].
\end{aligned}
$$

Такимъ же образомъ теорема доказывается для всякаго числа суммъ, а также для случая, когда слагаются суммы и отдѣльныя числа.

9^{1} **Слѣдствіе 1.** Суммы и отдѣльныя числа слагаютъ, соединяя эти числа и всѣ слагаемыя суммы въ одну сумму.

Примѣръ.

$$(a+b)+c+(k+l+m)+n+(p+q)=a+b+c+k+l+m+n+p+q.$$

Изъ послѣдней теоремы и слѣдствія изъ нея слѣдуетъ еще, по теоремѣ V:

10 **Слѣдствіе 2.** Въ суммѣ можно слагаемыя разбивать на какія угодно группы.

§ 18. **Умноженіе произведеній.**

11 **Теорема.** Чтобы перемножить число съ произведеніемъ, можно перемножить его съ однимъ изъ его сомножителей, результатъ со вторымъ, новый результатъ съ третьимъ и т. д. до послѣдняго[1]).

Док. Положимъ, что перемножить нужно число a съ произведеніемъ чиселъ $b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots \,.\, n$. По теоремѣ 4 можно сначала выполнить умноженіе послѣднихъ чиселъ въ произвольномъ порядкѣ и затѣмъ умножить другъ на друга этотъ результатъ и число a. Но такое вычисленіе ничѣмъ не отличается отъ умноженія, предписываемаго выраженіемъ $b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots \,.\, n \,.\, a$, въ которомъ, по той же названной теоремѣ, a можетъ занять и всякое другое мѣсто, напр., и первое.

А изъ этого и слѣдуетъ справедливость теоремы.

Опуская въ правой части равенства скобки для указанія того, что на сомножителей произведенія можно умножать въ произвольномъ порядкѣ, мы доказанную теорему можемъ выразить въ знакахъ слѣдующимъ образомъ:

$$a(bcd \ldots n)=abcd \ldots n.$$

---

[1]) **Сочетательный** или ассоціативный **законъ умноженія.**

Отсюда же по теоремѣ V слѣдуетъ, что должно быть также:

$$abcd...n=a(bcd...n).$$

А это послѣднее равенство выражаетъ слѣдующее правило:

Слѣдствіе. Если нужно умножить на число, результатъ на второе число, этотъ результатъ на третье и т. д., то вмѣсто этого можно умножить на произведеніе этихъ чиселъ. 

Теорема. Произведенія умножаютъ другъ на друга, соединяя всѣхъ ихъ сомножителей въ одно произведеніе. 

Док. Положимъ, что требуется умножить другъ на друга произведенія abc и $lmnp$. Примѣняя теоремы **11** и **4** въ указываемомъ порядкѣ, мы имѣемъ:

$$
\begin{aligned}
(abc)(lmnp) &= (abc)lmnp && [11]\\
&= lmnp(abc) && [\ 4]\\
&= lmnpabc && [11]\\
&= abclmnp && [\ 4].
\end{aligned}
$$

Такимъ же образомъ теорема доказывается для всякаго числа произведеній, а также для случая, когда перемножаются произведенія и отдѣльныя числа.

Слѣдствіе 1. Произведенія и отдѣльныя числа умножаютъ другъ на друга, соединяя эти числа и всѣхъ сомножителей произведеній въ одно произведеніе. 

Примѣры.

1) $(ab)c(klm)n(pq)=abcklmnpq$

2) $(5a^3bc)(4a^2b^5)(ab^4c^2)=$
$5\,.\,4\,.\,a^3\,.\,a^2\,.\,a\,.\,b\,.\,b^5\,.\,b^4\,.\,c\,.\,c^2=$
$20\,.\,aaa\,.\,aa\,.\,a\,.\,b\,.\,bbbbb\,.\,bbbb\,.\,c\,.\,cc=$
$20aaaaaabbbbbbbbbbccc=$
$20a^6b^{10}c^3.$

Изъ послѣдней теоремы и слѣдствія изъ нея слѣдуетъ еще, по теоремѣ V:

Слѣдствіе 2. Въ произведеніи можно сомножителей разбивать на какія угодно группы. 

§ 19. Умноженіе суммы.

Теорема. Чтобы умножить другъ на друга сумму и какое-либо число, можно перемножить его съ каждымъ изъ ея слагаемыхъ и эти произведенія сложить [1]). 

---

[1]) **Распредѣлительный** или дистрибутивный **законъ умноженія.**

Утв.

$$p(a+b+\ldots+n)=$$
$$(a+b+\ldots+n)p=pa+pb+\ldots+pn.$$

Док. По опредѣленію умноженія (3) и по теоремѣ **2** мы имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{rl} p(a+b+\ldots+n)= & a+b+\ldots+n \\ & +a+b+\ldots+n \\ & +a+b+\ldots+n \\ & .\quad .\quad \ldots\quad . \\ & .\quad .\quad \ldots\quad . \\ & .\quad .\quad \ldots\quad . \\ & +a+b+\ldots+n \\ & =pa+pb+\ldots+pn, \end{array}\right\} p \text{ строкъ}$$

такъ какъ въ размѣщенной въ p строкахъ суммѣ мы имѣемъ p слагаемыхъ a, p слагаемыхъ b и т. д., и, наконецъ, p слагаемыхъ n.

По теоремѣ же **4** должно быть также:

$$(a+b+\ldots+n)p=ap+bp+\ldots+np.$$

А то и другое и требовалось доказать.

§ 20. **Умноженіе степеней съ одинаковыми основаніями.** Необходимо уже теперь познакомиться съ предложеніемъ (ср. примѣръ 2 въ § 18), которое позднѣе (въ § 121) будетъ разсмотрѣно еще подробнѣе:

16 **Теорема.** Степени съ одинаковыми основаніями умножаютъ, слагая ихъ показателей [1]).

Утв. $a^p \,.\, a^q=a^{p+q}$.

Док. По опредѣленію **6** и по теоремѣ **13** мы имѣемъ:

$$a^p \,.\, a^q = \underbrace{\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\ldots\,a}_{p\text{ сомножителей}}\,.\,\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots\,.\,a}_{q\text{ сомножителей}}}_{\text{всего }(p+q)\text{ сомножителей}}$$
$$=a^{p+q}.$$

Такъ же теорема доказывается и для всякаго большаго числа сомножителей.

§ 21. **Первое расширеніе понятія о степени.** По опредѣленію **6** степень съ показателемъ 1 не имѣетъ никакого смысла. Но если мы при умноженіи на a (а впослѣдствіи мы убѣдимся, что и при производствѣ другихъ дѣйствій) какой-либо степени числа a вмѣсто a будемъ писать a^1 и съ этимъ выраженіемъ будемъ обращаться какъ со степенью, то всегда получатся вѣрные результаты. Поэтому понятіе о степени расширяется, и вводятся въ указанномъ выше смыслѣ степени съ показателемъ 1.

6a **Опредѣленіе.** Подъ 1-ю степенью числа должно понимать само это число:

$$a^1=a.$$

---

[1]) Эта формулировка теоремы не точна, но удобна для запоминанія. Вполнѣ точно это предложеніе можно было бы выразить такъ:

Произведеніе степеней съ одинаковыми основаніями равняется степени съ тѣмъ же основаніемъ и показателемъ равнымъ суммѣ показателей всѣхъ сомножителей.

ГЛАВА III

Вычитаніе.

§ 22. **Происхожденіе вычитанія.** Задача, состоящая въ требованіи по даннымъ суммѣ и одному слагаемому найти другое слагаемое, приводитъ къ новому дѣйствію — вычитанію.

Опредѣленіе. Вычесть число b изъ числа a значитъ 17
найти такое число, которое, будучи сложено съ b, дастъ a.

Чтобы выразить, что требуется вычесть b изъ a, пишутъ такъ:

$$a-b$$ [1].

Число, изъ котораго вычитаютъ (a), называется уменьшаемымъ, число, которое требуется вычесть (b), называется вычитаемымъ. Результатъ вычитанія называется разностью. Поэтому и **выраженіе $a-b$ называется разностью.**

Опредѣленіе. $a-b$ означаетъ такое число, которое, 17а
будучи сложено съ b, даетъ a

Это опредѣленіе разности выражается слѣдующимъ равенствомъ:

Опредѣленіе: $(a-b)+b=a$. 17б

Слѣдствіе: $(a+b)-b=a$. 17в

такъ какъ по опредѣленію разности $(a+b)-b$ должно означать число, которое, будучи сложено съ b, даетъ $a+b$, но a и есть число такого свойства.

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ мы видимъ, что если мы сначала къ a прибавимъ b, а изъ полученной суммы вычтемъ b, или если мы сначала изъ a вычтемъ b, а къ полученной разности прибавимъ b, то эти два дѣйствія взаимно уничтожаются.

Вычитаніе называется дѣйствіемъ *обратнымъ* сложенію.

Сложеніе и вычитаніе составляютъ дѣйствія перваго (низшаго) разряда или **первую ступень дѣйствій.**

§ 23. **Теорема.** Чтобы вычесть число изъ суммы, можно вычесть его изъ одного изъ слагаемыхъ.

Утв. $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$.

Док. Сложивъ каждое изъ выраженій $(a-c)+b$ и $a+(b-c)$ съ c, мы (по теор. 7 и опред. **17б**) получаемъ:

$$(a-c)+b+c=(a-c+c)+b=a+b$$
$$a+(b-c)+c=a+(b-c+c)=a+b$$

и убѣждаемся такимъ образомъ, что они оба означаютъ число, которое,

[1] Знаки + и — встрѣчаются впервые въ руководствѣ ариѳметики Johannes Widmann'a, напечатанномъ въ 1489 г., но входятъ въ употребленіе только въ XVI столѣтіи.

будучи сложено съ c, даетъ $a+b$, т. е., что каждое изъ нихъ (по опред. 17[a]) равно $(a+b)-c$; что и требовалось доказать.

Доказанное утвержденіе выражаетъ еще слѣдующую истину:

Слѣдствіе. Если требуется прибавить число, изъ результата вычесть другое, то эти дѣйствія можно произвести также въ обратномъ порядкѣ.

Доказанное равенство содержитъ также теоремы о сложеніи числа съ разностью, которыя изъ этого равенства слѣдуютъ по теоремѣ V и которыя формулировать мы предоставляемъ самимъ учащимся.

§ 24. **Теорема.** Если нужно вычесть число, изъ результата второе, изъ этого результата третье, и т. д., то вмѣсто этого можно вычесть сумму этихъ чиселъ.

Утв. $a-b-c-\ldots-m-n=a-(b+c+\ldots+m+n)$.

Док. Прибавимъ къ выраженію $a-b-c-\ldots-m-n$ выраженіе $b+c+\ldots+m+n$ и преобразуемъ получающуюся сумму, примѣняя опредѣленіе **17[c]** и теорему 7.

$$a-b-c-\ldots-m-n+(b+c+\ldots+m+n)=$$
$$(a-b-c-\ldots-m)-n+n+(b+c+\ldots+m)=$$
$$a-b-c-\ldots-m+(b+c+\ldots+m)=$$
$$(a-b-c-\ldots)-m+m+(b+c+\ldots)=$$
$$a-b-c-\ldots+(b+c+\ldots).$$

Совершенно такъ же, какъ здѣсь исчезли m и n, уничтожаются и числа, которыя мы предполагаемъ между c и m, обозначая это точками, и заканчивается послѣ этого производимое нами сложеніе слѣдующими преобразованіями:

$$a-b-c+(b+c)=(a-b)-c+c+b=(a-b)+b=a.$$

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что $a-b-c-\ldots-m-n$ есть число, которое, будучи сложено съ $b+c+\ldots+m+n$, даетъ a, т. е. число, которое пишется $a-(b+c+\ldots+m+n)$. А изъ этого и видна справедливость утвержденія.

По теоремѣ V отсюда получается:

Слѣдствіе. Чтобы вычесть изъ числа сумму, можно изъ него вычесть сперва одно изъ ея слагаемыхъ, изъ результата второе, изъ этого результата третье, и т. д. до послѣдняго.

§ 25. **Теорема.** Чтобы вычесть разность, можно ея уменьшаемое вычесть и затѣмъ къ результату прибавить ея вычитаемое.

Утв. $a-(b-c)=a-b+c$.

Док. Обозначивъ $a-(b-c)$ буквою x, мы изъ равенства

$a-(b-c)=x$ заключаемъ, что x есть [какъ и $a-(b-c)$] число, которое, будучи сложено съ $(b-c)$, даетъ a. Но это можетъ быть выражено и такъ:

$a=x+(b-c)$

$=(x+b)-c$ [§ 23]. Отсюда мы видимъ, что a есть [какъ и $(x+b)-c$] число, которое, будучи сложено съ c, даетъ $x+b$. Но это можно выразить и такъ:

$a+c=x+b$. Отсюда же мы видимъ, что x есть число, которое, будучи сложено съ b, даетъ $a+c$, то есть такое число, которое пишется $a+c-b$.

Слѣд.

$a+c-b=x$ или [§23]

$a-b+c=x$. Повторяя первое равенство:

$a-(b-c)=x$,

[1] ———— мы изъ послѣднихъ 2 равенствъ, по теоремѣ VI, заключаемъ, что должно быть:

$a-(b-c)=a-b+c$,

что и требовалось доказать.

§ 26. **Соединеніе между собою чиселъ дѣйствіями перваго разряда.** Теоремы въ §§ 12, 17, 23, 24 и 25 и слѣдствія изъ нихъ содержатъ всѣ правила, необходимыя для сложенія и вычитанія *суммы* и *разности* двухъ чиселъ съ какимъ-либо третьимъ числомъ, и къ нимъ сводятся *всѣ случаи соединенія между собою трехъ чиселъ дѣйствіями перваго разряда.*

Обзоръ всѣхъ возможныхъ случаевъ такого соединенія составляютъ слѣдующія равенства, изъ которыхъ тѣ, которыя помѣщены въ послѣднихъ 4 строкахъ, вытекаютъ какъ слѣдствіе, по теоремѣ V, изъ тѣхъ, которыя помѣщены въ первыхъ 4 строкахъ:

1) $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$
2) $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$
3) $(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c)$
4) $(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c)$

---

[1]) Горизонтальною чертою мы будемъ часто, слѣдуя существующему у нѣмецкихъ математиковъ обычаю, указывать, что изъ стоящихъ надъ нею равенствъ или вообще соотношеній слѣдуетъ стоящее подъ нею заключеніе. Напр., что изъ $a=c$ и $b=c$ слѣдуетъ $a=b$, можетъ этимъ способомъ быть изображено такъ.

$$\frac{\begin{matrix} a=c \\ b=c \end{matrix}}{a=b.}$$

Упомянутая черта замѣняетъ собою такимъ образомъ слово «слѣдовательно» Если мы, примѣняя ее, все-таки будемъ прибавлять еще это слово или какое-либо равносильное ему выраженіе, то только по той причинѣ, что упомянутый обычай еще не принятъ въ нашей литературѣ.

5) $a+(b+c)=a+b+c=a+c+b$
6) $a-(b+c)=a-b-c=a-c-b$
7) $a+(b-c)=a+b-c=a-c+b$
8) $a-(b-c)=a-b+c=a+c-b$

Изъ обобщенiй этихъ теоремъ, кромѣ тѣхъ, съ которыми мы уже познакомились, для насъ важно еще слѣдующее:

18 **Теорема.** Отъ порядка, въ которомъ прибавляются и вычитаются одно послѣ другого нѣсколько чиселъ, окончательный результатъ этихъ дѣйствiй не зависитъ.

Док. Положимъ, что надъ числами a, b, c, d и e должно произвести дѣйствiя, указываемыя выраженiемъ:

$$a-b-c+d+e$$

и сравнимъ съ результатомъ этихъ дѣйствiй тотъ, который получится отъ производства тѣхъ же дѣйствiй въ такомъ порядкѣ:

$$a+d-c-b+e.$$

Для этого прибавимъ сначала къ первому изъ этихъ выраженiй $(b+c)$, а затѣмъ ту же сумму и ко второму изъ нихъ. По теоремѣ 7 мы первое можемъ сдѣлать, прибавляя къ выраженiю $a-b-c+d+e$ сначала слагаемое c, а затѣмъ уже и слагаемое b. Если мы это выраженiе представимъ какъ сумму 3 чиселъ:

$$(a-b-c),\ d \text{ и } e,$$

а потомъ выраженiе $(a-b-c)$ какъ разность 2 чиселъ:

$$(a-b) \text{ и } c,$$

то мы первое сложенiе можемъ произвести по той же теоремѣ 7 и получаемъ при этомъ, примѣняя еще опредѣленiе разности $[17^{6}]$:

$$(a-b-c)+d+e+c=(a-b-c+c)+d+e=[(a-b)-c+c]+d+e=$$
$$=(a-b)+d+e.$$

При сложенiи этого результата, т. е. суммы 3 чиселъ

$$(a-b),\ d \text{ и } e$$

съ b, мы, пользуясь также теоремою 7 и также примѣняя опредѣленiе разности, получаемъ:

$$(a-b)+d+e+b=[(a-b)+b]+d+e=a+d+e.$$

Разсуждая совершенно такъ же и прибавляя сначала b и потомъ c, мы и при сложенiи выраженiя $a+d-c-b+e$ съ $b+c$ получаемъ $a+d+e$

Слѣдовательно, выраженiя $a-b-c+d+e$ и $a+d-c-b+e$ означаютъ оба одно и то же число, а именно число, которое, будучи сложено съ $b+c$, даетъ $a+d+e$, то есть число $a+d+e-(b+c)$.

Совершенно такимъ же образомъ можно доказать, что и при замѣнѣ порядка двухъ какихъ-либо другихъ изъ предписанныхъ сложенiй и вычитанiй обратнымъ порядкомъ результатъ всѣхъ дѣйствiй не измѣнится. Измѣняя же достаточное число разъ порядомъ все только двухъ изъ этихъ

дѣйствій, мы можемъ замѣнить первоначально предписанный порядокъ ихъ какимъ угодно другимъ.

Изъ этого и слѣдуетъ справедливость теоремы для разсмотрѣннаго случая. Но ясно, что такимъ же образомъ можно и при всякомъ другомъ числѣ предписанныхъ сложеній и вычитаній показать возможность измѣненія порядка этихъ дѣйствій.

Слѣдовательно теорема справедлива вообще.

Примѣчаніе.

Необходимо, однако, замѣтить, что какъ въ послѣдней теоремѣ, такъ и въ теоремахъ, выражаемыхъ равенствами даннаго здѣсь обзора, всякая разность имѣетъ пока смыслъ только при условіи, что уменьшаемое больше вычитаемаго.

Упражненіе.

Выразить въ словахъ не формулированныя еще теоремы, выражаемыя равенствами обзора.

ГЛАВА IV.

Сложеніе и вычитаніе подобныхъ выраженій.

§ 27. **Опредѣленіе.** Произведенія, которыя отличаются другъ отъ друга только коэффиціентами или не отличаются другъ отъ друга ни въ чемъ, называются *подобными*. **19**

Напр., подобны

$$5a,\ 14a,\ 2a,\ 6a$$

или

$$8pq,\ 8pq,\ 11\ pq$$

или

$$16ab^7x^2y^3,\ 14ab^7x^2y^3,\ 3ab^7x^2y^3;$$

не подобны произведенія

$$16a^2b^7xy^3,\ 15ab^7xy^3,$$
$$8ab^3y^4,\ 5bz^2.$$

Вмѣсто произведенія $3a^2b$ можно писать [3].

$$a^2b+a^2b+a^2b.$$

Такъ же вмѣсто произведенія $5a^2b$ можно писать:

$$a^2b+a^2b+a^2b+a^2b+a^2b.$$

Слѣдовательно:

$$3a^2b+5a^2b=\underbrace{a^2b+a^2b+a^2b}+\underbrace{a^2b+a^2b+a^2b+a^2b+a^2b}=8a^2b \quad \text{[по опред. 3].}$$

На основаніи опредѣленія вычитанія [17] мы находимъ:

$$8a^2b-3a^2b=5a^2b.$$

Изъ этихъ примѣровъ, подобныхъ которымъ можно составить сколько угодно, мы выводимъ ***правило:***

20 **Теорема.** Подобныя произведенія слагаютъ и вычитаютъ, слагая и вычитая ихъ коэффиціенты, при чемъ буквенное выраженіе съ показателями пишется неизмѣннымъ послѣ полученнаго новаго коэффиціента.

Предп. m и n коэффиціенты произвольнаго алгебраическаго выраженія A.

I. Утв. $mA+nA=(m+n)A$.

Док. По теоремѣ **15**

$$(m+n)A=mA+nA.$$

А отсюда по теоремѣ V и слѣдуетъ, что должно быть

$$mA+nA=(m+n)A.$$

Такимъ же образомъ теорема доказывается и для всякаго другого числа слагаемыхъ.

II. Утв. $mA-nA=(m-n)A$.

Док. Если мы къ $(m-n)A$ прибавимъ nA, то, примѣняя теорему **15** и опредѣленіе **17б**, получаемъ:

$$(m-n)A+nA=[(m-n)+n]A=mA.$$

А изъ этого мы видимъ, что $(m-n)A$ есть число, которое, будучи сложено съ nA, даетъ mA, то есть, что $(m-n)A$ есть то же самое число, какъ и $mA-nA$.

Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ,

$$mA-nA=(m-n)A.$$

Примѣчаніе.

Мы увидимъ впослѣдствіи, что теорема **15** останется въ силѣ и для всякихъ другихъ чиселъ, которыя мы будемъ вводить; а вмѣстѣ съ тѣмъ и данное здѣсь доказательство послѣдней теоремы само собою распространится и на такія числа.

Слѣдовательно, это доказательство есть общее для всякихъ вообще чиселъ.

§ 28. **Первое расширеніе понятія объ умноженіи.** Такъ какъ

$$4ab=ab+ab+ab+ab,$$

то

$$4ab+ab=ab+ab+ab+ab+ab=5ab.$$

Совершенно такимъ же образомъ можно показать, что

$$7ac+ac=8ac,$$

а отсюда по опредѣленію вычитанія слѣдуетъ, что

$$8ac-ac=7ac.$$

Но если бы мы вмѣсто ab и ac написали $1ab$ и $1ac$ и затѣмъ произвели сложеніе

$$4ab+1ab$$

и вычитаніе

$$8ac - 1ac$$

по правилу **20**, то получили бы тѣ же результаты $5ab$ и $7ac$, какъ и прежде.

А такъ какъ вообще получаются вѣрные результаты, когда передъ выраженіями, не имѣющими коэффиціента, ставится въ видѣ коэффиціента число 1, то мы устанавливаемъ:

Правило. Передъ выраженіемъ, не имѣющимъ коэффиціента, всегда можетъ быть поставленъ коэффиціентъ 1; и наоборотъ, коэффиціентъ 1 всегда можетъ быть опущенъ. **21**

По этому правилу можно писать $1a$ вмѣсто a, $1x^2$ вмѣсто x^2; а вмѣстѣ съ тѣмъ должно считать также подобными

$$a,\ 2a,\ 5a,$$

а такъ же

$$x^2,\ 3x^2,\ 7x^2,$$

и т. п., значитъ, также всякое выраженіе безъ коэффиціента, подобнымъ выраженію, отличающемуся отъ него только наличіемъ коэффиціента или не отличающемуся отъ него ни въ чемъ.

Въ правилѣ **21** кромѣ практическихъ указаній содержится еще болѣе глубокій смыслъ, состоящій въ томъ, что оно означаетъ расширеніе понятія объ умноженіи: вводится умноженіе на 1, не заключающееся въ первоначальномъ опредѣленіи умноженія [**3**], ибо вѣдь менѣе чѣмъ изъ двухъ слагаемыхъ сумма состоять не можетъ.

Смыслъ, въ которомъ расширяется это понятіе, можетъ быть выраженъ въ словахъ и равенствомъ такъ:

Опредѣленіе. Подъ произведеніемъ числа на 1 должно понимать само это число: **3ᵃ**

$$1.a = 1a = a.$$

ГЛАВА V.

Отрицательныя числа и нуль.

§ 29. **Подготовительныя разсужденія.** Предположимъ, что два лица A и B играютъ въ какую-нибудь игру на деньги и что каждый изъ нихъ записываетъ свои выигрыши и проигрыши, и положимъ, что лицо A выразило результатъ своей игры въ слѣдующей табличкѣ:

Выигрышъ	20 коп.	40 коп.	30 коп.
Проигрышъ	15 коп.	16 коп.	30 коп.
Въ результатѣ выигрышъ	5 коп.	24 коп.	0 коп.

Въ приведенныхъ первыхъ двухъ примѣрахъ выигрышъ больше проигрыша, въ третьемъ выигрышъ и проигрышъ равны. Если же проигрышъ окажется больше выигрыша, то спрашивается, какъ въ строкахъ съ тѣми же оглавленіями выразить результатъ игры? Если, напр., выигрышъ составлялъ 40 коп., а проигрышъ 50 коп., то въ результатѣ получился проигрышъ въ 10 коп., такъ какъ на это число копѣекъ проигрышъ превысилъ выигрышъ. На эти проигранныя 10 коп. уменьшится прежній выигрышъ. Поэтому въ табличкѣ результатъ послѣдней игры можно условно выразить такимъ образомъ:

Выигрышъ	40 коп.
Проигрышъ	50 коп.
Въ результатѣ выигрышъ	10 коп. (минусъ 10 коп.).

Смыслъ этого знака –передъ числомъ 10 очевидно тотъ, что вообще выигрыша нѣтъ, а есть наоборотъ проигрышъ въ 10 коп., такъ какъ не выигрышъ на этотъ разъ превысилъ проигрышъ, а наоборотъ.

Приведемъ еще нѣсколько примѣровъ такого примѣненія знака—:

1) Торговецъ ѣздитъ на ярмарки, выручаетъ на каждой изъ нихъ нѣкоторую сумму денегъ, покрываетъ расходы (покупка и провозъ товара, свой проѣздъ, наемъ помѣщенія и т. д.) и получаетъ отъ посѣщенія каждой такой ярмарки нѣкоторую чистую прибыль. Составимъ и для этого примѣра табличку:

	1-я ярмарка	2-я ярмарка	3-я ярмарка	4-я ярмарка
Валовая выручка	100 рублей	200 рублей	160 рублей	140 руб.
Расходы	80 ,,	150 ,,	180 ,,	145 руб.
Чистая прибыль	20 руб.	50 руб.	—20 руб.	—5 руб.

Изъ этой таблички ясно видно, что чистая прибыль получилась отъ поѣздокъ на первыя двѣ ярмарки, третья же и четвертая дали убытку 20 рублей и 5 рублей.

2) Точка *A* движется по прямой линіи, начиная всякій разъ отъ 0, вправо и назадъ влѣво.



Составимъ опять табличку, въ которой покажемъ, какъ велико будетъ въ отдѣльныхъ случаяхъ разстояніе по этой прямой точки *A* вправо отъ *O*.

	Пройденные точкою A пути			
Движеніе: вправо влѣво	18 футъ 11 футъ	10 арш. 8 арш.	11 футъ 14 футъ	20 метровъ 32 метра
Разстояніе точки A *вправо* отъ O	7 футъ	2 арш.	— 3 фута	—12 метровъ.

Тутъ видно, что въ 1-мъ и во 2-мъ случаѣ дѣйствительно точка A находится вправо отъ O, въ 3-мъ же и 4-мъ случаѣ она перешла за O *влѣво* и находится въ третьемъ случаѣ отъ O налѣво на разстояніи 3 футъ, а въ четвертомъ случаѣ отъ O налѣво на разстояніи 12 метровъ. Но тѣ же случаи движенія могутъ быть выражены и слѣдующею табличкою:

	Пройденные точкою A пути.			
Движеніе: влѣво вправо	11 футъ 18 футъ	8 аршинъ 10 аршинъ	14 футъ 11 футъ	32 метра 20 метровъ
Разстояніе точки A *влѣво* отъ O.	7 футъ	2 аршина	3 фута	12 метровъ.

При сравненіи же послѣднихъ двухъ табличекъ мы видимъ, что « 7 футъ влѣво отъ O» выражаетъ то же самое, что «7 футъ вправо отъ O»; «—2 аршина влѣво отъ O» то же самое, что «2 аршина вправо отъ O»; «—3 фута вправо отъ O» то же самое, что «3 фута влѣво отъ O» и «—12 метровъ вправо отъ O» то же самое, что «12 метровъ влѣво отъ O».

Изъ прежнихъ же примѣровъ мы видимъ, что «выиграть—10 коп.» означаетъ «проиграть 10 коп.»; «получить прибыль въ —20 рублей» означаетъ «потерпѣть убытокъ въ 20 рублей».

Такимъ же образомъ должно «опуститься на 10 саженей» означать «подняться на 10 саженей», «находиться выше уровня моря на 12 метровъ» означать «находиться ниже уровня моря на 12 метровъ», «охладить на —3 градуса» означать «согрѣть на 3 градуса» и т. д..

§ 30. **Введеніе отрицательныхъ чиселъ и 0.** Разсмотримъ первый изъ приведенныхъ нами въ предыдущемъ параграфѣ примѣровъ еще въ общемъ видѣ:

Если выигрышъ лица A составлялъ a коп., а проигрышъ его b коп., то въ результатѣ его выигрышъ долженъ былъ составить $(a—b)$ коп..

Въ разности же $(a\ \ b)$ можетъ быть:

1) $a>b$;

въ такомъ случаѣ лицо A дѣйствительно выиграло нѣкоторую сумму;

2) $a=b$,

въ такомъ случаѣ $a-b=0$ и лицо A ничего не выиграло, но ничего и не проиграло;

3) $a<b$;

въ такомъ случаѣ это лицо не только ничего не выиграло, но, напротивъ, проиграло, при чемъ этотъ проигрышъ составлялъ столько копѣекъ, на сколько число b больше числа a, то есть $(b-a)$ коп., что по аналогіи съ приведенными выше примѣрами могло бы быть названо выигрышемъ въ $-(b-a)$ коп..

Признавъ примѣнявшіеся въ разсмотрѣнныхъ примѣрахъ символы, состоящіе въ числахъ со знакомъ передъ ними, за числа новаго рода, мы могли бы назвать $-(b-a)$ результатомъ вычитанія числа b изъ числа a при условіи, что $a<b$; и такимъ способомъ мы сдѣлали бы возможнымъ вычитаніе большаго числа изъ меньшаго. Мы постепенно убѣдимся, что признаніе названныхъ символовъ за числа не только представляетъ большія удобства, но что оно даже необходимо ради соблюденія одного общаго плана въ системѣ ариѳметики (общей).

Изъ разсмотрѣнныхъ же примѣровъ мы должны заключить, что вводимыя нами теперь числа обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что вмѣсто стоящаго послѣ нихъ наименованія предметовъ, составляющихъ количества, которымъ они соотвѣтствуютъ, должно понимать предметы противоположнаго наименованія. По данное этимъ числамъ названіе *отрицательныхъ* упомянутое свойство ихъ выражаетъ только отчасти, указывая только на отрицаніе слѣдующаго за ними наименованія.

Важно при этомъ замѣтить, что и число 0 въ первоначальномъ опредѣленіи числа (§ 1) не заключается. Оно также составляетъ расширеніе понятія о числѣ и *выражаетъ разность между двумя равными числами.*

Для запоминанія формулируемъ сказанное такъ:

22 **Опредѣленіе**. Отрицательныя числа суть такія, послѣ которыхъ вмѣсто слѣдующаго за ними наименованія должно пониматься наименованіе противоположное (ср. опредѣленіе въ § 32).

Во избѣжаніе недоразумѣній добавимъ еще, что подъ противоположнымъ наименованіемъ должно понимать именованныя единицы такого рода противоположнаго смысла, который можетъ быть сведенъ къ движенію или счету въ противоположномъ направленіи. Противоположными въ этомъ смыслѣ не могутъ быть названы, напр., именованныя числа: 5 *черныхъ* шаровъ и 3 *бѣлыхъ* шара, 7 *прямыхъ* линій и 10 *кривыхъ* линій, 2 *труса* и 4 *храбреца* и т. п..

Введеніе отрицательныхъ чиселъ и числа 0 составляетъ **первое расширеніе понятія о числѣ.**

§ 31. **Примѣнимость отрицательныхъ чиселъ.** Изъ даннаго только что опредѣленія отрицательныхъ чиселъ, разъясненнаго подробно предшествующими примѣрами, слѣдуетъ, что отрицательныя числа примѣнимы только въ тѣхъ случаяхъ, когда существуютъ величины въ разъясненномъ

выше смыслѣ противоположныя тѣмъ, о которыхъ идетъ рѣчь. Такъ, напр., нѣтъ смысла, если мы скажемъ: «въ классѣ—5 учениковъ»; но можно сказать: «въ классъ вошло—5 учениковъ», и означаетъ это: «изъ класса вышло 5 учениковъ», такъ какъ противоположность вошедшимъ ученикамъ составляютъ вышедшіе ученики.

Само по себѣ выраженіе « 8 коп.» еще не имѣетъ смысла; но можно сказать: «—8 коп. прибыли», такъ какъ въ противоположность «прибыли» существуетъ «убытокъ».

Выраженіе « —3 дня» само по себѣ смысла не имѣетъ; но « —3 дня до этого (т. е. до какого-либо момента)» означаетъ «3 дня послѣ этого».

Во всѣхъ этихъ примѣрахъ объясненіе смысла отрицательнаго (пока еще именованнаго) числа содержитъ указаніе и на противоположныя величины, дающія право на примѣненіе чиселъ отрицательныхъ.

§ 32 **Числа положительныя; абсолютныя и относительныя числа.**

Опредѣленіе. Въ противоположность числамъ отрицательнымъ числа не отрицательныя, снабжаемыя для указанія этой противоположности знакомъ + передъ ними, называются числами *положительными*. **23**

Для поясненія смысла положительныхъ чиселъ приведемъ нѣсколько примѣровъ:

И выраженіе «выдать —8 рублей» и выраженіе «выручить +8 рублей» означаютъ оба «выручить 8 рублей».

Какъ «мнѣ должны —25 рублей», такъ и «я долженъ +25 рублей» означаютъ «я долженъ 25 рублей».

И «отнять—7» и «прибавить +7» означаютъ «прибавить 7».

И «прибавить —9» и «отнять +9» означаютъ «отнять 9».

Изъ опредѣленія положительныхъ чиселъ и изъ приведенныхъ примѣровъ явствуетъ, что эти числа суть въ сущности числа, имѣвшіяся уже до введенія новыхъ, отрицательныхъ, чиселъ, и что поэтому *дѣйствія надъ положительными числами должны производиться такъ, какъ они производятся надъ числами безъ всякаго знака* (т. е., безъ положительнаго и безъ отрицательнаго знака) *передъ ними.*

Писать же положительный знакъ + передъ числомъ имѣетъ только тогда смыслъ, когда существуетъ противоположность, дающая право писать передъ числомъ въ случаѣ надобности и знакъ — .

Но вслѣдствіе того, что только-что сказано было о положительныхъ числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними, этотъ знакъ + передъ ними обыкновенно опускается.

Опредѣленіе. Въ противоположность положительнымъ и отрицательнымъ числамъ числа безъ всякаго знака называются *абсолютными*. **24**

Опредѣленіе. Въ противоположность числамъ абсолютнымъ числа положительныя и отрицательныя вмѣстѣ съ нулемъ называются *относительными*. **25**

Число, слѣдующее въ относительныхъ числахъ послѣ положительнаго и отрицательнаго знака + и —, называется **абсолютнымъ значеніемъ** или **абсолютною величиною** этихъ чиселъ [1]).

§ 33. **Отвлеченныя относительныя числа.** Представленіе о предметныхъ (именованныхъ) числахъ должно считать первоначальнымъ, и уже чрезъ мыслительный процессъ обобщенія мы доходимъ до представленія объ отвлеченныхъ числахъ.

Такъ, напр., усваиваемую съ самаго дѣтства человѣкомъ истину, что 5 лошадей и 3 лошади вмѣстѣ составляютъ 8 лошадей, 5 деревьевъ и 3 дерева вмѣстѣ составляютъ 8 деревьевъ, *вообще* 5 какихъ бы то ни было предметовъ и 3 такихъ же предмета составляютъ вмѣстѣ 8 такихъ предметовъ, мы выражаемъ, *не упоминая вовсе* считанныхъ и слагаемыхъ предметовъ и говоря, что *вообще* 5 и 3 вмѣстѣ составляютъ 8.

Этотъ примѣръ поясняетъ, какъ вообще совершается переходъ отъ предметныхъ чиселъ къ отвлеченнымъ и къ дѣйствіямъ надъ послѣдними.

Такой же переходъ мы совершаемъ и теперь: *отъ предметныхъ относительныхъ чиселъ мы переходимъ къ относительнымъ числамъ отвлеченнымъ.*

Послѣ же этого дѣлается возможнымъ каждое вычитаніе и отвлеченныхъ чиселъ.

Напр.,

$$8-5=3 \text{ или } 8-5=+3$$
$$3-5=-2$$
$$8-12=-4$$
$$7-7=0.$$

Опредѣленія отвлеченныхъ отрицательнаго и положительнаго числа могутъ быть выражены слѣдующими равенствами:

22[а] **Опредѣленіе:** $-n=a-(a+n)$.

23[а] **Опредѣленіе:** $+n=n$.

Введеніе же нуля какъ отвлеченнаго числа можетъ быть выражено такимъ равенствомъ:

22[б] **Опредѣленіе:** $0=a-a$.

До введенія отрицательныхъ чиселъ и числа 0 разность $a-b$ имѣетъ смыслъ и допустима въ составѣ выраженій только при условіи, что $a>b$; послѣ же совершившагося теперь расширенія понятія о числѣ это очень неудобное ограниченіе и необходимость соотвѣтствующей всякій разъ оговорки отпадаютъ.

---

*) Понятіе объ относительныхъ числахъ развивается постепенно, начиная съ XVI столѣтія. Cardano (1545 г.) первый вводитъ отрицательныя числа, но называетъ ихъ воображаемыми числами (numeri ficti) въ противоположность числамъ, которыя онъ называлъ истинными (numeri veri). Descartes (1637 г.) примѣняетъ отрицательныя числа уже въ геометріи и признаетъ ихъ равноправными съ положительными числами.

§ 34. **Примѣненіе понятій «больше» и «меньше» къ относительнымъ числамъ.** Эти понятія должны быть введены такъ, чтобы при этомъ не получалось противорѣчій съ дѣйствительностью Указанія, какъ это необходимо будетъ сдѣлать, мы можемъ извлечь изъ слѣдующихъ примѣровъ.

1) Если два лица *A* и *B*, которыя играютъ съ нѣкоторымъ 3-мъ лицомъ и у которыхъ отмѣчены уже не одинаковые выигрыши, выиграютъ еще поровну, то у того изъ нихъ окажется большій выигрышъ, у кого онъ уже былъ больше. Такъ, напр., если у *A* былъ выигрышъ въ 40 коп., а у *B* выигрышъ въ 30 коп., то послѣ того, какъ оба выиграютъ еще по 50 коп , у *A* выигрышъ составитъ уже 90 коп , а у *B* только 80 коп., т. е., попрежнему у *A* выигрышъ будетъ больше, чѣмъ у *B*, на 10 коп.

Если же выигрышъ *A* первоначально составлялъ 10 коп , выигрышъ *B* —20 к., то послѣ того, какъ оба выиграютъ еще по 50 коп , у *A* будетъ выигрышъ въ 60 коп., а у *B* выигрышъ въ 30 коп. Такъ какъ у *A* получился послѣ этого большій выигрышъ, чѣмъ у *B*, то естественно считать, что и до этого выигрышъ *A* былъ больше, чѣмъ выигрышъ *B*, т. е., что выигрышъ +10 коп. больше, чѣмъ выигрышъ 20 коп.

Если же, наконецъ, *выигрышъ A былъ* первоначально 30 коп., выигрышъ *Б*—45 коп., то послѣ того, какъ они оба выиграютъ по 50 коп , у *A* въ результатѣ получится выигрышъ въ +20 коп., у *Б* же выигрышъ только въ +5 коп., т. е. у перваго больше, чѣмъ у второго. А поэтому должно признать необходимымъ считать, что и до этого выигрышъ *A* былъ больше, чѣмъ выигрышъ *Б*, т. е., что выигрышъ въ 30 коп. больше, чѣмъ выигрышъ въ 45 коп.

2) Представимъ себѣ еще, что мы опускаемся съ высоты +100 футъ надъ уровнемъ моря постепенно внизъ. Въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что
мѣсто, лежащее +**100 футъ** надъ уровнемъ моря **выше, чѣмъ**
мѣсто, лежащее + **90** » » » » , это **мѣсто выше, чѣмъ**
мѣсто, лежащее + **13** » » » » , это **мѣсто выше, чѣмъ**
мѣсто, лежащее **0** » » » » ; **а при помощи такихъ же**
разсужденій, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, **мы** убѣждаемся, что это мѣсто должно считаться **выше, чѣмъ**

мѣсто лежащее **1 футъ** надъ уровнемъ моря, это мѣсто **выше, чѣмъ**
мѣсто, лежащее— **7** » » » » , это мѣсто **выше, чѣмъ**
мѣсто, лежащее - **25** » » » » , это мѣсто **выше, чѣмъ**
мѣсто, лежащее **100** » » » » ,

и т д.

Такимъ образомъ разсмотрѣнные примѣры насъ убѣждаютъ въ томъ, что должно считать

$$+10 > 20$$
$$30 > 40$$
$$+100 > +90 > +12 > 0 > 1 > 7 > 25 > -1000.$$

Вообще для того, чтобы не получать противорѣчій ни теоретическихъ, ни въ примѣненіи къ рѣшенію практическихъ вопросовъ, должно понятія

«больше» и «меньше» примѣнять по отношенію къ относительнымъ числамъ слѣдующимъ образомъ:

26 **Опредѣленіе.** Изъ положительныхъ чиселъ то больше, котораго абсолютная величина больше, изъ отрицательныхъ же чиселъ то больше, котораго абсолютная величина меньше; всякое положительное число больше 0 и больше всякаго отрицательнаго числа, 0 больше всякаго отрицательнаго числа.

§ 35. **Перемѣна знака неравенства.** Изъ приведенныхъ только-что опредѣленій **26**, между прочимъ, слѣдуетъ, что если мы лѣвую и правую часть неравенства замѣнимъ величинами, равными имъ по абсолютному значенію и противоположными имъ по знаку, то и знакъ неравенства долженъ быть замѣненъ знакомъ противоположнымъ.

Напр., если

$$+a > +b,$$

то

$$-a < -b;$$

или если

$$-c < +d,$$

то

$$+c > -d.$$

ГЛАВА VI.

Сложеніе и вычитаніе относительныхъ чиселъ.

§ 36. **Сложеніе равнозначныхъ чиселъ.** При сложеніи только положительныхъ предметныхъ чиселъ между собою или только отрицательныхъ будутъ слагаться между собою, въ обоихъ случаяхъ, величины однородныя; слѣдовательно и результатъ сложенія въ такихъ случаяхъ долженъ получаться однородный со слагаемыми.

Если, напр., нужно сложить:

12 коп. проигрыша,
17 коп. проигрыша
и 19 коп. проигрыша

или, что то же самое,

+12 коп. проигрыша,
+17 коп. проигрыша
и +19 коп. проигрыша,

то сумма проигрыша будетъ 48 коп. или соотвѣтственно +48 коп.

Если же нужно сложить:

—11 коп. проигрыша, т. е. +11 коп. выигрыша,
—20 коп. проигрыша, т. е. +20 коп. выигрыша и
— 7 коп. проигрыша, т. е. + 7 коп. выигрыша, то сумма проигрыша будетъ —38 коп. или, что то же самое, получится всего +38 коп. выигрыша.

Изъ этихъ примѣровъ видно, что понятія о сложеніи и объ относительныхъ числахъ не препятствуютъ введенію сложенія относительныхъ чиселъ съ одинаковыми знаками. Ими указывается и смыслъ, въ которомъ можно ввести такое сложеніе. Остается, слѣдовательно, только перейти къ отвлеченнымъ числамъ и высказать опредѣленіе, что̀ должно понимать подъ сложеніемъ относительныхъ чиселъ съ одинаковыми знаками. Но для большаго удобства при примѣненіи придадимъ этому **опредѣленію** форму правила, въ которомъ оно и будетъ заключаться:

Правило. Относительныя числа *съ одинаковыми знаками* слагаютъ, слагая ихъ абсолютныя величины, причемъ знакъ остается тотъ же. 27[1]

§ 37. **Числа равныя и противоположныя.** Въ какомъ смыслѣ можетъ быть введено сложеніе относительныхъ чиселъ съ противоположными знаками, пояснимъ также сначала примѣрами.

Начнемъ при этомъ съ того случая, когда абсолютныя величины такихъ относительныхъ чиселъ равны между собою.

Положимъ, что лицо, игравшее на деньги, записало выигрыша +36 коп. и −36 коп. и *подводитъ* всему своему выигрышу итогъ. Такъ какъ обѣ записи названы «выигрышемъ», то итогъ *можетъ* быть названъ *суммою* этихъ выигрышей; а такъ какъ смыслъ записей тотъ, что игравшее лицо столько же выиграло, сколько и проиграло (см. §§ 29 и 30), то должно считать, что сумма выигрышей въ +36 коп. и въ −36 коп. равна 0, или что оба эти выигрыша, взятые вмѣстѣ, взаимно уничтожаются.

Подобнымъ же образомъ мы убѣждаемся, что если къ +1 рублю вырученному прибавится −1 рубль вырученный, то и эти двѣ величины при этомъ взаимно уничтожатся. Такъ же взаимно уничтожатся сложенные вмѣстѣ сдѣланные +1 шагъ влѣво и −1 шагъ влѣво.

Равнымъ образомъ получится сумма 0 при сложеніи величинъ:

подняться на +1 футъ
и подняться на −1 футъ;
подняться на +7 футъ
и подняться на −7 футъ;
подняться на $+a$ футъ
и подняться на $-a$ футъ.

Изъ этихъ примѣровъ мы видимъ, что, переходя къ отвлеченнымъ относительнымъ числамъ, мы должны считать:

$$(+1)+(-1)=0$$
$$(+7)+(-7)=0$$
$$(-36)+(+36)=0,$$

и вообще

$$(+a)+(-a)=0.$$

28 **Опредѣленіе.** Два числа, равныхъ по абсолютной величинѣ и имѣющихъ противоположные знаки, называются *равными и противоположными*.

Сложеніе чиселъ равныхъ и противоположныхъ можетъ быть введено только въ смыслѣ, **опредѣленіе** котораго также будетъ удобнѣе дать въ формѣ правила:

29 **Правило.** Два числа, равныя и противоположныя, при сложеніи взаимно уничтожаются.

§ 38. **Сложеніе разнозначныхъ чиселъ.** Какъ же должно понимать сумму выигрышей въ +5 коп. и въ —3 коп.? +5 коп. выигрыша можно разсматривать какъ сумму выигрышей въ +3 коп. и въ +2 коп., и если къ этой суммѣ прибавится еще —3 коп. выигрыша, то +3 коп. выигрыша и —3 коп. выигрыша взаимно уничтожатся, и въ результатѣ получается +2 коп. выигрыша.

Если нужно сложить —9 коп. прибыли и +4 коп. прибыли, то —9 коп. прибыли можно представить въ видѣ суммы прибылей въ —4 коп. и въ —5 коп., и если прибавить сюда +4 коп. прибыли, то послѣднее число и —4 коп. прибыли взаимно уничтожатся, и въ результатѣ получатся —5 коп. прибыли.

Эти примѣры и подобные указываютъ на смыслъ, въ которомъ можетъ быть введено безъ противорѣчій въ теоріи и на практикѣ сложеніе относительныхъ чиселъ съ противоположными знаками. **Опредѣленіе** такого сложенія заключается въ слѣдующемъ правилѣ:

27^2 **Правило.** Чтобы сложить два относительныя числа съ противоположными знаками, нужно вычесть другъ изъ друга ихъ абсолютныя значенія и предъ полученнымъ абсолютнымъ числомъ поставить знакъ того слагаемаго, которое по абсолютной величинѣ больше.

Согласно этому правилу

$$(+a)+(-b)=+(a-b)=a-b, \text{ если } a>b,$$

и

$$(+a)+(-b)=-(b-a), \text{ если } a<b.$$

Но можно *во всякомъ случаѣ* писать:

$$(+a)+(-b)=a-b,$$

такъ какъ $a-b$ въ томъ случаѣ, если $a<b$, означаетъ не что иное, какъ именно отрицательное число $-(b-a)$, какъ это уже разъяснено было раньше (въ §§ 30 и 33), и такъ какъ въ томъ случаѣ, когда $a=b$,

$$(+a)+(-b)=0 \quad [29]$$

и

$$a-b=0 \quad [22^5].$$

§ 39. **Слагаемое 0.** Понятіе о нулѣ какъ слагаемомъ не заключается въ первоначальномъ опредѣленіи сложенія [1]. Введеніе сложенія съ нулемъ составляетъ новое расширеніе понятія о сложеніи. Чтобы быть примѣнимымъ на практикѣ и не давать противорѣчій въ теоріи, такое сложеніе должно быть введено въ слѣдующемъ смыслѣ:

Опредѣленіе. Сложить съ какимъ-либо числомъ 0 значить оставить это число безъ измѣненія. 23[3]

Такъ должно считать:

$$a+0=a$$
$$0+a=a$$
$$0+0=0.$$

§ 40. **Понятіе о вычитаніи относительнаго числа**. Вмѣстѣ съ введеніемъ сложенія относительныхъ чиселъ должно считать введеннымъ, согласно опредѣленію **17**, и вычитаніе ихъ.

Напримѣръ, вычесть $+7$ изъ $+10$ значить найти такое число, которое, будучи сложено съ $+7$, дастъ $+10$. Ясно, что такое число будетъ $+3$. Слѣд.,

$$а)\ (+10)-(+7)=+3.$$

Такимъ же образомъ мы, на основаніи опредѣленія вычитанія, находимъ:

$$б)\ (-10)-(-7)=-3;$$
$$в)\ (+10)-(-7)=+17;$$
$$г)\ (-10)-(+7)=-17.$$

Сравнивъ съ примѣрами а, б, в и г слѣдующіе примѣры сложенія:

$$а)\ (+10)+(-7)=+3,$$
$$б)\ (-10)+(+7)=-3;$$
$$в)\ (+10)+(+7)=+17;$$
$$г)\ (-10)+(-7)=-17,$$

мы видимъ, что вычитаніе относительныхъ чиселъ можетъ быть сведено къ сложенію. Общее же правило, какъ слѣдуетъ производить такую замѣну вычитанія сложеніемъ, заключается въ слѣдующемъ предложеніи:

Теорема. Относительное число вычитаютъ, прибавляя число, равное и противоположное ему. 30

Предп. a и b абсолютныя числа.

Утв.
$$(+a)-(+b)=(+a)+(-b);$$
$$(-a)-(+b)=(-a)+(-b);$$
$$(+a)-(-b)=(+a)+(+b);$$
$$(-a)-(-b)=(-a)+(+b).$$

Док. При вычитаніи двухъ относительныхъ чиселъ другъ изъ друга возможны четыре случая, такъ какъ и уменьшаемое и вычитаемое можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ числомъ. Всѣ эти случаи указаны въ утвержденіи. При доказательствѣ перваго изъ нихъ (равно, какъ и четвертаго) нужно особо разсмотрѣть случаи, когда $a>b$, и когда $a<b$.

Если $a>b$, то

$$(+a)+(-b)=+(a-b).$$

Слѣд., въ этомъ случаѣ

$$(+a)+(-b)+(+b)=+(a-b)+(+b) \qquad [27^1]$$
$$=+(a-b+b)$$
$$=+a.$$

Если же $a<b$, то

$$(+a)+(-b)=-(b-a),$$

и потому въ этомъ случаѣ

$$(+a)+(-b)+(+b)=-(b-a)+(+b) \qquad [27^2]$$
$$=+[b-(b-a)]$$
$$=+[b-b+a] \qquad [\S\ 25]$$
$$=+a.$$

Такъ оказывается, что въ обоихъ случаяхъ $(+a)+(-b)$ есть число, которое, будучи сложено съ $+b$, даетъ $+a$, значитъ, равно разности $(+a)-(+b)$.

Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ

$$(+a)-(+b)=(+a)+(-b).$$

Подобнымъ же образомъ можно, основываясь на опредѣленіяхъ **17**, **27¹** и **27²**, легко показать, что $(-a)+(-b)$ есть число, которое, будучи сложено съ $+b$, даетъ $-a$, $(+a)+(+b)$ есть число, которое, будучи сложено съ $-b$, даетъ $+a$, и, наконецъ, $(-a)+(+b)$ есть число, которое, будучи сложено съ $-b$, даетъ $-a$. А изъ этого слѣдуетъ справедливость остальныхъ трехъ утвержденій.

§ 41. **Правило вычитанія относительныхъ чиселъ** можетъ быть выражено еще иначе:

31 **Опредѣленіе.** Перемѣнить знакъ значитъ вмѣсто + поставить −, вмѣсто − поставить +.

32 **Слѣдствіе** (изъ теор. **30**). Чтобы вычесть относительное число, нужно перемѣнить знакъ этого вычитаемаго и полученное такимъ образомъ число сложить съ уменьшаемымъ.

Какъ слѣдствія изъ опредѣленія сложенія нуля съ какимъ-либо числомъ получаются, по опредѣленію **17**, слѣдующія истины:

32а **Слѣдствіе 1: a — o = a**

32б **Слѣдствіе 2: o — a = — a.**

ГЛАВА VII.

Сложеніе и вычитаніе многочленовъ.

§ 42. **Понятіе о многочленѣ и одночленѣ.**

33 **Опредѣленіе.** Выраженіе, состоящее изъ нѣсколькихъ выраженныхъвъ какой бы то ни было формѣ

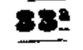
чиселъ, соединенныхъ между собою знаками + или −, называется *многочленомъ*, самыя же числа *членами* его.

Напр., выраженія:

$$a-b+c+d-e,$$
$$9+z-7-3,$$
$$8a^2bc-5ab^2c-c^4+6$$

суть многочлены, при чемъ члены послѣдняго многочлена суть произведенія $8a^2bc$ и $5ab^2c$, степень c^4 и число 6.

Многочленъ ***(полиномъ)***, состоящій изъ двухъ членовъ, называется двучленомъ ***(биномомъ)***, многочленъ, состоящій изъ трехъ, четырехъ и т. д. членовъ, —трехчленомъ ***(триномомъ)***, четырехчленомъ и т. д.

Опредѣленіе. В ъ противоположность многочленамъ всякое отдѣльное число, всякое произведеніе, всякая степень, вообще всякое выраженіе, въ которомъ послѣднее указанное знаками дѣйствіе не есть ни сложеніе, ни вычитаніе, называется *одночленомъ*. 

Напр., выраженія:

$$9xy^2z^4,\ 5,\ p^3,\ ab,\ 4(a-b+2c)(a^2+3b^2)$$

суть одночлены, при чемъ въ послѣднемъ изъ нихъ второй сомножитель трехчленъ, а третій двучленъ.

§ 43. **Многочленъ какъ сумма относительныхъ чиселъ.** На основаніи правилъ о сложеніи и вычитаніи относительныхъ чиселъ легко убѣдиться, что

$$(+10)+(-4)=10-4=6$$
$$(+9)+(-20)=9-20=-11$$
$$(+15)+(-6)+(+3)+(-21)=15-6+3-21=-9.$$

Указываемая этими примѣрами общая истина удобнѣе можетъ быть выражена, если допустить многочлены со знакомъ — передъ первымъ членомъ. Недоразумѣній и противорѣчій отъ введенія такихъ многочленовъ произойти не можетъ, такъ какъ при всякомъ толкованіи многочленовъ, начинающихся съ членовъ $-a+b$ или $-a-b$, величина ихъ останется одною и тою же. И въ самомъ дѣлѣ, выраженіе $-a+b$ только и можетъ означать $(-a)+(+b)$, что равняется $b-a$ [§ 38]; выраженіе же $-a-b$ можетъ быть понято или какъ $(-a)+(-b)$ или же какъ $(-a)-(+b)$, что по теоремѣ **30** также равняется $(-a)+(-b)$.

Послѣ такого расширенія понятія о многочленѣ мы упомянутую выше истину можемъ выразить слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Сумма относительныхъ чиселъ равняется многочлену, который мы получимъ, если опустимъ знаки сложенія и скобки, а положительные и отрицательные знаки оставимъ между 34

числами въ качествѣ знаковъ дѣйствій (**сложенія и вычитанія**).

Док. Положимъ что данная сумма относительныхъ чиселъ есть $(+a)+(-b)+(-c)+(+d)$. Какъ разъяснено было въ § 38, выраженіе $a-b$ всегда безошибочно передаетъ и по величинѣ и по знаку значеніе суммы $(+a)+(-b)$, почему послѣдняя и можетъ быть всегда имъ замѣнена. Смотря по тому, будетъ ли $a-b$ положительное или отрицательное число, положимъ:

$$a-b=m$$

или

$$a-b=-m'.$$

Въ первомъ случаѣ для вычисленія значенія данной суммы останется произвести сложеніе

$$(+m)+(-c)+(+d),$$

во второмъ сложеніе

$$(-m')+(-c)+(+d).$$

Сумма первыхъ двухъ слагаемыхъ можетъ быть замѣнена въ первомъ изъ послѣднихъ двухъ выраженій выраженіемъ $m-c$, во второмъ выраженіемъ $-m'-c$. Смотря по тому, какого знака будутъ $m-c$ и $-m'-c$, назовемъ ихъ $+n$ или $-n'$.

Тогда въ первомъ случаѣ для вычисленія значенія данной суммы останется произвести еще сложеніе

$$(+n)+(+d),$$

во второмъ же сложеніе

$$(-n')+(+d),$$

въ первомъ результатъ получится тотъ же, что и отъ сложенія

$$n+d,$$

во второмъ тотъ же, что и отъ вычисленія значенія двучлена

$$-n'+d.$$

Если же мы замѣнимъ n и $-n'$ выраженіями, вмѣсто которыхъ они были поставлены, то оказывается, что въ первомъ случаѣ результатъ сложенія будетъ равенъ значенію многочлена

$$m-c+d,$$

во второмъ значенію многочлена

$$-m'-c+d.$$

И если мы, наконецъ, еще и m и $-m'$ замѣнимъ выраженіями, вмѣсто которыхъ они были поставлены, то и узнаемъ, что результатъ сложенія данной суммы долженъ быть тотъ же, который получается при выполненіи дѣйствій, указанныхъ выраженіемъ

$$a-b-c+d,$$

такъ что мы имѣемъ право писать:

$$(+a)+(-b)+(-c)+(+d)=a-b-c+d.$$

Совершенно такимъ же образомъ можно показать, что сумма относительныхъ чиселъ есть то же число, какъ и результатъ выполненія дѣйствій въ многочленѣ, полученномъ по указанію теоремы, сколько бы въ этой суммѣ ни было слагаемыхъ и какихъ бы они ни были знаковъ.

А это и требовалось доказать.

По теоремѣ V отсюда получается:

Слѣдствіе. Всякій многочленъ можно разсматривать какъ сумму относительныхъ чиселъ. 

По этой причинѣ и члены многочлена, смотря по знаку передъ ними, называются положительными и отрицательными, многочленъ же алгебраическою суммою членовъ, изъ которыхъ онъ состоитъ.

Теорема. Величина многочлена не зависитъ отъ порядка членовъ его[1]. 

Док. Справедливость теоремы непосредственно слѣдуетъ изъ теоремы **18**.

§ 44. **Приведеніе подобныхъ членовъ.** На основаніи послѣдней теоремы въ многочленѣ

$$8a^2c-9bd+10a^2c+7bd-7a^2c$$

можно члены написать въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$8a^2c+10a^2c-7a^2c-9bd+7bd.$$

Но

$$8a^2c+10a^2c-7a^2c=11a^2c;$$
$$-9bd+7bd=-2bd.$$

Слѣдовательно:

$$8a^2c-9bd+10a^2c+7bd-7a^2c=11a^2c-2bd.$$

Показанному на разсмотрѣнномъ примѣрѣ упрощенію многочлена, содержащаго подобные члены, дано особое названіе:

Опредѣленіе. Соединеніе подобныхъ членовъ въ многочленѣ называется ***приведеніемъ*** ихъ. 

§ 45. **Сложеніе многочленовъ.**

Теорема. Многочлены слагаютъ, соединяя всѣ члены ихъ въ одинъ многочленъ. **37**

Док. Положимъ, что требуется сложить многочлены

$$A=a-b-c+d$$

и

$$B=m-n+p+q-r.$$

Въ такомъ случаѣ, принимая B пока за одинъ членъ, мы, по теоремѣ **35**, имѣемъ:

$$A+B=a-b-c+d+B=B+a-b-c+d.$$

---

[1]) Изъ послѣднихъ двухъ теоремъ слѣдуетъ, что и для относительныхъ чиселъ остается въ силѣ перемѣстительный законъ сложенія.

Послѣднимъ же выраженіемъ указывается, что сумма $A+B$ равна числу, получающемуся путемъ такого вычисленія: произведя въ произвольномъ порядкѣ дѣйствія, указываемыя многочленомъ B, мы должны еще прибавить a, затѣмъ вычесть b и произвести и остальныя дѣйствія указанныя для членовъ многочлена A. Ясно, что получаемый такимъ образомъ результатъ есть то же самое число, которое получится отъ выполненія дѣйствій, указываемыхъ многочленомъ, состоящимъ изъ всѣхъ членовъ многочленовъ A и B, при чемъ и эти дѣйствія могутъ [35] производиться въ произвольномъ порядкѣ. А изъ этого и слѣдуетъ справедливость теоремы вообще для случая, когда слагаются два многочлена, такъ какъ для всякаго такого сложенія разсужденія останутся тѣ же.

Чтобы доказать справедливость утверждаемой истины для нѣсколькихъ многочленовъ, достаточно сложить сначала два изъ нихъ, съ суммою, которая будетъ многочленъ, сложить третій такимъ же образомъ, какъ это было сдѣлано выше съ A и B; съ этою суммою, которая опять будетъ многочленъ, сложить такимъ же образомъ четвертый, и т. д.

Такимъ же образомъ теорема доказывается и для того случая, когда въ числѣ слагаемыхъ есть и одночлены.

37a **Слѣдствіе.** **Многочлены и одночлены слагаютъ, соединяя послѣдніе и всѣ члены первыхъ въ одинъ многочленъ**[1]).

Примѣры.

1) $(2a^3b+5a^2c-a-7)+(a^2c+11-3a^3b)+(6a-5-3a^2c-a^3b)=2a^3b-3a^3b$
$-a^3b+5a^2c+a^2c-3a^2c-a+6a-7+11-5=-2a^3b+3a^2c+5a-1.$

2) $(x-8y-5z)+6y+(5x-3y-z)-6x+(7x-y-z)+9z-5x$
$=x+5x-6x+7x-5x-8y+6y-3y-y-5z-z-z+9z=2x-6y+2z.$

Указаніе.

Чтобы удобнѣе дѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, можно многочлены, которые требуется сложить, подписывать одинъ подъ другимъ такъ, чтобы подобные члены стояли другъ подъ другомъ.

Примѣръ:

$$\begin{array}{l} 6a^2-5ab-3b^2 \\ 5a^2-2ab+4b^2 \\ -3a^3+ab \\ \quad a^2 \qquad\quad 2b^2 \\ \hline 9a^2-6ab-b^2 \end{array}$$

(четыре слагаемыхъ)

(сумма)

[1]) Изъ теоремъ 37a и 34a слѣдуетъ, что и **для относительныхъ чиселъ остается въ силѣ сочетательный законъ сложенія.**

§ 46. **Вычитаніе многочленовъ.** Сравнимъ между собою слѣдующія двѣ суммы:

I		II
$+\begin{cases} +5 \text{ коп. выигрыша} \\ +12 \text{ ,, ,, ,,} \\ -3 \text{ ,, ,, ,,} \\ -4 \text{ ,, ,, ,,} \end{cases}$	и	$+\begin{cases} -5 \text{ коп. выигрыша} \\ -12 \text{ ,, ,, ,,} \\ +3 \text{ ,, ,, ,,} \\ +4 \text{ ,, ,, ,,} \end{cases}$

Число копѣекъ выигрыша, содержащееся въ I суммѣ, равно +10, содержащееся же во II суммѣ, равно —10.

Этотъ примѣръ поясняетъ, какъ изъ понятія объ относительныхъ числахъ слѣдуетъ, что сумма

$$(+a)+(-b)+(-c)+(+d)$$

должна быть равна и противоположна суммѣ

$$(-a)+(+b)+(+c)+(-d),$$

и что, слѣдовательно, и многочлены

$$a-b-c+d$$

и

$$-a+b+c-d$$

должны быть равны и противоположны другъ другу.

Истина, на которую указываютъ эти примѣры, можетъ быть выражена и доказана слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Если мы въ многочленѣ передъ всѣми членами перемѣнимъ знаки, то получимъ многочленъ, равный и противоположный первому. **38**

Док. Справедливость теоремы слѣдуетъ изъ того, что многочленъ, получающійся изъ даннаго многочлена чрезъ перемѣну знаковъ передъ всѣми членами его, при сложеніи съ даннымъ многочленомъ даетъ въ суммѣ 0 [**29**].

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, на основаніи теоремы **30**, предложеніе, которое мы не называемъ, однако, слѣдствіемъ по той причинѣ, что показываемъ, какъ оно еще можетъ быть доказано:

Теорема. Чтобы вычесть многочленъ, нужно перемѣнить знаки передъ всѣми членами его и полученный такимъ образомъ многочленъ сложить съ уменьшаемымъ. **39**

Предп. A—какой-либо многочленъ или одночленъ (можетъ означать и 0).

Утв. $A-(a-b-c+d-e)=A+(-a+b+c-d+e)=A-a+b+c-d+e.$

Док. Справедливость утвержденія слѣдуетъ изъ опредѣленія разности [**17**[a]], такъ какъ и

$$A+(-a+b+c-d+e)$$

и

$$A—a+b+c—d+e$$

означають, какъ легко убѣдиться чрезъ сложеніе, число, которое, будучи сложено съ многочленомъ $a—b—c+d—e$, даетъ A.

Примѣры.

1) $12c—(a^3—2b^2—5c)\quad 12c+(\quad a^3+2b^2+5c)—12c—a^3+2b^2+5c—17c—\ a^3+2b^2$.

2) $3xy—7yz—6xz—(\quad 5xy+4yz—9xz)—3xy—7yz—6xz+(+5xy—4yz+9xz)-$

$$3xy—7yz—6xz+5xy—4yz+9xz=8xy—11yz+3xz.$$

Указаніе.

И при вычитаніи удобно многочлены подписывать одинъ подъ другимъ такъ, чтобы подобные члены стояли другъ подъ другомъ. При этомъ дѣйствіе можетъ быть расположено слѣдующимъ образомъ (чтобы безъ дальнѣйшихъ объясненій былъ понятенъ смыслъ знаковъ, повторимъ рѣшенный уже выше 2-й примѣръ):

$$\begin{array}{rl} & 3xy\quad 7yz—6xz \\ & -5xy+4yz\quad 9xz \\ + & +\qquad\qquad + \\ \hline & 8xy—11yz+3xz \end{array}$$

§ 47. **Раскрытіе скобокъ.** На основаніи послѣднихъ теоремъ мы имѣемъ:

$$a\quad(b\quad c—d)\quad a+(\quad b+c+d)=a—b+c+d.$$

Въ результатѣ преобразованій мы видимъ здѣсь исчезновеніе скобокъ, въ которыя заключены были многочлены и передъ которыми стояли одинъ разъ знакъ $+$, другой разъ знакъ $—$. Такая замѣна выраженія со скобками выраженіемъ безъ скобокъ называется раскрытіемъ скобокъ.

Правила относительно **раскрытія скобокъ** при сложеніи и вычитаніи многочленовъ заключаются въ приведенномъ равенствѣ, являются непосредственнымъ слѣдствіемъ изъ теоремъ **37** и **39** и могутъ быть словами выражены слѣдующимъ образомъ:

40 **Слѣдствіе.** Скобки, передъ которыми стоитъ знакъ $+$, раскрываютъ, просто опуская ихъ.

41 **Слѣдствіе.** Чтобы раскрыть скобки, передъ которыми стоитъ знакъ $—$, нужно перемѣнить знакъ передъ каждымъ членомъ въ скобкахъ и опустить скобки и знакъ $—$ передъ ними.

Изъ этихъ же предложеній мы, по теоремѣ V, заключаемъ:

42 **Слѣдствіе.** Любое число членовъ многочлена можно заключить въ скобки какъ со знакомъ $+$, такъ и со знакомъ $—$ передъ ними, при чемъ въ послѣднемъ случаѣ должно передъ всѣми заключенными въ скобки членами перемѣнить знаки.

Если мы въ выраженіи

$$a—(b—c)$$

по правилу **41** раскроемъ скобки, то получимъ

$$a \quad b + c.$$

Въ томъ же частномъ случаѣ, когда a и b окажутся равными 0, первое изъ этихъ выраженій приметъ видъ [**32**[б]]:

$$-(\quad c),$$

а послѣднее превращается въ

$$+c.$$

Изъ этого мы видимъ, что *правило* **41** *примѣнимо и къ одночленамъ*, и такъ же легко убѣдиться, что *къ одночленамъ примѣнимо и правило* **40**. При этомъ важно отмѣтить то интересное обстоятельство, что результаты, получаемые путемъ примѣненія этихъ правилъ, могли бы также быть получены на основаніи понятій объ отрицательныхъ и положительныхъ числахъ, какъ это видно и изъ слѣдующихъ примѣровъ, не нуждающихся въ дальнѣйшихъ объясненіяхъ:

$$-(-3) = +3,$$
$$[\; (\; 6)] = \; 6,$$
$$\{ \; [\; (\; 8)]\} = +8,$$
$$-(+a) = \; a,$$
$$+(-b) \; -b.$$

Приведемъ еще такой примѣръ примѣненія правила **41**:

$$-(a-b-c) = \; a+b+c;$$

и слѣдующіе примѣры примѣненія правила **42**:

$$z-x-y=z \; (x+y)$$

или

$$z-x-y = -(-z+x+y) \quad (x+y-z);$$
$$a-b-c-d+e-f=a-(b+c)-(d \; e+f)$$

или

$$a-b-c-d+e-f=a+e-(b+c+d+f).$$

Болѣе сложные примѣры примѣненія теоремъ 40 и 41.

1) $a-\{b-[\; c-(d-e)]+f\} =$
$a \; \{b \; [-c-d+e]+f\} =$
$a-\{b+c+d-e+f\}$
$a-b-c-d+e-f,$

или, если начать раскрытіе скобокъ извнѣ:

$a \; \{b-[-c-(d-e)]+f\} =$
$a-b+[-c-(d-e)]-f$
$a-b-c-(d \; e)-f =$
$a-b-c-d+e-f.$

2) $(2a^2x-3by^2)+\{9a^2x+8by^2-[8+a^2x-(by^2+8)]-(5a^2x-6by^2)\} =$
$-2a^2x+3by^2+9a^2x+8by^2-[8+a^2x-by^2-8]-(5a^2x-6by^2) =$
$-2a^2x+3by^2+9a^2x+8by^2-8-a^2x+by^2+8-5a^2x+6by^2=a^2x+16by^2.$

ГЛАВА VIII

Сложеніе и вычитаніе неравенствъ.

§ 48. **Способы указанія равенствомъ на неравенство двухъ величинъ.** Теоремы о сложеніи и вычитаніи *равныхъ* величинъ могли быть доказаны уже въ I главѣ въ такой формѣ, которая остается справедливою для всѣхъ родовъ чиселъ. Подобныя же имъ теоремы о сложеніи и вычитаніи *неравныхъ* величинъ мы можемъ доказать только теперь въ такомъ видѣ, который останется въ силѣ для всѣхъ чиселъ, къ которымъ примѣнимы понятія «больше» и «меньше». Но предварительно мы должны только еще разъяснить, какъ при помощи равенства можно указать, что изъ двухъ величинъ одна больше другой.

Произведя слѣдующія вычитанія относительныхъ величинъ.

$$(+a)-(+b)=(+a)+(-b)=a-b,$$
$$(-a)-(-b)=(-a)+(+b)=b-a,$$
$$(+a)-(-b)=(+a)+(+b)=a+b,$$
$$(-a)-(+b)=(-a)+(-b)=-(a+b),$$

мы видимъ, что здѣсь результатъ вычитанія будетъ положительнымъ въ первомъ случаѣ при условіи, что $a>b$, во второмъ при условіи, что $b>a$, въ третьемъ же всегда, и что, наконецъ, въ четвертомъ случаѣ онъ положительнымъ вообще быть не можетъ. Но, согласно опредѣленіямъ **26**,

$$+a>+b, \text{ если } a>b;$$
$$-a>-b, \text{ если } b>a;$$
$$+a>-b \text{ всегда},$$
$$\text{и всегда } a<+b.$$

Слѣдовательно, и для тѣхъ случаевъ, когда уменьшаемое и вычитаемое относительныя числа, остается въ силѣ та истина, что разность положительна только тогда, когда уменьшаемое больше вычитаемаго, и отрицательна только тогда, когда уменьшаемое меньше вычитаемаго. Поэтому по знаку разности можно судить, уменьшаемое ли больше вычитаемаго или наоборотъ [А если разность ни положительна, ни отрицательна, а равна 0, то по опредѣленію **22**[б] уменьшаемое и вычитаемое равны другъ другу].

Слѣдовательно, если мы теперь предположимъ, что $a-b>0$, то есть, что эта разность положительное число, то при этомъ условіи непремѣнно a будетъ больше b, все равно, будутъ ли a и b абсолютныя или относительныя числа. Если мы эту положительную разность $a-b$ назовемъ m, то по опредѣленію вычитанія должно быть:

$$a=b+m.$$

Въ силу же того, что было выяснено выше, это равенство выражаетъ, что
$$a>b,$$
и притомъ съ точнымъ указаніемъ, что a на m больше b. Вмѣстѣ съ тѣмъ

это равенство, конечно, выражаетъ, что b на m меньше a, совершенно такъ же, какъ и равенство

$$a-m=b,$$

которое по опредѣленію разности слѣдуетъ изъ предыдущаго.

Значитъ, при условіи, что m положительное (или, если нужно, то и абсолютное) число, какъ изъ равенства

$$a=b+m,$$

такъ и изъ равенства

$$a-m=b$$

слѣдуетъ, что $a>b$.

§ 49. **Сложеніе неравенствъ.**

Теорема. 1. Если къ неравнымъ величинамъ прибавимъ поровну, то тамъ получится больше, гдѣ было больше.

Предп. $a>b$
$c=d.$

Утв. $a+c>b+d.$

Док. Назвавъ m ту величину (положительную, конечно, или абсолютную), на которую a больше b, мы способомъ, указаннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, первое предположеніе можемъ выразить такимъ образомъ:

$$a=b+m.$$

По предположенію $c=d.$ Слѣдовательно, по теоремѣ VII:

$$a+c=b+d+m.$$

Такъ мы видимъ, что $a+c$ на m больше, чѣмъ $b+d$, что, слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ справедливо утвержденіе, что

$$a+c>b+d.$$

Слѣдствіе. Сумма измѣняется въ томъ же смыслѣ, въ какомъ измѣняется одно изъ слагаемыхъ ея.

Теорема. 2. Тамъ получится больше, гдѣ было больше и куда притомъ больше прибавили.

Предп. $a>b$
$c>d.$

Утв. $a+c>b+d.$

Док. Назвавъ m ту величину (положительную), на которую a больше b, и n ту величину (положительную), на которую c больше d, мы предположеніе можемъ представить въ такомъ видѣ:

$$a=b+m$$
$$c=d+n.$$

Слѣдовательно, по теоремѣ VII:

$$a+c=b+d+m+n.$$

Такъ мы видимъ, что $a+c$ на $m+n$ больше $b+d$, что, слѣдовательно, справедливо утвержденіе

$$a+c>b+d.$$

Такимъ же образомъ теорема доказывается и для большаго числа неравенствъ.

Примѣчаніе.

Если мы смыслъ неравенствъ

$$a>b$$
$$c<d$$

выразимъ равенствами

$$a=b+m$$
$$c+n=d,$$

въ которыхъ m и n означаютъ положительныя величины, и сложимъ эти равенства, то получаемъ равенство:

$$a+c+n=b+d+m,$$

которое не позволяетъ сдѣлать никакого вывода относительно того, равны ли или не равны суммы $a+c$ и $b+d$. При названныхъ условіяхъ ($a>b$, $c<d$) первая изъ нихъ можетъ быть и больше второй и меньше ея и равняться ей.

Слѣдовательно, *нельзя дѣлать выводовъ чрезъ сложеніе неравенствъ, въ которыхъ знаки неравенства не одинаковые.*

§ 50. **Вычитаніе неравенства и вычитаніе изъ неравенства.**

Теорема 1. Если отъ неравныхъ величинъ отнимемъ поровну, то тамъ получится больше, гдѣ было больше.

Предп. $a>b$
$c=d$.

Утв. $a-c>b-d$.

Док. Назвавъ m величину (положительную), на которую a больше b, мы первое предположеніе можемъ выразить равенствомъ

$$a=b+m.$$

Предположено также, что $c=d$

$$a-c=b-d+m,$$
Вычитая второе равенство изъ перваго, мы по теоремѣ VII получаемъ:

откуда видно [§ 48], что дѣйствительно

$$a-c>b-d.$$

Слѣдствіе. *Разность измѣняется въ томъ же смыслѣ, въ которомъ измѣняется ея уменьшаемое.*

Теорема 2. Если отъ равныхъ величинъ отнимемъ неравныя, то тамъ останется меньше, гдѣ отнято больше.

Предп. $a=b$
$c>d$.

Утв. $a-c<b-d$.

Док Обозначивъ величину (положительную), на которую c больше d, буквою m, мы второе предположенie можемъ выразить равенствомъ

$$c=d+m.$$

Предположено также, что $a \quad b$

$$\underline{\hspace{4cm}}$$
$$a \quad c=b \quad d \quad m$$ Вычтя первое равенство изъ второго, мы по теоремѣ VII получаемъ.

Такъ мы видимъ [§ 48], что $a \quad c$ на m меньше, чѣмъ $b-d$, что, слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ справедливо утвержденie

$$a-c<b-d.$$

Слѣдствie. Разность измѣняется въ смыслѣ, противоположномъ тому, въ которомъ измѣняется ея вычитаемое.

Теорема 3. Тамъ останется больше, гдѣ было больше и откуда притомъ меньше отнято.

Предп. $a>b$
$c<d$

Утв. $a-c>b-d.$

Док. Назвавъ m величину (положительную), на которую a больше b, и n величину (положительную), на которую c меньше d, мы предположенie можемъ выразить равенствами:

$$a \quad b+m,$$
$$c-d-n,$$
$$\underline{\hspace{5cm}}$$
$$a \quad -c-b-d+m+n$$ Вычитая второе равенство изъ перваго [39], мы по теоремѣ VII получаемъ:

Такъ мы видимъ, что $a-c$ на $m+n$ больше $b-d$, что, слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ справедливо утвержденie, что

$$a-c>b-d.$$

Примѣчанie.

Если мы, предполагая m и n положительными величинами, смыслъ неравенствъ

$$a>b$$
$$c>d$$

выразимъ равенствами

$$a=b+m$$
$$c-n=d$$

и вычтемъ второе изъ нихъ изъ перваго, то получаемъ равенство

$$a-c+n-b-d+m,$$

которое не позволяетъ сдѣлать никакого вывода относительно того, равны ли или не равны разности $a-c$ и $b-d$.

Слѣдовательно, нельзя дѣлать выводовъ чрезъ вычитаніе неравенствъ, въ которыхъ знаки неравенства одинаковые

§ 51. **Важная математическая теорема.** Теперь мы въ состояніи дополнить предложенія, приведенныя въ I главѣ, еще слѣдующею теоремою такого же, какъ тѣ предложенія, общаго характера:

VIII. **Теорема.** Если изъ трехъ величинъ первая больше второй, вторая больше третьей, то и подавно первая больше третьей.

Предп. $a>b$

$b>c$.

Утв. $a>c$

Док. Обозначивъ буквою m величину (положительную), на которую a больше b, и буквою n величину (положительную), на которую b больше c, мы предположеніе можемъ выразить равенствами:

$$a=b+m,$$
$$b=c+n.$$

Подставивъ теперь въ первое равенство $c+n$ вмѣсто b, мы получаемъ [III]:

$$a=c+n+m,$$

и видимъ такимъ образомъ, что a на $n+m$ больше c, такъ что дѣйствительно оказывается

$$a>c.$$

ГЛАВА IX.

Умноженіе относительныхъ чиселъ.

§ 52. **Расширеніе понятія объ умноженіи.** Ничто не препятствуетъ распространить опредѣленіе умноженія **3** на тотъ случай, когда въ суммѣ равныя слагаемыя суть относительныя числа, или же и 0.

Мы можемъ, напр., сказать, что

$$(+8)+(+8)+(+8)+(+8)+(+8)=5\,.\,(+8)=+40$$
$$(-9)+(-9)+(-9)+(-9)=4\,.\,(-9)=-36.$$

Но изъ этихъ примѣровъ мы видимъ, что имѣемъ пока только право умножать относительныя числа на абсолютныя.

Равнымъ образомъ мы должны считать пока только допустимымъ умноженіе 0 на абсолютное число, но недопустимымъ умноженіе на 0.

Но такое ограниченіе представляло бы много неудобствъ. Такъ, напр., выраженіе $(a-b)$ $(c-d)$ имѣло бы смыслъ и было бы допустимо въ составѣ выраженій только при условіи, что $a>b$, что всякій разъ слѣдовало бы оговаривать и принимать въ соображеніе при преобразованіяхъ выраженій.

Эти неудобства устраняются *расширенiемъ понятiя объ умноженiи, со* ***стоящимъ во введенiи умноженiя на относительное число и на*** **0** (ср § 28, гдѣ указано было на первое расширенiе понятiя объ умноженiи).

Изъ разсужденiй въ § 32 вытекаетъ, что умноженiе на положительное число должно быть введено въ слѣдующемъ смыслѣ:

Опредѣленiе. У м н о ж и т ь н а п о л о ж и т е л ь н о е ч и с л о **43**
з н а ч и т ъ у м н о ж и т ь н а а б с о л ю т н у ю в е л и ч и н у э т о г о ч и с л а

Чтобы было возможно практическое примѣненiе и не получилось противорѣчiй въ теорiи, умноженiе на отрицательное число и на 0, какъ оказывается, должны быть введены въ слѣдующемъ смыслѣ [1]):

Опредѣленiе. У м н о ж и т ь н а о т р и ц а т е л ь н о е ч и с л о **44**
з н а ч и т ъ у м н о ж и т ь н а а б с о л ю т н у ю в е л и ч и н у э т о г о ч и с л а и п е р е м ѣ н и т ь з н а к ъ в ъ п о л у ч е н н о м ъ р е з у л ь т а т ѣ.

Опредѣленiе. П р о и з в е д е н i е в с я к а г о ч и с л а н а 0 **45**
д о л ж н о с ч и т а т ь р а в н ы м ъ 0.

Какъ слѣдствiе изъ этого опредѣленiя и опредѣленiя 3 получается слѣдующее предложенiе, которымъ намъ впослѣдствiи придется часто пользоваться:

Слѣдствiе. П р о и з в е д е н i е м о ж е т ъ р а в н я т ь с я 0 **45a**
т о л ь к о, е с л и в ъ н е м ъ в с т р ѣ ч а е т с я с о м н о ж и т е л ь, р а в н ы й 0.

На основанiи опредѣленiй **43** и **44** мы имѣемъ:

$$(+3)\,.\,(+5)=+15$$
$$(+3)\,.\,(-5)=-15$$
$$(-3)\,.\,(+5)=-15$$
$$(-3)\,.\,(-5)=+15.$$

А изъ этихъ примѣровъ мы можемъ вывести такое правило:

---

[1]) Указанiя на то, въ какомъ смыслѣ должны быть произведены эти расширенiя понятiя объ умноженiи, могутъ быть получены слѣдующимъ образомъ.

Такъ же, какъ теорема **49**, можетъ быть доказанъ частный случай ея:

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$$

Это равенство имѣетъ всегда смыслъ только послѣ введенiя умноженiя на отрицательное число и на нуль. Въ тѣхъ частныхъ случаяхъ, когда a и d равны 0, и когда a и c равны 0, или когда $a=b$, и получаются упомянутыя указанiя. Въ названныхъ случаяхъ приведенное выше равенство превращается въ слѣдующiя два, соотвѣтствующiя опредѣленiю **44**:

$$(-b).(+c)=-bc,$$
$$(-b).(-d)=+bd,$$

и въ равенство

$$0\,(c-d)=ac-ad-ac+ad,$$

соотвѣтствующее опредѣленiю умноженiя на 0.

46 **Теорема.** *Отъ умноженія двухъ относительныхъ чиселъ съ одинаковыми знаками получается результатъ положительный, отъ умноженія двухъ относительныхъ чиселъ съ противоположными знаками получается результатъ отрицательный.*

Док. Всѣ случаи, которые могутъ встрѣтиться при умноженіи другъ на друга двухъ относительныхъ чиселъ, выражаютъ слѣдующія произведенія

$$(+a)(+b),\ (+a)(-b),\ (-a)(+b),\ (-a)(-b).$$

По опредѣленію 3 при умноженіи относительнаго числа на абсолютное должно всегда получиться произведеніе одинаковаго знака со множимымъ. Слѣдовательно, на основаніи опредѣленій **43** и **44**, должно быть:

$$(+a)(+b)=+ab,$$
$$(+a)(-b)=-ab,$$
$$(-a)(+b)=-ab,$$
$$(-a)(-b)=+ab.$$

А изъ этихъ равенствъ и видна справедливость утвержденія.

Слѣдствіе. Величина произведенія двухъ относительныхъ чиселъ не зависитъ отъ порядка сомножителей.

§ 53. **Примѣнимость относительныхъ множителей.** Что произведенное въ предыдущемъ параграфѣ расширеніе понятія объ умноженіи не дастъ противорѣчій въ теоріи, это докажетъ все послѣдующее. Что оно имѣетъ смыслъ и примѣнимо также при рѣшеніи практическихъ задачъ и вопросовъ, это пояснимъ слѣдующимъ примѣромъ:

X *O* *У*

Положимъ, что пѣшеходъ идетъ по дорогѣ *XУ* и находится въ данный моментъ въ точкѣ *O*. Пройденный имъ путь мы всякій разъ найдемъ, умноживъ скорость[1]), съ которой онъ идетъ, на время ходьбы.

1) Если онъ идетъ со скоростью $+5$ верстъ въ часъ вправо (по направленію отъ *X* къ *У*), то черезъ $+3$ часа онъ, очевидно, будетъ находиться на разстояніи $+15$ верстъ вправо отъ *O*.

Слѣдовательно, считая

$$(+3)(+5)=+15,$$

мы и въ самомъ дѣлѣ получаемъ вѣрный результатъ.

2) Если пѣшеходъ идетъ со скоростью -5 верстъ въ часъ вправо (т. е. въ часъ 5 верстъ влѣво), то черезъ $+3$ часа, какъ легко убѣдиться, онъ будетъ находиться на разстояніи -15 верстъ вправо (т. е. 15 верстъ влѣво) отъ *O*.

Слѣдовательно, считая

$$(+3)(-5)=-15,$$

[1]) Предполагается, что эта скорость во время ходьбы не увеличивается и не уменьшается, или что по крайней мѣрѣ средняя скорость остается одною и тою же.

мы въ самомъ дѣлѣ получаемъ результатъ, соотвѣтствующій дѣйствительности.

3) Если пѣшеходъ въ данный моментъ находится въ точкѣ O и идетъ со скоростью +5 верстъ въ часъ вправо, то черезъ 3 часа (т. е. 3 часа тому назадъ) онъ, очевидно, находился на разстояніи 15 верстъ вправо (т. е. 15 верстъ влѣво) отъ O.

Слѣдовательно, считая

$$(-3)(+5) = \quad 15,$$

мы также получаемъ результатъ, соотвѣтствующій дѣйствительности.

4) Если, наконецъ, пѣшеходъ въ данный моментъ находится въ точкѣ O и идетъ со скоростью —5 верстъ въ часъ вправо (т. е въ часъ 5 верстъ влѣво), то ясно, что черезъ —3 часа (т. е. 3 часа тому назадъ), онъ находился на разстояніи +15 верстъ вправо отъ O.

Слѣдовательно, считая

$$(-3)(\quad 5) = +15,$$

мы опять получаемъ результатъ, соотвѣтствующій дѣйствительности.

§ 54. Произведеніе болѣе чѣмъ двухъ относительныхъ сомножителей. Опредѣленія **43**, **44** и **45** не препятствуютъ тому, чтобы и болѣе чѣмъ два относительныя числа соединялись между собою знаками умноженія. Такъ, напр., не можетъ быть сомнѣнія, какія дѣйствія предписываются выраженіемъ

$$(+a)(\quad b)(\quad c)(\quad d),$$

какъ не можетъ быть сомнѣній и относительно того, что абсолютное значеніе результата предписанныхъ умноженій должно быть $abcd$, и что знакъ этого результата долженъ быть   . Ясно, что если бы мы измѣнили порядокъ сомножителей въ разсматриваемомъ произведеніи, то отъ этого не измѣнилось бы ни абсолютное значеніе этого произведенія ни знакъ его. И ясно, что такъ же бы это было и при всякомъ другомъ числѣ относительныхъ сомножителей.

Доказательства же теоремъ **11** и **13** останутся тѣми же, если сомножители, о которыхъ тамъ говорится, будутъ числа относительныя.

Изъ всего этого слѣдуетъ, что всѣ доказанныя уже теоремы (и, конечно, слѣдствія изъ нихъ) о порядкѣ умноженія чиселъ между собою и о порядкѣ перемноженія произведеній съ числами и между собою остаются въ силѣ и для относительныхъ чиселъ [1]).

Ради же удобства для случаевъ умноженія относительныхъ чиселъ между собою полезно запомнить слѣдующее правило:

Теорема. При четномъ числѣ отрицательныхъ **17**
сомножителей произведеніе положительно, при нечетномъ оно отрицательно.

[1]) Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что и для относительныхъ чиселъ остаются въ силѣ перемѣстительный и сочетательный законы умноженія.

Док. Изъ опредѣленія **43** слѣдуетъ, что сколько бы въ произведеніи ни прибавлялось положительныхъ сомножителей, они на знакъ результата умноженія вліять не могутъ. Съ каждымъ же новымъ отрицательнымъ сомножителемъ, по опредѣленію **44**, знакъ произведенія мѣняется. Если въ произведеніи нѣтъ ни одного отрицательнаго сомножителя, то оно положительно; если въ немъ одинъ отрицательный сомножитель, то оно отрицательно; если же ихъ два, то оно положительно; если ихъ три, то оно отрицательно и т. д., то есть, оно, и въ самомъ дѣлѣ, какъ утверждается, положительно при четномъ числѣ отрицательныхъ сомножителей, и отрицательно при нечетномъ числѣ послѣднихъ.

§ 55. **Первое расширеніе значенія буквъ.** Послѣ произведеннаго въ предыдущихъ параграфахъ расширенія понятія объ умноженіи мы распространили на относительныя числа понятія о всѣхъ дѣйствіяхъ, о которыхъ до сихъ поръ была рѣчь; и только показатель степени можетъ пока еще быть только числомъ натуральнаго ряда. Поэтому теперь ничто уже не препятствуетъ тому, чтобы (съ указаннымъ ограниченіемъ) отнынѣ каждая буква во всѣхъ выраженіяхъ могла означать и относительное число.

Не нарушаются даже и правила знаковъ (32, 39, 46, 47, 55 и т. д.), если буквы означаютъ относительныя числа.

Напр.,

$$(-a)(+b)=-ab$$

и въ томъ случаѣ, если буквы a и b означаютъ отрицательныя числа. И въ самомъ дѣлѣ, если мы для повѣрки сдѣлаемъ явными знаки этихъ чиселъ, полагая

$$a=-\alpha$$
$$b=-\beta,$$

то

$$(-a)(+b)=[-(-\alpha)][+(-\beta)]=(+\alpha)(-\beta)=-\alpha\beta$$

и

$$-ab=-(-\alpha)(-\beta)=-(+\alpha\beta)=-\alpha\beta,$$

изъ чего, по теоремѣ VI, слѣдуетъ, что и при названныхъ условіяхъ

$$(-a)(+b)=-ab.$$

Чтобы пояснить сказанное еще примѣромъ, докажемъ путемъ повѣрки, что

$$a-(b-c)=a-b+c$$

и въ томъ случаѣ, если a, b и c означаютъ какія-либо относительныя числа, напр., если

$$a=-\alpha$$
$$b=-\beta$$
$$c=+\gamma.$$

И въ самомъ дѣлѣ, при этихъ условіяхъ

$$a-(b-c)=(-\alpha)-[(-\beta)-(+\gamma)]=-\alpha-(-\beta-\gamma)=-\alpha+\beta+\gamma$$

и

$$a-b+c=(-\alpha)-(-\beta)+(+\gamma)=-\alpha+\beta+\gamma,$$

значить, и въ названномъ случаѣ, по теоремѣ VI, справедливо приведенное выше равенство.

§ 56. **Обозначеніе абсолютной величины буквы или выраженія.** Такъ какъ буквы и алгебраическія выраженія могутъ означать и относительныя числа, а часто приходится говорить объ абсолютныхъ значеніяхъ тѣхъ и другихъ, то для указанія такого значенія введено особое обозначеніе, состоящее въ томъ, что букву или выраженіе ставятъ между двумя вертикальными чертами. Такъ, напр.,

$$|a|$$

означаетъ абсолютную величину того числа, которое обозначено буквою a,

$$|a-b|,\quad |ax^2+bx+c|,$$
$$|-m^3-n^3|$$

означаютъ абсолютныя значенія разности $a-b$, трехчлена ax^2+bx+c и двучлена $-m^3-n^3$.

ГЛАВА X.

Умноженіе многочленовъ.

§ 57. **Умноженіе многочлена на одночленъ.**

Теорема. Многочленъ умножаютъ на какое-либо число, умножая каждый членъ его на это число (съ соблюденіемъ правила знаковъ 46)[1]. 48

Утв. $m(a-b-c+d)=ma-mb-mc+md$.

Док. I. Если $m>0$, то [3]

$$m(a-b-c+d)=\left.\begin{array}{r} a-b-c+d \\ +a-b-c+d \\ +a-b-c+d \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ +a-b-c+d \end{array}\right\}\ m\ \text{строкъ}$$
$$=ma-mb-mc+md.$$

II. Если $m=0$, то [45]

$m(a-b-c+d)=0.(a-b-c+d)=0$;

$ma-mb-mc+md=0.a-0.b-0.c+0.d=+0-0-0+0=0$.

Слѣд., по теор. VI:

$$m(a-b-c+d)=ma-mb-mc+md.$$

---

[1] Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что и для относительныхъ чиселъ остается въ силѣ распредѣлительный законъ умноженія.

III. Если $m<0$, то можно сдѣлать явнымъ, что m отрицательное число, написавъ $-\mu$ вмѣсто m. Въ такомъ случаѣ будетъ:

$m(a-b-c+d)=-\mu(a-b-c+d)$
$=-(\mu a-\mu b-\mu c+\mu d)$ [по этой **48** теоремѣ, доказанной уже для I случая]
$=-\mu a+\mu b+\mu c-\mu d$ [по теор. **41**];

$ma-mb-mc+md=(-\mu)a-(-\mu)b-(-\mu)c+(-\mu)d=-\mu a+\mu b+\mu c-\mu d$ } Слѣд., по теор. VI:

$$m(a-b-c+d)=ma-mb-mc+md.$$

Совершенно такимъ же образомъ слѣдовало бы теорему доказывать, сколько бы ни было членовъ въ многочленѣ и какіе бы передъ ними ни стояли знаки.

Слѣдовательно, справедливость теоремы должно считать доказанною для всѣхъ родовъ чиселъ, о которыхъ до сихъ поръ была рѣчь. (Продолженіе доказательства въ §§ 110, 233 и 287).

Примѣры.

1) $8(3a^3b-5a^2bc-abc^2+5)=24a^3b-40a^2bc-8abc^2+40.$
2) $(5mp^2-3m^2p-2m^3)\cdot 2lm^2=10lm^3p^2-6lm^4p-4lm^5.$
3) $-xy^2z^3(x^3-6y^3+9z^3)=-x^4y^2z^3+6xy^5z^3-9xy^2z^6.$
4) $[a^3+2a^2(b^2-c)-3a(b^2-c)^2-4(b^2-c)^3]\cdot 3a(b^2-c)=$
$3a^4(b^2-c)+6a^3(b^2-c)^2-9a^2(b^2-c)^3-12a(b^2-c)^4.$

По теоремѣ V изъ теоремы **48** получается:

48ª **Слѣдствіе.** Общій всѣмъ членамъ многочлена множитель можетъ быть вынесенъ множителемъ за скобки.

Напр.,

$$5a^2bc-5a^2bd+5a^2bx^2=5a^2b(c-d+x^2),$$
$$18a^2b^2+30a^2b^3-42ab^4=6ab^2(3a^2+5ab-7b^2)$$

§ 58. **Умноженіе многочлена на многочленъ.**

49 **Теорема.** Многочленъ умножаютъ на многочленъ, умножая каждый членъ одного изъ нихъ на каждый членъ другого (съ соблюденіемъ правила знаковъ — **46**).

Утв. $(a-b)(p-q-r)=ap-bp-aq+bq-ar+br.$

Док. По теоремѣ **46** должно быть:

$$(a-b)(p-q-r)=(a-b)p-(a-b)q-(a-b)r.$$

Но
$$(a-b)p=ap-bp$$
$$(a-b)q=aq-bq$$
$$(a-b)r=ar-br.$$

Слѣдовательно,

$(a-b)(p-q-r)=ap-bp-(aq-bq)-(ar-br)=ap-bp-aq+bq-ar+br$ [по теор. **41**],

Такимъ же образомъ теорема доказывается и для многочленовъ съ бóльшимъ числомъ членовъ

Примѣръ.

$$(a^3-5b^2c+4)(2b^2c-a-3)=2a^3b^2c-a^4-3a^3-10b^4c^2+5ab^2c+15b^2c+8b^2c-4a-12=2a^3b^2c-a^4-3a^3-10b^4c^2+5ab^2c+23b^2c-4a-12.$$

Примѣчаніе.

По правиламъ **48** и **49** раскрываются скобки, передъ которыми или послѣ которыхъ стоитъ знакъ умноженія (ср. правила **40** и **41**).

§ 59. **Понятіе о расположенныхъ многочленахъ.** Сомножителей произведенія и члены многочлена удобно располагать въ алфавитномъ порядкѣ. Члены же многочлена обыкновенно еще располагаютъ такъ, чтобы показатели которой-либо изъ буквъ, встрѣчающихся въ нихъ, отъ члена къ члену все уменьшались или все увеличивались. Про *многочленъ*, написанный въ такомъ порядкѣ, говорятъ, что онъ *расположенъ по убывающимъ или по возрастающимъ степенямъ* этой *буквы*; и букву эту называютъ *главною*. Членъ, содержащій высшую степень ея, и самъ называется *высшимъ*.

Степенью многочлена относительно главной буквы называется высшая степень, въ которой она въ немъ встрѣчается.

Такъ, напр., многочленъ

$$3ax^5+bx^4-2cx^3-6dx^2+ex-f+g$$

5-й степени относительно x и расположенъ по убывающимъ (или нисходящимъ) степенямъ этой буквы; многочленъ

$$7-2y+9y^3-y^4+3y^6$$

6-й степени относительно y и расположенъ по возрастающимъ (или восходящимъ) степенямъ этой буквы; многочленъ

$$a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$

расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы a и по возрастающимъ степенямъ буквы b, притомъ онъ 5-й степени какъ относительно той, такъ и относительно другой изъ нихъ

Въ многочленѣ

$$7u^2x^5-8u^4x^4-5u^3x^3+ux^2-2x,$$

расположенномъ по нисходящимъ степенямъ буквы x, можно было бы за главную букву взять также u и расположить его по восходящимъ или нисходящимъ степенямъ этой буквы, напр., такъ:

$$-8x^4u^4-5x^3u^3+7x^5u^2+x^2u-2x$$

Онъ 5-й степени относительно x и 4-й относительно u.

§ 60. **Умноженіе расположенныхъ многочленовъ** удобно производить въ такомъ порядкѣ, чтобы подобные члены писались сразу одинъ подъ другимъ, какъ это указывается слѣдующими примѣрами:

Примѣръ 1.

$$
\begin{array}{l}
3a^3-5a^2b-2ab^2+b^3 \quad \ldots\ldots \text{(множимое)} \\
2a^2-6ab+3b^2 \quad \ldots\ldots \text{(множитель)} \\
\hline
6a^5-10a^4b-4a^3b^2+2a^2b^3 \quad \ldots \text{умноженіе на } 2a^2 \\
\quad -18a^4b+30a^3b^2+12a^2b^3-6ab^4 \quad \ldots \text{умноженіе на } -6ab \\
\quad\quad +9a^3b^2-15a^2b^3-6ab^4+3b^5 \quad \ldots \text{умноженіе на } +3b^2 \\
\hline
6a^5-28a^4b+35a^3b^2-a^2b^3-12ab^4+3b^5 \quad \ldots\ldots \text{(произведеніе)}.
\end{array}
$$

Въ этомъ примѣрѣ оба сомножителя расположены по убывающимъ степенямъ буквы a и по возрастающимъ степенямъ буквы b. Отвѣтъ получился расположеннымъ такимъ же образомъ.

Примѣръ 2.

$$
\begin{array}{l}
7-m+3m^3 \quad \ldots \text{(множимое)} \\
2-5m^2-m^4 \quad \ldots \text{(множитель)} \\
\hline
14-2m \quad » \quad +6m^3 \\
\quad -35m^2+5m^3 \quad » \quad -15m^5 \\
\quad\quad -7m^4+m^5-3m^7 \\
\hline
14-2m-35m^2+11m^3-7m^4-14m^5-3m^7
\end{array}
$$

Въ этомъ примѣрѣ оба сомножителя и получившійся результатъ умноженія расположены по возрастающимъ степенямъ буквы m.

Примѣръ 3.

$$
\begin{array}{l}
16x^{12}y^8-8x^9y^6z+4x^6y^4z^2-2x^3y^2z^3+z^4 \quad \ldots\ldots \text{(множимое)} \\
\quad 2x^3y^2+z \quad \ldots\ldots \text{(множитель)} \\
\hline
32x^{15}y^{10}-16x^{12}y^8z+8x^9y^6z^2-4x^6y^4z^3+2x^3y^2z^4 \\
\quad +16x^{12}y^8z-8x^9y^6z^2+4x^6y^4z^3-2x^3y^2z^4+z^5 \\
\hline
32x^{15}y^{10} \qquad\qquad +z^5.
\end{array}
$$

§ 61. **Число членовъ въ произведеніи двухъ многочленовъ.** Изъ примѣровъ въ предыдущемъ параграфѣ видно, что [теор. **16**] при умноженіи другъ на друга 2 многочленовъ въ произведеніи членъ съ высшей степенью главной буквы получается отъ перемноженія членовъ съ высшей степенью ея въ множимомъ и множителѣ, а членъ съ низшей степенью ея отъ умноженія членовъ съ низшей степенью ея въ перемножаемыхъ многочленахъ. Эти высшій и низшій члены произведенія не имѣютъ подобныхъ себѣ. Съ остальными же можетъ оказаться возможнымъ приведеніе, при чемъ они могутъ даже всѣ взаимно уничтожиться (примѣръ 3).

Если въ умножаемыхъ другъ на друга двухъ многочленахъ въ одномъ m членовъ, а въ другомъ n, и въ произведеніи подобныхъ членовъ не окажется, то въ немъ всѣхъ членовъ должно быть mn, такъ какъ всѣ m членовъ перваго многочлена умножаются сначала на 1-й членъ второго многочлена, затѣмъ на 2-й, и т. д., наконецъ, на n-вый. Слѣдовательно, вообще ихъ въ произведеніи должно быть не болѣе, чѣмъ mn, и не менѣе двухъ.

§ 62. **Важные частные случаи умноженія многочленовъ.** Для сокращенія вычисленій и преобразованій полезно запомнить результаты нѣсколькихъ частныхъ случаевъ умноженія многочленовъ другъ на друга

Теорема. Квадратъ суммы двухъ чиселъ равняется квадрату перваго числа, плюсъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа. **50**

Утв. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

Док. $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+AB+B^2=A^2+2AB+B^2$.

Теорема. Квадратъ разности двухъ чиселъ равняется квадрату перваго числа, минусъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа. **51**

Утв. $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

Док. $(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-AB+B^2=A^2-2AB+B^2$.

Теорема. Произведеніе суммы двухъ чиселъ на ихъ разность равняется разности ихъ квадратовъ. **52**

Утв. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

Док. $(A+B)(A-B)=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$.

Отсюда мы, по теоремѣ V, заключаемъ:

Слѣдствіе. Разность квадратовъ двухъ чиселъ равняется произведенію суммы этихъ чиселъ на ихъ разность. **52ª**

Упражненія:

Доказать, что

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

и

$$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$$

и формулировать эти теоремы.

Примѣры.

1) $(mn+3)^2=m^2+6mn+9$.
2) $(a^3b-5c^2)=(a^3b)^2-2\cdot a^3b\cdot 5c^2+(5c^2)^2=a^6b^2-10a^3bc^2+25c^4$.
3) $(1+7x^5)(1-7x^5)=1^2-(7x^5)^2=1-49x^{10}$.
4) $51\cdot 49=(50+1)(50-1)=50^2-1^2=2500-1=2499$.
5) $36p^6-121=(6p^3)^2-11^2=(6p^3+11)(6p^3-11)$.

§ 63. **Умноженіе неравенствъ.**

Теорема 1. Если неравныя величины умножимъ на равныя положительныя (или абсолютныя), то тамъ получится больше, гдѣ было больше.

Предп. $a>b$

$c=d$, при чемъ $c>0$ (слѣд. и $d>0$).

Утв. $ac>bd$.

Док. Чтобы выразить первое предположенie равенствомъ, положимъ, что a больше b на нѣкоторую величину (положительную) m. Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$a = b + m.$$

По предположенiю $c > d$

$$\overline{} \quad \text{Слѣд., по теор. VII:}$$

$$ac = bd + dm$$

А такъ какъ dm положительная величина, то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ [§ 48], что и въ самомъ дѣлѣ справедливо утвержденie, что

$$ac > bd.$$

Слѣдствie 1. Произведенie абсолютныхъ чиселъ измѣняется въ томъ же смыслѣ, въ которомъ измѣняется одинъ изъ сомножителей его.

Изъ только-что доказанной теоремы, на основанiи опредѣленiя умноженiя на отрицательное число и § 35, получается еще:

Слѣдствie 2. Если неравныя величины умножимъ на равныя отрицательныя, то тамъ получится больше, гдѣ было меньше.

Теорема 2. Тамъ получится больше, гдѣ была бо́льшая положительная (или абсолютная) величина и гдѣ притомъ на большее положительное (или абсолютное) число умножили [1])

Предп. $a > b$

$c > d$,

при чемъ a, b, c и d положительныя или абсолютныя величины.

Утв. $ac > bd$.

Док. Чтобы выразить предположенie при помощи равенствъ, положимъ, что a на m больше b и c на n больше d.

Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$a = b + m$$

$$c = d + n$$

$$\overline{} \quad \text{Умноживъ другъ на друга эти равенства, мы, по теор. VII, имѣемъ:}$$

$$ac = bd + bn + dm + mn.$$

А такъ какъ въ выраженiи $bn + dm + mn$ всѣ буквы означаютъ положительныя (или абсолютныя) числа, то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что и въ самомъ дѣлѣ справедливо утвержденie, что

$$ac > bd$$

Примѣчанie.

Если части неравенства всѣ отрицательны, то изъ этихъ неравенствъ слѣдуютъ, какъ указано было въ § 35, неравенства, которыхъ части всѣ положительны. Поэтому и изъ перваго рода неравенствъ можно чрезъ умноженie дѣлать выводы въ томъ случаѣ, когда знаки неравенствъ у нихъ оди-

---

[1]) См. § 32.

наковые, пользуясь при этомъ *второю* изъ теоремъ, доказанныхъ въ этомъ параграфѣ. Но если въ неравенствахъ съ частями одинаковаго знака знаки неравенства неодинаковые, то нельзя дѣлать какихъ-либо заключенiй чрезъ умноженiе такихъ неравенствъ по такой же причинѣ, по какой изъ нихъ нельзя дѣлать выводовъ черезъ сложенiе (§ 49).

Что же касается неравенствъ, части которыхъ не всѣ одинаковаго знака, то можно только знать, что если при умноженiи ихъ получаются произведенiя противоположныхъ знаковъ, то положительное произведенiе, конечно, будетъ больше чѣмъ отрицательное.

ГЛАВА XI.

Дѣленiе.

Введенiе дробныхъ чиселъ.

§ 64. **Происхожденiе дѣленiя.** Подобно тому, какъ отысканiе слагаемаго по даннымъ суммѣ и другому слагаемому приводитъ къ новому дѣйствiю вычитанiю, такъ задача, состоящая въ отысканiи сомножителя по даннымъ произведенiю и другому сомножителю приводитъ къ новому дѣйствiю—дѣленiю

Опредѣленiе. Раздѣлить число a на число b значитъ найти такое число, которое, будучи перемножено съ b, дастъ a.  58

Задачу «раздѣлить a на b» пишутъ такъ:

$$a : b \text{ или } \frac{a}{b} \quad [1]).$$

Число, которое требуется раздѣлить (a), называется дѣлимымъ, число, на которое дѣлятъ (b), называется дѣлителемъ. Результатъ дѣленiя называется частнымъ. Поэтому и **выраженiе $a : b$ или $\frac{a}{b}$ называется частнымъ.**

Опредѣленiе. $a : b$ или $\frac{a}{b}$ означаетъ такое число, которое, будучи перемножено съ b, даетъ a. 58а

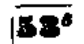
Это опредѣленiе частнаго выражается слѣдующимъ равенствомъ:

Опредѣленiе: 58б

$$(a : b) . b = a \text{ или } \frac{a}{b} . b = a.$$

---

[1]) Горизонтальная черта въ качествѣ знака дѣленiя встрѣчается впервые въ рукописяхъ XV столѣтiя. Лейбницъ замѣняетъ черту двоеточiемъ въ 1684 году.


Слѣдствіе:

$$(a \,.\, b) : b = a \text{ или } \frac{a \,.\, b}{b} = a,$$

такъ какъ по опредѣленію частнаго $\frac{ab}{b}$ должно означать число, которое, будучи умножено на b, даетъ ab, но a и есть число такого свойства.

Изъ послѣднихъ равенствъ мы видимъ, что если мы сначала a перемножимъ съ b, а полученное произведеніе раздѣлимъ на b, или если мы сначала a раздѣлимъ на b, а полученное частное перемножимъ съ b, то эти два дѣйствія взаимно уничтожаются, т. е., получается число a.

Дѣленіе называется дѣйствіемъ *обратнымъ* умноженію.

Умноженіе и дѣленіе составляютъ дѣйствія второго разряда или **вторую ступень дѣйствій.**

§ 65. **Дѣленіе числа самого на себя и на 1.** Вмѣстѣ съ введеніемъ умноженія на 1 (см. опредѣленіе **3ª** въ концѣ § 28) должно считаться введеннымъ и дѣленіе всякаго числа самого на себя и на 1. Согласно упомянутому опредѣленію и опредѣленію **53** должно быть:

$$\frac{a}{1} = a,$$

$$\frac{a}{a} = 1.$$

Упражненіе.

Формулировать заключающіяся въ послѣднихъ двухъ равенствахъ предложенія.

§ 66. **Введеніе дробей.** Какъ для того, чтобы разность $a-b$ имѣла всегда смыслъ, понадобилось расширеніе понятія о числѣ, такъ и частное $a:b$ (или $\frac{a}{b}$) имѣетъ всегда смыслъ только по введеніи новыхъ чиселъ, называемыхъ дробями или дробными числами.

Введеніе отрицательныхъ чиселъ въ этой книгѣ разсмотрѣно было особенно подробно потому, что въ обыкновенной ариѳметикѣ (не общей) ихъ разсматривать не принято. Дроби же тамъ разсматриваются подробно, и всякому приступающему къ изученію алгебры хорошо знакомы понятіе о дробяхъ и примѣнимость ихъ. Поэтому здѣсь нѣтъ надобности подробно развивать первое и доказывать послѣднюю, и можетъ быть прямо приступлено къ тѣмъ теоретическимъ разсужденіямъ о нихъ, которыя необходимы для полноты системы общей ариѳметики.

Опредѣленіе дроби могло бы быть дано въ такой формѣ:

Если въ натуральномъ рядѣ чиселъ не существуетъ числа, которое, будучи перемножено съ числомъ натуральнаго ряда b, даетъ число натуральнаго ряда a, то мы создаемъ число такого

свойства, обозначаемъ его символомъ $\frac{a}{b}$ и называемъ его дробью.

Но обыкновенно объясняютъ происхожденіе дробей, исходя изъ того свойства величинъ, предполагаемаго всякому извѣстнымъ, что ихъ можно дѣлить на равныя части и опредѣляютъ этотъ новый родъ чиселъ такъ:

Опредѣленіе. Дробь $\frac{a}{b}$ есть число, выражающее a изъ b равныхъ частей одной единицы[1]) или (слѣдствіе:) дробь $\frac{a}{b}$ есть число, выражающее одну изъ b равныхъ частей a единицъ[2]). 54

Въ дроби $\frac{a}{b}$ число a называется числителемъ, число b знаменателемъ.

Введеніе дробныхъ чиселъ составляетъ **второе расширеніе понятія о числѣ.**

Въ противоположность дробямъ числа не дробныя называются *цѣлыми.*

Частное $\frac{a}{b}$, означающее цѣлое число, называется также ненастоящею дробью.

Ненастоящія дроби суть, напр., $\frac{5}{5}, \frac{12}{4}, \frac{115}{23}$.

Ни понятіе о дроби, ни понятіе объ относительныхъ числахъ не препятствуютъ введенію и относительныхъ дробныхъ чиселъ. Введеніе ихъ должно даже считать необходимымъ, такъ какъ безъ этого не достигалась бы та цѣль, ради которой вообще производятся расширенія понятія о числѣ.

§ 67. **Алгебраическая дробь.**

Опредѣленіе. Алгебраическою дробью называется буквенное частное независимо отъ того, какое число оно означаетъ. 

Алгебраическія дроби суть, напр.,

$$\frac{a}{b},\quad \frac{m+2n}{2m^2-3n^2},\quad \frac{5a^4b^3c^2}{\frac{2}{[illegible]}+ac-b}.$$

[1]) Что при этомъ a можетъ быть больше b, это подробно разсматривается и разъясняется въ обыкновенной ариѳметикѣ.

[2]) Расширеніе понятія о числѣ введеніемъ дробныхъ чиселъ происходитъ уже въ древности. Извѣстно, что египтяне уже около 1700 года до Р. Х. имѣли представленіе о дробяхъ. И древніе греки и римляне умѣли обращаться съ ними. Теперешнее начертаніе дробей впервые встрѣчается въ началѣ XIII-вѣка и происходитъ отъ древне-индійскаго изображенія ихъ, которое стало извѣстнымъ въ Европѣ чрезъ арабовъ и въ которомъ числитель писался надъ знаменателемъ безъ черты.

Послѣдовательнымъ образомъ выраженія, не имѣющія вида буквеннаго частнаго, называются *цѣлыми алгебраическими выраженіями* Таковы, напр., дѣлимыя (или числители) и дѣлители (или знаменатели) въ приведенныхъ выше примѣрахъ.

Иногда обозначенія «цѣлый» и «дробный» употребляются примѣнительно къ одной только буквѣ въ выраженіи. Такъ, напр., многочленъ

$$\frac{a}{b}x^3 + \frac{b}{c}x^2 - x - \frac{a-c}{b^2}$$

называется *цѣлымъ относительно* x, хотя въ немъ и есть алгебраическія дроби, такъ какъ въ этихъ послѣднихъ не встрѣчается упомянутой буквы.

§ 68. **Сравненіе величины дробей.** По опредѣленію 54 мы дробь $\frac{a}{b}$ должны себѣ представлять какъ число, состоящее изъ a новыхъ единицъ, называемыхъ *долями*, изъ которыхъ каждая равна $\frac{1}{b}$, то есть, b-ой части единицы (числа 1). Изъ такого опредѣленія слѣдуетъ, что изъ двухъ дробей 1) съ одинаковыми знаменателями та должна считаться большею, у которой числитель больше, и что дроби съ одинаковыми знаменателями равны, если и числители ихъ равны. Если же знаменатели сравниваемыхъ дробей не одинаковы, то эти дроби предварительно преобразовываются такъ, чтобы знаменатели ихъ стали равными (см. § 105).

Если дробь меньше 1, то она называется *правильною*, если она больше 1, то—*неправильною*. Неправильная дробь можетъ быть представлена въ видѣ суммы цѣлаго числа и правильной дроби, при чемъ между этими двумя слагаемыми знакъ + обыкновенно не пишется. Написанная такимъ образомъ сумма цѣлаго числа и дроби называется *смѣшаннымъ числомъ* 2).

Сравненіе неправильныхъ дробей между собою и съ цѣлыми числами легче производить, превративъ ихъ въ смѣшанныя числа (исключивъ цѣлыя).

Послѣ опредѣленія смысла и способа сравненія абсолютныхъ дробей между собою и съ абсолютными цѣлыми числами правила, установленныя въ § 34 для сравненія относительныхъ чиселъ, должно послѣдовательнымъ образомъ считать относящимися и къ относительнымъ дробямъ 3).

---

1) Сказанное относится ко всякимъ дробямъ, и къ ненастоящимъ.

2) Опредѣленіе суммы дробей и суммы цѣлаго числа и дроби дается позднѣе правиломъ 56.

3) Содержаніемъ § 68 далеко не исчерпывается все, что можетъ быть сказано о сравненіи величины дробей. Но все это должно предполагаться извѣстнымъ. Главное же назначеніе этого параграфа заключается въ сохраненіи строгости плана, по которому строится зданіе общей ариѳметики и который требуетъ, чтобы послѣ всякаго введенія новыхъ чиселъ указывалось, въ какомъ смыслѣ къ нимъ должно примѣнять понятіе «больше», «равняется», «меньше».

§ 69. **Дѣленіе относительныхъ чиселъ.** На основаніи опредѣленія дѣленія **(53)** и правила **46** можетъ быть произведено каждое дѣленіе относительныхъ чиселъ, какъ показываютъ слѣдующіе примѣры:

$\frac{+20}{+5}=+4$, такъ какъ $+4$ есть число, которое, будучи умножено на $+5$, даетъ $+20$.

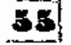
$\frac{+20}{-5}=-4$, такъ какъ -4 есть число, которое, будучи умножено на -5, даетъ $+20$.

И такимъ же образомъ объясняется, что должно быть:

$$\frac{-20}{+5}=-4,$$

$$\frac{-20}{-5}=+4.$$

Изъ этихъ примѣровъ видно, что при дѣленіи относительныхъ чиселъ дѣлятся другъ на друга ихъ абсолютныя величины, знакъ же частнаго опредѣляется слѣдующимъ **правиломъ:**

Теорема. При дѣленіи двухъ относительныхъ чиселъ съ одинаковыми знаками получается результатъ положительный, при дѣленіи двухъ чиселъ съ противоположными знаками получается результатъ отрицательный  **55**

Док. Всѣ случаи, которые могутъ встрѣтиться при дѣленіи двухъ относительныхъ чиселъ другъ на друга, выражаютъ слѣдующія частныя:

$$\frac{+a}{+b},\ \frac{+a}{-b},\ \frac{-a}{+b},\ \frac{-a}{-b}.$$

По опредѣленію дѣленія **[53]** должно быть:

$$\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b},$$

такъ какъ дѣйствительно

$$\left(\frac{+a}{+b}\right).(+b)=+\left(\frac{a}{b}.b\right)=+a.$$

При помощи такой же повѣрки легко убѣдиться, что должно быть:

$$\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}.$$

А изъ этихъ равенствъ и видна справедливость утвержденія.

Примѣчаніе.

Случаи, когда дѣлимое или дѣлитель или они оба равны 0, будутъ разсмотрѣны позднѣе (въ главѣ XVIII).

ГЛАВА XII.

Нѣкоторыя свойства частнаго.

Дѣленіе многочлена на одночленъ.

§ 70. **Сложеніе и вычитаніе дробей.** Какъ послѣ введенія относительныхъ чиселъ о дѣйствіяхъ надъ ними могла быть рѣчь только послѣ соотвѣтствующихъ расширеній понятій о прямыхъ дѣйствіяхъ (опредѣленія обратныхъ дѣйствій остаются для всѣхъ родовъ чиселъ одни и тѣ же), такъ и послѣ введенія дробей дѣйствія надъ ними можно начать только послѣ опредѣленій, что должно понимать подъ сложеніемъ дробей, что подъ умноженіемъ на дробь и т. д. Поэтому мы и теоремамъ, касающимся дѣйствій надъ частными должны предпосылать соотвѣтствующія опредѣленія.

Начиная со сложенія, мы не имѣемъ надобности говорить о примѣнимости этого дѣйствія надъ дробями, такъ какъ она всякому извѣстна и въ достаточной степени разъясняется въ обыкновенной ариѳметикѣ. Все послѣдующее послужитъ доказательствомъ, что и въ теоріи введеніе сложенія дробей никакихъ противорѣчій не создаетъ. Опредѣлено же можетъ быть такое дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

1ª **Опредѣленіе.** Сложить сколько-либо дробей (абсолютныхъ) или (абсолютныхъ) цѣлыхъ чиселъ и дробей значитъ, изобразивъ ихъ состоящими изъ одинаковыхъ долей[1], сложить эти доли.

Вмѣстѣ съ введеніемъ сложенія абсолютныхъ дробей должно, согласно опредѣленію 17, считать введеннымъ и вычитаніе ихъ; и, наконецъ, ничто не препятствуетъ распространенію и на дроби опредѣленій 27^1 и 27^2.

Такъ какъ сложеніе долей, о которомъ говорится въ данномъ нами опредѣленіи сложенія дробей, ничѣмъ не отличается отъ сложенія любыхъ другихъ единицъ, то изъ этого опредѣленія и всего сказаннаго здѣсь слѣдуетъ, что всѣ доказанныя до сихъ поръ теоремы о сложеніи и вычитаніи остаются въ силѣ и для дробей[2]).

---

[1]) Изъ обыкновенной ариѳметики извѣстно и ниже будетъ въ общемъ видѣ доказано, что такое преобразованіе дробей и цѣлыхъ чиселъ возможно. Пока же мы только и разсматриваемъ сложеніе и вычитаніе дробей, имѣющихъ уже одинаковыхъ знаменателей.

[2]) Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что и для дробей остаются въ силѣ перемѣстительный и сочетательный законы сложенія.

Разсматриваемыя въ этой главѣ теоремы относятся къ частнымъ вообще, слѣдовательно, и къ тѣмъ случаямъ, когда они означаютъ дроби. Поэтому и по той еще причинѣ, что буквенныя частныя обыкновенно называются алгебраическими дробями и вообще часто частныя дробями, мы въ этихъ предложеніяхъ будемъ прибавлять въ скобкахъ выраженія, соотвѣтствующія этимъ названіямъ.

Теорема. Частныя (*дроби*) съ одинаковыми дѣлителями (*знаменателями*) слагаютъ и вычитаютъ, слагая и вычитая ихъ дѣлимыя (*числителей*), причемъ дѣлитель (*знаменатель*) остается тотъ же. **56**

Утв. $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}=\frac{a+b-c}{n}$.

Док. Если мы многочленъ $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}$ умножимъ на n по правилу **48**, доказательство котораго остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, если члены многочлена будутъ дроби, то получаемъ:

$$n\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}\right)=n.\frac{a}{n}+n.\frac{b}{n}-n.\frac{c}{n}=a+b-c \; [53^{б}]$$

Такимъ образомъ оказывается, что $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}$ есть число, которое, будучи умножено на n, даетъ $a+b-c$. Но такое число, по опредѣленію **53б**, слѣдуетъ писать $\frac{a+b-c}{n}$.

Слѣдовательно, дѣйствительно

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}=\frac{a+b-c}{n}.$$

Совершенно такъ же теорема доказывается, сколько бы частныхъ съ одинаковыми дѣлителями ни было предписано сложить и вычесть.

Заключая, по теоремѣ V, изъ послѣдняго равенства, что должно быть также:

$$\frac{a+b-c}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n},$$

мы получаемъ:

Слѣдствіе. Многочленъ дѣлятъ на какое-либо число, дѣля каждый членъ его на это число. **57**

§ 71. **Умноженіе частнаго и дѣленіе произведенія.**

Теорема. Частное (*дробь*) умножаютъ на какое-либо число, умножая его дѣлимое (*ея числителя*) на это число. **58**





Утв. $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$.

Док. I. Если n цѣлое положительное число, то

$$n \cdot \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b}}_{n \text{ слагаемыхъ}}$$

$$= \frac{a + a + a + \ \ldots \ + a}{b} \text{ [по теор. } \mathbf{56}]$$

$$= \frac{n \cdot a}{b}.$$

II. Если $n = 0$, то

$$n \cdot \frac{a}{b} = 0 \cdot \frac{a}{b} = 0 \text{ [по опред. } \mathbf{45}];$$

$$\frac{n \cdot a}{b} = \frac{0 \cdot a}{b} = \frac{0}{b} = 0 \text{ [по опред. } \mathbf{53}].$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}.$$

III. Если n цѣлое отрицательное число, то знакъ его сдѣлается явнымъ, если мы напишемъ $-\nu$ вмѣсто n. Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$n \cdot \frac{a}{b} = -\nu \cdot \frac{a}{b} = -\frac{\nu a}{b}$$ [по опред. **44** и по этой **58** теор., доказанной уже для I случая];

$$\frac{n \cdot a}{b} = \frac{-\nu \cdot a}{b} = -\frac{\nu a}{b} \text{ [по теор. } \mathbf{55}].$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}.$$

По первоначальному опредѣленію умноженія [**3**] и произведеннымъ затѣмъ расширеніямъ понятія объ этомъ дѣйствіи [**3**[a] (въ § 28), **43**, **44**] множимымъ можетъ быть всякое число, въ томъ числѣ и дробь. Но возможность дробнаго множителя и справедливость теоремы и для этого случая могутъ быть разсмотрѣны только впослѣдствіи (§ 108).

Заключая изъ доказаннаго предложенія, по теоремѣ V, что

$$\frac{n \cdot a}{b} = n \cdot \frac{a}{b},$$

мы получаемъ:

59 **Слѣдствіе.** **Если одного сомножителя раздѣлимъ на какое-либо число, то и все произведеніе будетъ раздѣлено на это число.**

§ 72. Дѣленіе частнаго.

Теорема. Частное (*дробь*) дѣлятъ на какое-либо число, умножая его дѣлителя (*ея знаменателя*) на это число. **60**

Утв. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

Док. Обозначимъ $\frac{a}{b} : c$ буквою x. Въ такомъ случаѣ равенство

$\frac{a}{b} : c = x$ выражаетъ, что x есть (какъ и $\frac{a}{b} : c$) число, которое, будучи умножено на c, даетъ $\frac{a}{b}$. Но это можетъ быть выражено и такъ:

$\frac{a}{b} = cx$. Отсюда же мы видимъ, что cx есть (какъ и $\frac{a}{b}$) число, которое, будучи умножено на b, даетъ a. Но это можно выразить и такъ.

$a = bcx$ Отсюда мы видимъ, что x есть число, которое, будучи умножено на bc, даетъ a. Но такое число пишется $\frac{a}{bc}$. Слѣд.,

$\frac{a}{bc} = x$. Повторяя первое равенство:

$\frac{a}{b} : c = x$.

мы изъ послѣднихъ двухъ равенствъ, по теор. VI, заключаемъ, что должно быть:

$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$,

вмѣсто чего можно было бы также писать:

$$(a : b) : c = a : (bc).$$

§ 73 Другая возможность дѣленія частнаго.

Теорема. Чтобы раздѣлить частное (*дробь*) на какое-либо число, можно также раздѣлить его дѣлимое (*ея числителя*) на это число. **61**

Утв. $\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}$.

Док. По теоремѣ **60**

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc},$$

$$\frac{a : c}{b} = \frac{a}{c} : b = \frac{a}{bc}$$ по той же теоремѣ.

Слѣд., по теор. VI:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b}.$$

§ 74. **Послѣдовательное дѣленіе на нѣсколько чиселъ и дѣленіе на произведеніе.**

62 **Теорема.** Если нужно раздѣлить на число, результатъ на другое число, этотъ результатъ на третье и т. д., то вмѣсто этого можно раздѣлить на произведеніе этихъ чиселъ.

Утв. $a : b : c : d : e = a : (bcde)$.

Док. Примѣняя одинъ разъ за другимъ теорему **60**, мы имѣемъ:

$$a : b : c : d : e = \frac{a}{bc} : d : e = \frac{a}{bcd} : e = \frac{a}{bcde} = a : (bcde).$$

Такимъ же образомъ теорема доказывается для всякаго числа дѣленій.

Заключая отсюда, по теоремѣ V, что должно быть,

$$a : (bcde) = a : b : c : d : e,$$

мы получаемъ:

63 **Слѣдствіе.** Если нужно раздѣлить на произведеніе нѣсколькихъ чиселъ, то можно раздѣлить сначала на одного сомножителя, результатъ на другого, этотъ результатъ на третьяго, и т. д. до послѣдняго.

§ 75. **Расширеніе и сокращеніе частныхъ.** Весьма часто приходится производить видоизмѣненія частнаго, которыя основываются на слѣдующемъ предложеніи:

64 **Теорема.** Величина частнаго (*дроби*) не измѣнится, если дѣлимое (*числителя*) и дѣлителя (*знаменателя*) на одно и то же число умножимъ или на одно и то же число раздѣлимъ.

I. ***Утв.*** $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

Док. Обозначимъ частное $\frac{a}{b}$ буквою x. Въ такомъ случаѣ равенство

$\frac{a}{b} = x$ выражаетъ, что x (какъ и $\frac{a}{b}$) есть число, которое, будучи умножено на b, даетъ a. Но это можетъ быть выражено и такъ:

$a = bx$. Если мы обѣ части этого раненства умножимъ на n, то, по теор. VII, получаемъ:

$an = bnx$. Изъ послѣдняго же равенства мы видимъ, что x есть число, которое, будучи умножено на bn, даетъ an. Но это можетъ быть выражено и такъ:

$\frac{an}{bn} = x$.

Сравнивая первое и послѣднее равенство въ доказательствѣ, мы, по теор. VI, заключаемъ, что дѣйствительно:

$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

II. ***Утв.*** $\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$.

Док Предполагая, что дѣлимое $a : n$ и дѣлитель $b : n$ цѣлыя числа, мы на основаніи доказанной уже первой части этой теоремы имѣемъ:

$$\frac{a : n}{b : n} = \frac{(a : n) n}{(b : n) n}$$

$$= \frac{a}{b} \text{ [по опред. 53]},$$

откуда, по теоремѣ V, и слѣдуетъ утвержденіе.

Справедливость этой части теоремы и для того случая, когда $a : n$ и $b : n$ не цѣлыя числа, слѣдуетъ изъ теоремы **82**.

Опредѣленіе. Умноженіе дѣлимаго и дѣлителя (*числителя и знаменателя*) на одно и то же число называется **расширеніемъ** частнаго (*дроби*). **65**

Опредѣленіе. Дѣленіе дѣлимаго и дѣлителя (*числителя и знаменателя*) на одно и то же число называется **сокращеніемъ** частнаго (*дроби*). **66**

§ 76. **Теоремы, примѣняемыя при сокращеніи.** При сокращеніи частныхъ постоянно приходится примѣнять теорему **59** и еще слѣдующія два предложенія:

Теорема. Вычеркивая сомножителя, мы дѣлимъ на него все произведеніе. **67**

Док. Справедливость утвержденія слѣдуетъ изъ того, что $\frac{ab}{b} = a$ [по теор. **53**[c]] и при вычеркиваніи въ произведеніи ab сомножителя b тоже получается a.

Теорема. Степени съ одинаковыми основаніями дѣлятъ другъ на друга, вычитая показателя дѣлителя изъ показателя дѣлимаго[1]) **68**

Предп. $p > q$.

Утв. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

Док. $$\frac{a^p}{a^q} = \frac{\overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{q \text{ сомножителей}} \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{всего } p \text{ сомножителей}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{q \text{ сомножителей}}} = a^{p-q},$$

такъ какъ q сомножителей a сокращаются, въ дѣлителѣ послѣ этого получается 1, а въ дѣлимомъ остается $(p-q)$ сомножителей a

[1]) Въ формулировкѣ менѣе удобной для запоминанія, но зато точной, эту теорему можно было бы выразить такъ:

Частное двухъ степеней съ одинаковыми основаніями равняется степени съ тѣмъ же основаніемъ и показателемъ, равнымъ разности показателей дѣлимаго и дѣлителя.

Примѣчаніе

Эта теорема будетъ позднѣе разсмотрѣна подробнѣе и въ болѣе общемъ видѣ (въ § 122)

Примѣры.

1) $\frac{45\ abc}{25\ ac} = \frac{9\ b}{5}$,

такъ какъ дѣлимое и дѣлитель даннаго частнаго дѣлятся на 5 ac.

Обыкновенно такое сокращеніе производится постепенно: сначала сокращаютъ на 5, вычеркивая 45 и 25 и надписывая 9 надъ 45 и подписывая 5 подъ 25 [по теор **59**]; затѣмъ сокращаютъ на a и на c, вычеркивая этихъ сомножителей въ дѣлимомъ и дѣлителѣ [по теор. **67**].

Не будетъ лишнимъ еще кстати замѣтить, что полученное выраженіе можетъ еще, по теор. **59**, быть преобразовано слѣдующимъ образомъ:

$\frac{9b}{5} = \frac{9}{5}b = 1\frac{4}{5}b$.

2) $\frac{x^3(y-2z)}{4x^5(y-2z)} = \frac{1}{4x^2}$,

такъ какъ данное частное можетъ быть сокращено на x^3 и на $(y-2z)$.

3) Алгебраическая дробь $\frac{12a^5bc^2x}{27a^3bc^6y^2}$ можетъ быть сокращена на 3 на a^3, на b и на c^2, послѣ чего получается.

$$\frac{12a^5bc^2x}{27a^3bc^6y^2} = \frac{4a^2x}{9c^4y^2}.$$

4) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}$ [теор. **52**[a] и **51**]

$$= \frac{a+b}{a-b}.$$

§ 77. Несократимыя дроби.

Опредѣленіе 1. Дробь, числитель и знаменатель которой на одно и то же цѣлое число не дѣлятся, называется несократимою.

Опредѣленіе 2. Равнократными двухъ цѣлыхъ чиселъ называются произведенія ихъ на одно и то же третье цѣлое число.

Напр., an и bn суть равнократныя чиселъ a и b, если a, b и n суть цѣлыя числа

Теорема 1. Числитель и знаменатель всякой дроби, равной несократимой дроби, суть равнократныя числителя и знаменателя послѣдней.

Предп. $\frac{a}{b}$ несократимая дробь.

$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$.

Утв. A и B суть равнократныя чиселъ a и b

Док. Изъ предположеннаго равенства

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

по опредѣленію частнаго и по правилу объ умноженіи дроби на цѣлое число слѣдуетъ:

$$A = \frac{aB}{b},$$

изъ чего видно, что $\frac{aB}{b}$ есть цѣлое число. Но такъ какъ a и b по предположенію на одно и то же цѣлое число не дѣлятся, то частное $\frac{aB}{b}$ можетъ быть цѣлымъ числомъ только, если частное отъ дѣленія B на b есть цѣлое число. Назовемъ послѣднее q. Тогда

$$B = bq.$$

Но такъ какъ

$$\frac{aB}{b} = a \cdot \frac{B}{b},$$

то

$$A = aq.$$

Слѣдовательно, A и B суть дѣйствительно произведенія чиселъ a и b на одно и то же цѣлое число, а именно на число q.

Теорема 2. Если двѣ несократимыя дроби равны между собою, то числители ихъ равны между собою и знаменатели ихъ равны между собою.

Предп. $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ несократимыя дроби;

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Утв. $a = c$

$b = d$.

Док. По предыдущей теоремѣ изъ предположенія

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

слѣдуетъ, что

$$c = aq$$
$$d = bq.$$

Но вслѣдствіе перваго предположенія послѣднія два равенства возможны только, если $q=1$, откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

что и требовалось доказать.

§ 78. **Дѣленіе многочлена на одночленъ.** Частное, котораго дѣлитель есть одночленъ, дѣлимое же многочленъ, можетъ быть, по теоремѣ **57**, представлено въ видѣ многочлена. Такое преобразованіе и имѣется въ виду, когда идетъ рѣчь о дѣленіи многочлена на одночленъ. При выполненіи

этого дѣйствія получающіеся въ результатѣ члены многочлена упрощаются при помощи теоремъ **59**, **67** и **68** такъ, какъ это показано на примѣрахъ къ параграфу 76.

Примѣры.

1) $(12a^5b^4c-3a^4b^4c^2-10a^3b^4c^3):6a^3b^4c$

$$=\frac{12a^5b^4c}{6a^3b^4c}-\frac{3a^4b^4c^2}{6a^3b^4c}-\frac{10a^3b^4c^3}{6a^3b^4c}$$

$$=2a^2-\frac{ac}{2}-\frac{5c^2}{3}$$

$$=2a^2-\frac{1}{2}ac-1\frac{2}{3}c^2$$

2) $(6a^3x^2-9a^2x^4-10ax^6-12x^8):(-6a^2x^2)$

$$=-\frac{6a^3x^2}{6a^2x^2}+\frac{9a^2x^4}{6a^2x^2}+\frac{10ax^6}{6a^2x^2}+\frac{12x^8}{6a^2x^2}$$

$$=-a+\frac{3x^2}{2}+\frac{5x^4}{3a}+\frac{2x^6}{a^2}.$$

Примѣчаніе.

При нѣкоторомъ навыкѣ отвѣтъ можно писать сразу, производя сокращенія въ умѣ.

§ 79. Дѣленіе неравенства и дѣленіе на неравенство.

Теорема 1. Если неравныя величины раздѣлимъ на равныя положительныя, то тамъ получится больше, гдѣ было больше.

Предп. $a>b$

$c=d$, при чемъ $c>0$

(слѣд. и $d>0$).

Утв. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

Док. Обозначивъ буквою m величину (положительную), на которую a больше b, мы первое предположеніе можемъ выразить равенствомъ:

$$a=b+m.$$

Предположено также, что $c=d$.

Раздѣливъ первое равенство на второе, мы, по теор. VII, получаемъ:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}+\frac{m}{d}.$$

Такъ мы видимъ, что $\frac{a}{c}$ больше $\frac{b}{d}$ на положительную величину $\frac{m}{d}$, что, слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ справедливо утвержденіе, что

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}.$$

Слѣдствіе 1. Частное двухъ абсолютныхъ чиселъ измѣняется въ томъ же смыслѣ, въ которомъ измѣняется его дѣлимое.

Изъ только-что доказанной теоремы, на основаніи вытекающаго изъ теоремы **55** правила о дѣленіи на отрицательное число [§§ 69 и 35] получается еще:

Слѣдствіе 2. Если неравныя величины раздѣлимъ на равныя отрицательныя, то тамъ получится больше, гдѣ было меньше.

Теорема 2. Если равныя абсолютныя величины раздѣлимъ на неравныя абсолютныя же, то тамъ получится меньше, гдѣ дѣлитель былъ больше.

Предп. $a = b$
$c > d$,
при чемъ a, b, c и d абсолютныя величины.

Утв. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Док. Умноживъ другъ на друга данныя въ предположеніи равенство и неравенство:

$$a = b$$
$$d < c$$

мы получаемъ $ad < bc$ [теор. 1 въ § 63].

Раздѣливъ обѣ части послѣдняго неравенства на cd, мы получаемъ [по теор. 1 этого параграфа]:

$$\frac{ad}{cd} < \frac{bc}{cd},$$

а послѣ сокращенія

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d};$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Частное двухъ абсолютныхъ чиселъ измѣняется въ смыслѣ, противоположномъ тому, въ которомъ измѣняется его дѣлитель.

Теорема 3. Тамъ получается большее частное, гдѣ большая абсолютная величина дѣлится на меньшую абсолютную.

Предп. $a > b$
$c < d$,
при чемъ a, b, c и d абсолютныя величины.

Утв. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Док. **Умноживъ** другъ на друга данныя въ предположеніи неравенства:

$$\begin{array}{l} a > b \\ \underline{d > c}, \\ ad > bc \end{array}$$

мы получаемъ $ad > bc$ [теорема 2 въ § 63].

Раздѣливъ же обѣ части послѣдняго неравенства на cd, мы [по теор. 1 этого параграфа] получаемъ:

$$\frac{ad}{cd} > \frac{bc}{cd},$$

а послѣ сокращенія

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d};$$

что и требовалось доказать.

Примѣчаніе.

По той же причинѣ, по которой изъ неравенствъ, которыхъ части всѣ отрицательны, можно дѣлать выводы чрезъ умноженіе при условіи, что знаки неравенствъ одинаковые, изъ неравенствъ съ отрицательными частями можно дѣлать заключенія черезъ дѣленіе въ томъ случаѣ, когда знаки неравенствъ у нихъ не одинаковые, пользуясь при этомъ 3-ьею изъ теоремъ, доказанныхъ въ этомъ параграфѣ. Но если въ неравенствахъ съ частями одинаковаго знака знаки неравенства одинаковые, то нельзя дѣлать какихъ-либо заключеній чрезъ дѣленіе такихъ неравенствъ другъ на друга по такой же причинѣ, по какой нельзя дѣлать выводовъ чрезъ вычитаніе [§ 50].

Что же касается неравенствъ, части которыхъ не всѣ одинаковаго знака, то и относительно результатовъ дѣленія ихъ другъ на друга можно только знать, что если при этомъ получаются частныя противоположныхъ знаковъ, то положительное частное, конечно, будетъ больше чѣмъ отрицательное.

ГЛАВА XIII.

Дѣленіе многочлена на многочленъ.

§ 80. **Задача этой главы**. Тогда какъ результатомъ умноженія многочлена на многочленъ всегда является опять многочленъ, въ общемъ нельзя найти многочлена, который бы, не состоя изъ алгебраическихъ дробей, выражалъ частное двухъ многочленовъ. Такъ, напр., частное отъ дѣленія многочлена $a-b-c+d$ на многочленъ $p+q-r$ есть

$$\frac{a-b-c+d}{p+q-r}$$

и безъ помощи алгебраическихъ дробей (дѣлающихъ выраженіе только болѣе сложнымъ) въ видѣ многочлена изображено быть не можетъ.

Въ частныхъ же случаяхъ такое изображеніе возможно, и о нихъ и говорится въ этой главѣ.

§ 81. **Составленіе образца и правила дѣленія**. Такъ какъ дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію, то и правила для дѣленія многочлена на многочленъ мы легче всего найдемъ, умноживъ предварительно два многочлена другъ на друга. Умножимъ, напр., многочленъ $B=4a^2-3ab+5b^2$ на многочленъ $Q=3a^2-2ab-b^2$, располагая дѣйствіе въ порядкѣ, указанномъ въ § 60:

$$\begin{array}{r} 4a^2-3ab+5b^2 \qquad\qquad\qquad \\ 3a^2-2ab-b^2 \qquad\qquad\qquad \\ \hline 12a^4-9a^3b+15a^2b^2 \qquad\qquad\qquad \\ -8a^3b+6a^2b^2-10ab^3 \qquad \\ -4a^2b^2+3ab^3-5b^4 \\ \hline 12a^4-17a^3b+17a^2b^2-7ab^3-5b^4. \end{array}$$

Обозначивъ полученное произведеніе буквою A, перейдемъ теперь къ обратному дѣйствію дѣленія многочлена A на многочленъ B, т. е., изслѣдуемъ, какимъ способомъ можно, предполагая Q неизвѣстнымъ, найти тотъ многочленъ, который, будучи умноженъ на многочленъ B, дастъ многочленъ A.

Въ началѣ § 61 разъяснено было, что высшій членъ произведенія двухъ многочленовъ получается отъ умноженія ихъ высшихъ членовъ. Поэтому принимая a за главную букву, мы знаемъ, что высшій членъ частнаго должно быть выраженіе, которое, будучи умножено на высшій членъ дѣлителя $4a^2$, дастъ высшій членъ дѣлимаго $12a^4$. Слѣдовательно, ***первый членъ искомаго частнаго*** есть $3a^2$, и ***получается*** онъ ***чрезъ дѣленіе высшаго члена дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя.***

Произведеніе дѣлителя B на полученный членъ частнаго $3a^2$ равно

$$12a^4-9a^3b+15a^2b^2.$$

Если мы этотъ многочленъ вычтемъ изъ A, то ясно, что остатокъ будетъ произведеніе дѣлителя B на всѣ еще неполученные члены искомаго частнаго. Произведемъ указанное вычитаніе:

$$\begin{array}{rl} 12a^4-17a^3b+17a^2b^2-7ab^3-5b^4 & \text{.... дѣлимое } A \\ 12a^4-9a^3b+15a^2b^2 \qquad\qquad\qquad & \text{.... произведеніе дѣлителя } B \text{ на } 3a^2 \\ \hline -8a^3b+2a^2b^2-7ab^3-5b^4 & \text{..... 1-й остатокъ.} \end{array}$$

Высшій членъ этого остатка, на основаніи того же разъясненія въ § 61, долженъ быть произведеніемъ высшаго члена дѣлителя на высшій изъ неполученныхъ членовъ частнаго, т. е. выраженіемъ, которое, будучи умножено на $4a^2$, дастъ $-8a^3b$.

Слѣдовательно, ***второй членъ*** искомаго ***частнаго*** есть $-2ab$, и ***получается*** онъ ***чрезъ дѣленіе высшаго члена перваго остатка на высшій членъ дѣлителя.***

Умноживъ дѣлителя B и на этотъ членъ частнаго, мы получаемъ:

$$-8a^3b+6a^2b^2-10ab^3$$

Вычтемъ это выраженіе изъ перваго остатка:

$-8a^3b+2a^2b^2-7ab^3-5b^4$ ... 1-й остатокъ
$-8a^3b+6a^2b^2-10ab^3$ ... ... произведеніе дѣлителя B на $-2ab$
$-4a^2b^2+3ab^3-5b^4$ . . . 2-й остатокъ.

Ясно, что и этотъ остатокъ долженъ быть произведеніемъ дѣлителя B на неполученные еще члены искомаго частнаго, при чемъ высшій членъ его долженъ быть также произведеніемъ высшаго члена дѣлителя B на высшій изъ недостающихъ еще членовъ частнаго, т. е. выраженіемъ, которое будучи умножено на $4a^2$, дасть $-4a^2b^2$. Слѣдовательно, ***третій членъ*** искомаго ***частнаго*** есть $-b^2$, и ***получается*** онъ ***чрезъ дѣленіе высшаго члена второго остатка на высшій членъ дѣлителя.***

Умноживъ дѣлителя B и на этотъ членъ частнаго, мы получаемъ:

$$-4a^2b^2+3ab^3-5b^4$$

то есть 2-й остатокъ, такъ что рѣшаемая нами задача заканчивается слѣдующимъ образомъ.

$-4a^2b^2+3ab^3-5b^4$ .... 2-й остатокъ
$-4a^2b^2+3ab^3-5b^4$ .... произведеніе дѣлителя B на $-b^2$
0 .... послѣдній остатокъ.

Слѣдовательно, дѣленіе оканчивается безъ остатка.

Изложеннымъ въ достаточной степени выяснено, что ***тѣмъ же порядкомъ*** слѣдовало бы ***продолжать дѣленіе,*** если бы частное состояло изъ большаго числа членовъ.

Чтобы отчетливѣе былъ виденъ порядокъ производства дѣйствія, повторимъ, опуская объясненія, произведенное нами только-что дѣленіе въ томъ видѣ, въ которомъ обыкноаенно дѣлятъ многочленъ на многочленъ:

$$(12a^4-17a^3b+17a^2b^2-7ab^3-5b^4):(4a^2-3ab+5b^2)=3a^2-2ab-b^2$$

$$\begin{array}{l}
12a^4-9a^3b+15a^2b^2 \\
\hline
\quad -8a^3b+2a^2b^2-7ab^3-5b^4 \\
\quad -8a^3b+6a^2b^2-10ab^3 \\
\hline
\qquad -4a^2b^2+3ab^3\;\;5b^4 \\
\qquad -4a^2b^2+3ab^3-5b^4 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Замѣтимъ еще, что этотъ образецъ дѣленія еще немного упрощается, если въ остатки сносить изъ дѣлимаго только тѣ члены, которые нужны при производствѣ вычитанія, и что скобки иногда замѣняются вертикальною чертою, отдѣляющею дѣлителя отъ дѣлимаго, и горизонтальною, отдѣляющею дѣлителя отъ подписываемаго подъ нимъ частнаго.

Сравнивая приведенный образецъ дѣленія съ умноженіемъ многочленовъ въ началѣ параграфа, мы можемъ замѣтить особенность, характеризующую дѣленіе какъ дѣйствіе, обратное умноженію: произведенное дѣленіе оказалось тѣмъ же умноженіемъ, отличающимся отъ первоначальнаго умноженія только тѣмъ, что тутъ члены множителя (искомаго частнаго) не даны, а постепенно находятся. Вычитаніе же одного за другимъ многочленовъ, получающихся при умноженіи дѣлителя (множимаго) на члены частнаго (множителя), изъ дѣлимаго (даннаго произведенія) производится тутъ для того, чтобы убѣдиться, что эти многочлены вмѣстѣ дѣйствительно составляютъ это произведеніе.

§ 82. **Необходимость расположенія дѣленія многочлена на многочленъ по высшей или по низшей степени буквы, принимаемой за главную.** Если бы мы въ многочленахъ, которыхъ дѣленіе было произведено въ предыдущемъ параграфѣ, за главную букву приняли b, то тѣ члены въ нихъ и въ остаткахъ, которые мы называли высшими, оказались бы низшими. Слѣдовательно, вездѣ слѣдовало бы слово «высшій» замѣнить словомъ «низшій» въ правилѣ полученія отдѣльныхъ членовъ частнаго, обозначенномъ въ предыдущемъ параграфѣ курсивомъ.

Если бы мы попытались произвести дѣленіе тѣхъ же многочленовъ, не располагая строго дѣйствія или исключительно по высшей степени или исключительно по низшей степени буквы, принимаемой за главную, то мы не получили бы ни остатка 0, ни настоящаго искомаго частнаго.

Чтобы не забывалось важное правило о необходимости соблюденія извѣстнаго порядка при дѣленіи многочлена на многочленъ, выразимъ главнѣйшую суть его въ слѣдующей удобной для запоминанія краткой формулировкѣ:

Правило. При дѣленіи многочлена на многочленъ для полученія отдѣльныхъ членовъ частнаго 69 слѣдуетъ всегда дѣлить $\left\{\begin{matrix}\textit{высшій}\\ \textit{или же}\\ \textit{низшій}\end{matrix}\right\}$ членъ дѣлимаго и получающихся одинъ послѣ другого остатковъ на $\left\{\begin{matrix}\textit{высшій}\\ \textit{или соотвѣтственно}\\ \textit{низшій}\end{matrix}\right\}$ членъ дѣлителя.

Примѣры.

1) Если требуется раздѣлить многочленъ

$$x^4-13x-7x^2+6-10x^5+23x^3$$

на многочленъ

$$3-5x^2-2x,$$

то дѣйствіе можно и въ этомъ случаѣ, какъ всегда, расположить и по высшей степени буквы x и по низшей ея степени. Если изберемъ послѣдній способъ, то удобно данные многочлены расположить по возрастающимъ степенямъ этой буквы. Самое же дѣленіе мы производимъ такъ.

$$\begin{array}{l|l}
6-13x-7x^2+23x^3+x^4-10x^5 & 3-2x-5x^2 \\
\cline{2-2}
6-4x-10x^2 & 2-3x-x^2+2x^3 \\
\cline{1-1}
\quad -9x+3x^2+23x^3 & \\
\quad -9x+6x^2+15x^3 & \\
\cline{1-1}
\qquad -3x^2+8x^3+x^4 & \\
\qquad -3x^2+2x^3+5x^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad +6x^3-4x^4-10x^5 & \\
\qquad\quad +6x^3-4x^4-10x^5 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

2) Въ нижеслѣдующемъ примѣрѣ показывается, какъ поступать, когда дѣлимое многочленъ *неполный*, т. е., когда въ немъ отсутствуютъ члены съ нѣкоторыми степенями главной буквы:

$$\begin{array}{l|l}
-16p^4q \qquad\quad -4p^2q^3 \qquad\qquad -q^5 & 4p^2+2pq+q^2 \\
\cline{2-2}
-16p^4q-8p^3q^2-4p^2q^3 & -4p^2q+2pq^2-q^3 \\
\cline{1-1}
\quad +8p^3q^2 \quad » & \\
\quad +8p^3q^2+4p^2q^3+2pq^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad -4p^2q^3-2pq^4-q^5 & \\
\qquad 4p^2q^3-2pq^4-q^5 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

3) Въ примѣрѣ дѣленія многочлена

$$2y^5-5ay^4+5by^4-5a^2y^3-aby^3+b^2y^3+11a^3y^2-11a^2by^2+10ab^2y^2-3b^3y^2+5a^4y$$
$$-15a^3by+5a^2b^2y$$

на многочленъ

$$2y^2-ay+3by-5a^2$$

должно обратить вниманіе на ту особенность, что какъ въ дѣлимомъ, такъ и въ дѣлителѣ встрѣчается по *нѣсколько членовъ съ одною и тою же степенью буквы y*, въ дѣлимомъ же и по нѣсколько членовъ съ одинаковой степенью

буквы a и буквы b. Въ такихъ случаяхъ нужно дѣленіе располагать по высшей или низшей степени *не одной только буквы*, напр., y, а еще и другой, напр. a, а если нужно, то еще и третьей, и т. д., примѣрно такъ:

$$2y^5-5ay^4+5by^4-5a^2y^3-aby^3+b^2y^3+11a^3y^2-11a^2by^2+10ab^2y^2-3b^3y^2+5a^4y-15a^3by+5a^2b^2y \,\Big|\, 2y^2-ay+3by-5a^2$$
$$2y^5-ay^4+3by^4-5a^2y^3 \qquad\qquad \Big|\, y^3-2ay^2+by^2-a^2y+3aby-b^2y$$
$$-4ay^4+2by^4 \quad \text{»} \quad -aby^3 \quad +11a^3y^2$$
$$-4ay^4 \quad +2a^2y^3-6aby^3 \quad +10a^3y^2$$
$$+2by^4-2a^2y^3+5aby^3+b^2y^3+a^3y^2-11a^2by^2$$
$$+2by^4 \quad -aby^3+3b^2y^3 \quad -5a^2by^2$$
$$-2a^2y^3+6aby^3-2b^2y^3+a^3y^2-6a^2by^2 \quad +5a^4y$$
$$-2a^2y^3 \quad +a^3y^2-3a^2by^2 \quad +5a^4y$$
$$+6aby^3-2b^2y^3 \quad \text{»} \quad -3a^2by^2+10ab^2y^2 \quad \text{»} \quad -15a^3by$$
$$+6aby^3 \quad -3a^2by^2+9ab^2y^2 \quad -15a^3by$$
$$-2b^2y^3 \quad \text{»} \quad +ab^2y^2-3b^3y^2 \quad \text{»} \quad +5a^2b^2y$$
$$-2b^2y^3 \quad +ab^2y^2-3b^3y^2 \quad +5a^2b^2y.$$
$$0$$

Такія дѣленія производятъ и иначе, вынося одинаковыя степени главной буквы множителемъ за скобки (по теор. 48[2]). Послѣ такого преобразованія уже не будетъ членовъ съ одинаковыми степенями главной буквы, но зато получаются члены съ многочленными коэффиціентами.

Произведемъ дѣленіе тѣхъ же многочленовъ и этимъ способомъ:

$$2y^5+(-5a+5b)y^4+(-5a^2-ab+b^2)y^3+(11a^3-11a^2b+10ab^2-3b^3)y^2+(5a^4-15a^3b+5a^2b^2)y \,\Big|\, 2y^2+(-a+3b)y-5a^2$$
$$2y^5+(-a+3b)y^4+(-5a^2)y^3 \qquad \Big|\, y^3+(-2a+b)y^2+(-a^2+3ab-b^2)y$$
$$(-4a+2b)y^4+(-ab+b^2)y^3+(11a^3-11a^2b+10ab^2-3b^3)y^2$$
$$(-4a+2b)y^4+(2a^2-7ab+3b^2)y^3+(10a^3-5a^2b)y^2$$
$$(-2a^2+6ab-2b^2)y^3+(a^3-6a^2b+10ab^2-3b^3)y^2+(5a^4-15a^3b+5a^2b^2)y$$
$$(-2a^2+6ab-2b^2)y^3+(a^3-6a^2b+10ab^2-3b^3)y^2+(5a^4-15a^3b+5a^2b^2)y$$
$$0$$

Если мы во второмъ и третьемъ членахъ полученнаго частнаго раскроемъ скобки, то оно приметъ тотъ же видъ, какой оно имѣетъ въ предыдущемъ дѣлени. Оно можетъ быть также представлено въ видѣ:

$$y^3+(b-2a)y^2-(3ab-a^2-b^2)y$$

или еще лучше въ слѣдующемъ видѣ:

$$y^3-(2a-b)y^2-(a^2-3ab+b^2)y \qquad [\text{по теор. } 42]$$

4) $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E \;|\; x-a$

$$\begin{array}{l} Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E \\ \underline{Ax^4-Aax^3} \\ (Aa+B)x^3+Cx^2 \\ \underline{(Aa+B)x^3-(Aa^2+Ba)x^2} \\ \quad (Aa^2+Ba+C)x^2+Dx \\ \quad \underline{(Aa^2+Ba+C)x^2-(Aa^3+Ba^2+Ca)x} \\ \qquad (Aa^3+Ba^2+Ca+D)x+E \\ \qquad \underline{(Aa^3+Ba^2+Ca+D)x-(Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da)} \\ \qquad \text{Остатокъ} \; \ldots\ldots \; Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E. \end{array}$$

Частное: $Ax^3+(Aa+B)x^2+(Aa^2+Ba+C)x+(Aa^3+Ba^2+Ca+D)$

Примѣчаніе.

Результатъ послѣдняго дѣленія можетъ быть обобщенъ. Доказанная въ § 86 теорема есть обобщеніе его, по скольку оно касается остатка.

§ 84. **Дѣленіе съ остаткомъ.** Измѣнимъ нѣсколько дѣлимое въ примѣрѣ дѣленія, разсмотрѣнномъ въ § 81, прибавивъ къ нему $R=2ab^3-3b^4$ (двучленъ низшей степени относительно a, чѣмъ дѣлитель B). Тогда новое дѣлимое будетъ $A+R=12a^4-17a^3b+17a^2b^2-5ab^3-8b^4$.

При дѣлении его по теоремѣ 57 должно получиться

$$\frac{A+R}{B}=\frac{A}{B}+\frac{R}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

или

$$\frac{12a^4-17a^3b+17a^2b^2-5ab^3-8b^4}{4a^2-3ab+5b^2}=3a^2-2ab-b^2+\frac{2ab^3-3b^4}{4a^2-3ab+5b^2}.$$

Самое же дѣление по правиламъ, изложеннымъ въ предыдущихъ двухъ параграфахъ, должно быть произведено по слѣдующему образцу:

$$(12a^4-17a^3b+17a^2b^2-5ab^3-8b^4):(4a^2-3ab+5b^2)=3a^2-2ab-b^2+\frac{2ab^3-3b^4}{4a^2-3ab+5b^2}$$

$$\begin{array}{l} \underline{12a^4-9a^3b+15a^2b^2} \\ \quad -8a^3b+2a^2b^2-5ab^3 \\ \quad \underline{-8a^3b+6a^2b^2-10ab^3} \\ \qquad -4a^2b^2+5ab^3-8b^4 \\ \qquad \underline{-4a^2b^2+3ab^3-5b^4} \\ \qquad\qquad 2ab^3-3b^4 \end{array}$$

Степень главной буквы въ высшемъ членѣ послѣдняго остатка ниже степени ея въ высшемъ членѣ дѣлителя. Слѣдовательно, остальная часть частнаго не можетъ быть цѣлымъ алгебраическимъ выраженіемъ и вмѣстѣ съ тѣмъ не будетъ содержать члена, который бы, будучи умноженъ на членъ дѣлителя $5b^2$, далъ членъ дѣлимаго $-8b^4$ (члены низшіе относительно a и высшіе относительно b [см. § 61]). Слѣдовательно, продолжая тѣмъ же порядкомъ дѣленіе, мы въ частномъ стали бы получать только дробные члены и при этомъ до остатка 0 никогда бы не дошли. А потому мы и заканчиваемъ дѣленіе такъ, какъ это указано въ образцѣ.

Изъ разсмотрѣннаго примѣра мы выводимъ правило, что *если дѣленіе многочлена на многочленъ располагается по высшей степени буквы, принимаемой за главную, то дѣленіе можно прекратить на первомъ же остаткѣ, въ которомъ высшій членъ ниже высшаго члена дѣлителя*, такъ какъ появленіе такого остатка указываетъ на то, что *многочлены нацѣло другъ на друга не дѣлятся.*

Разсмотримъ еще слѣдующее дѣленіе многочлена на многочленъ, дающее также остатокъ:

$$\begin{array}{l|l}
3 \quad\quad 16x^2-9x^3 \quad\quad\quad +7x^5 & 1 \quad 2x - x^2 \\
\cline{2-2}
\underline{3-6x-\ 3x^2} & 3+6x \quad x^2-5x^3 \\
\quad +6x \quad 13x^2-9x^3 & \\
\quad \underline{+6x-12x^2-6x^3} & \\
\quad\quad -\ \ x^2-3x^3 & \\
\quad\quad \underline{-\ \ x^2+2x^3+\ \ x^4} & \\
\quad\quad\quad 5x^3-\ \ x^4+7x^5 & \\
\quad\quad\quad \underline{5x^3+10x^4+5x^5} & \\
\quad\quad\quad\quad -11x^4+2x^5 &
\end{array}$$

Хотя послѣдній остатокъ позволяетъ опредѣлить еще цѣлый членъ частнаго, все-таки не трудно убѣдиться, что онъ указываетъ на невозможность дѣленія данныхъ многочленовъ безъ остатка.

И въ самомъ дѣлѣ, если бы данные многочлены дѣлились другъ на друга нацѣло, то произведеніе высшаго члена частнаго на высшій членъ дѣлителя равнялось бы высшему члену дѣлимаго [опред. **53** и § 61], а такъ какъ этотъ послѣдній содержитъ 5-ую степень буквы x, то послѣдній членъ частнаго долженъ содержать x^3. Но до такого члена частнаго, расположеннаго по восходящимъ степенямъ буквы x, мы уже дошли, не получивъ однако при этомъ остатка 0. Слѣдовательно, и вообще мы его уже больше не получимъ.

Несмотря на это, дѣленіе можетъ быть продолжено, притомъ *безъ конца*, такъ какъ степени x въ остаткахъ, такъ же, какъ и въ частномъ, все повышаются.

Потому, выражая въ данномъ случаѣ результатъ дѣленія такъ же, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, мы въ частномъ можемъ написать столько цѣлыхъ членовъ, сколько пожелаемъ. Такъ, частное отъ дѣленія данныхъ двухъ многочленовъ можетъ быть представлено въ слѣдующихъ различныхъ видахъ:

$$\frac{3-16x^2-9x^3+7x^5}{1-2x-x^2}=3+\frac{6x-13x^2-9x^3}{1-2x-x^2}$$
$$=3+6x-\frac{x^2+3x^3}{1-2x-x^2}$$
$$=3+6x-x^2-\frac{5x^3+x^4-7x^5}{1-2x-x^2}$$
$$=3+6x-x^2-5x^3-\frac{11x^4-2x^5}{1-2x-x^2}$$
$$=3+6x-x^2-5x^3-11x^4-\frac{20x^5+11x^6}{1-2x-x^2}$$

и т. д.

§ 84. **Признаки недѣлимости нацѣло многочлена на многочленъ.** Изъ содержанія предыдущихъ параграфовъ (81, 82, 83) и въ особенности изъ разсужденій о высшемъ и низшемъ членѣ въ дѣлимомъ, остаткахъ, дѣлителѣ и частномъ, а также изъ содержащейся въ § 61 истины о числѣ членовъ произведенія двухъ многочленовъ слѣдуютъ признаки, по которымъ еще до начала дѣйствія и при выполненіи его узнается, возможно ли дѣленіе многочлена на многочленъ нацѣло.

А. ***Еще не приступая*** къ самому дѣленію многочленовъ, мы видимъ, что дѣлимое ***не дѣлится нацѣло*** на дѣлителя,

1) *если въ дѣлителѣ* (по устраненіи общаго всѣмъ членамъ множителя, если таковой имѣется) *окажется хотя бы одна буква, которой нѣтъ въ дѣлимомъ*,

или

2) *если* { ***высшій*** или ***низшій*** } ***членъ дѣлителя выше*** { ***высшаго*** или соотвѣтственно ***низшаго*** } *члена дѣлимаго*.

Б. ***При выполненіи дѣленія*** получается указаніе на то, что дѣлимое ***не дѣлится нацѣло*** на дѣлителя,

1) ***если получается остатокъ, въ которомъ высшій членъ ниже высшаго члена въ дѣлителѣ***,

или

2) ***если получается въ остаткѣ одночленъ*** (по снесеніи, конечно, всѣхъ членовъ изъ дѣлимаго),

или

3) *если при дѣленіи, расположенномъ по низшей степени главной буквы, мы не получаемъ остатка* 0, *несмотря на то, что въ частномъ дошли до*

того члена, который въ случаѣ дѣлимости нацѣло, долженъ бы быть высшимъ, т. е. при умноженіи на высшій членъ дѣлителя долженъ бы дать высшій членъ дѣлимаго.

§ 85. **Сходство дѣленія многочленовъ съ дѣленіемъ цѣлыхъ чиселъ.** При производствѣ дѣленія многочлена на многочленъ нельзя не замѣтить, что оно въ очень многомъ напоминаетъ дѣленіе двухъ многозначныхъ цѣлыхъ чиселъ или двухъ десятичныхъ дробей другъ на друга. Это объясняется тѣмъ, что послѣднее и есть въ сущности не что иное, какъ тоже дѣленіе многочлена на многочленъ, пріобрѣтающее лишь нѣкоторыя особенныя черты вслѣдствіе того, что въ извѣстныхъ случаяхъ высшіе разряды единицъ раздробляются въ низшіе, а низшіе превращаются въ высшіе, и этимъ достигается, между прочимъ, ненадобность въ отрицательныхъ членахъ.

Такъ, напр., обыкновенное дѣленіе 85273 на 317 есть видоизмѣненное указаннымъ способомъ дѣленіе многочлена

$$8 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3$$

на многочленъ

$$3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7.$$

Чтобы отчетливѣе обнаружить суть всякаго выполняемаго нами дѣленія цѣлыхъ чиселъ другъ на друга, произведемъ дѣленіе этихъ многочленовъ, указывая послѣ скобокъ, рядомъ съ остатками, дѣлаемыя всегда въ умѣ упомянутыя раздробленія и превращенія:

$(8 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3) : (3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7) = 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 9 = 269$

$6 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 14 \cdot 10^2 \ldots$ первое вычитаемое

$2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 =$ {$8 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^2 \ldots$ преобразованные первые три члена дѣлимаго; $-(6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2) \ldots$ преобразованное первое вычитаемое}

$21 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 \ldots$ преобразованный первый остатокъ со снесеннымъ слѣдующимъ членомъ дѣлимаго

$18 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 42 \cdot 10^1 \ldots$ второе вычитаемое

$2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 =$ {$21 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 \ldots$ первый остатокъ; $-(19 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1) \ldots$ преобразованное второе вычитаемое}

$28 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \ldots$ преобразованный второй остатокъ со снесеннымъ послѣднимъ членомъ дѣлимаго

$27 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 63 \ldots$ третье вычитаемое

$0 =$ {$28 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \ldots$ второй остатокъ; $-(28 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3) \ldots$ преобразованное третье вычитаемое.}

Произведенное дѣленіе есть не что иное, какъ обычное дѣленіе 85273 на 317, только съ объясненіемъ и подробнымъ изображеніемъ и того, что обыкновенно подразумѣвается или дѣлается въ умѣ.

Равнымъ образомъ умноженіе многозначнаго числа на однозначное есть умноженіе многочлена на одночленъ, а умноженіе многозначнаго числа на многозначное есть умноженіе многочлена на многочленъ съ превращеніемъ единицъ низшихъ разрядовъ въ единицы высшихъ разрядовъ.

ГЛАВА XIV.

Частные случаи дѣленія многочленовъ на многочлены.

§ 86. **Теорема.** При дѣленіи многочлена

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx^2+Lx+M$$

на $x-a$ получается въ остаткѣ

$$Aa^n+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+\ldots+Ka^2+La+M.$$

Док. Положимъ, что дѣленіе многочлена

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx^2+Lx+M$$

на $x-a$ производится обычнымъ порядкомъ (по правиламъ, изложеннымъ въ §§ 81, 82 и 83), т. е. до тѣхъ поръ, пока не получится остатокъ, не содержащій x. Этотъ остатокъ назовемъ R. Получающееся же при этомъ частное (цѣлое относительно x) обозначимъ буквою Q. При этихъ условіяхъ (согласно § 83)

$$\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx^2+Lx+M}{x-a}=Q+\frac{R}{x-a}.$$

Слѣдовательно (по опредѣленію 53)

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx^2+Lx+M=Q(x-a)+R.$$

Если возьмемъ x равнымъ a, то $x-a$ будетъ равнымъ 0 и потому произведеніе $Q(x-a)$ тоже равнымъ 0; и оказывается, слѣдовательно, что

$$Aa^n+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+\ldots+Ka^2+La+M=Q(a-a)+R=R,$$

что и требовалось доказать.

§ 87. **Признаки дѣлимости на $x-a$ многочлена n-ой степени относительно x.** Если данное въ предыдущемъ параграфѣ послѣднимъ равенствомъ выраженіе для остатка R при какомъ-либо значеніи буквы a окажется равнымъ 0, то это значитъ, что въ этомъ случаѣ многочленъ

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx^2+Lx+M$$

дѣлится на $x-a$ безъ остатка [1]).

---

[1]) Вмѣсто «дѣлится безъ остатка» или «дѣлится нацѣло» часто говорятъ просто «дѣлится».

Изъ этого мы заключаемъ:

Слѣдствіе. Многочленъ

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx^2+Lx+M$$

дѣлится на $x-a$, если онъ обращается въ 0 при $x=a$.

§ 88. **Дѣленіе на сумму и разность двухъ чиселъ суммы и разности одинаковыхъ степеней этихъ чиселъ.** Примѣнимъ послѣднюю теорему къ слѣдующимъ случаямъ дѣленія:

1) Двучленъ x^n-a^n при $x=a$ превращается въ a^n-a^n, то есть въ 0; слѣд., x^n-a^n всегда дѣлится на $x-a$.

2) Двучленъ x^n+a^n при $x=a$ превращается въ $a^n+a^n=2a^n$; слѣд., x^n+a^n на $x-a$ не дѣлится

3) Двучленъ x^n-a^n при $x=-a$ превращается въ $(-a)^n-a^n$. Степень $(-a)^n$, по теоремѣ 47, равняется $+a^n$, если n четное число, и равняется $-a^n$, если n нечетное число.

Слѣдовательно, x^n-a^n при $x=-a$ превращается въ 0, если n четное число, и въ $-2a^n$, если n нечетное число. Такъ оказывается, что x^n-a^n дѣлится на $x-(-a)$, то есть, на $x+a$ *только, если показатель n четное число.*

4) Двучленъ x^n+a^n при $x=-a$ превращается въ $(-a)^n+a^n$, то есть въ $-a^n+a^n$ при нечетномъ n и въ $+a^n+a^n=2a^n$ при четномъ n. Слѣд., x^n+a^n дѣлится на $x-(-a)$, то есть на $x+a$ *только, если показатель n нечетное число.*

Результаты этого изслѣдованія можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Теорема. ***На разность*** двухъ чиселъ дѣлится безъ остатка ***разность*** одинаковыхъ степеней этихъ чиселъ. 70

Теорема. ***На сумму*** двухъ чиселъ дѣлится безъ остатка ***сумма*** одинаковыхъ ***нечетныхъ*** степеней и ***разность*** одинаковыхъ ***четныхъ*** степеней этихъ чиселъ. 71

Полезно запомнить и видъ частныхъ, получающихся отъ дѣленій, упоминаемыхъ въ послѣднихъ двухъ теоремахъ:

1) $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}$

2) $\dfrac{a^n+b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1}$, если n нечетное число.

3) $\dfrac{a^n-b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-a^2b^{n-3}+ab^{n-2}-b^{n-1}$, если n четное число.

Доказательство теоремъ 70 и 71 можетъ также состоять въ повѣркѣ приведенныхъ результатовъ послѣднихъ трехъ дѣленій чрезъ умноженіе частнаго на дѣлителя (по опредѣленію 53).

Примѣчаніе.

Подставляя въ выраженіе $2n$ вмѣсто n подъ рядъ 1, 2, 3 и т. д., вообще числа натуральнаго ряда, мы получимъ *всѣ четныя числа.* Поэтому это выраженіе служитъ для обозначенія четнаго числа вообще.

Сумма или разность четнаго и нечетнаго числа есть всегда нечетное число. Поэтому $2n+5$, $2n+11$, $2n-3$ и т. п. означаютъ числа нечетныя. Простѣйшія изъ такихъ суммъ и разностей суть

$$2n+1 \quad \text{и} \quad 2n-1.$$

Подставляя во второе изъ этихъ выраженій числа натуральнаго ряда или въ первое 0 и тѣ же числа, мы получимъ *всѣ нечетныя числа.* Поэтому эти выраженія служатъ для обозначенія нечетнаго числа вообще.

Пользуясь этими обозначеніями, можно разсмотрѣнные выше случаи дѣлимости на сумму и разность двухъ чиселъ суммы или разности одинаковыхъ степеней ихъ изобразить въ слѣдующемъ лучше врѣзывающемся въ память видѣ:

Нацѣло дѣлятся:

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}, \quad \frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}}{a+b}, \quad \frac{a^{2n}-b^{2n}}{a+b}.$$

Дѣленіе безъ остатка невозможно въ остальныхъ случаяхъ.

ГЛАВА XV.

Разложеніе на сомножителей.

§ 89. **Разъясненіе понятія.** Равенство 53а

$$a=\frac{a}{b}\cdot b\ ,$$

служащее опредѣленіемъ частнаго, указываетъ въ то же время на то, что всякое число можетъ быть представлено въ видѣ произведенія двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно можетъ быть произвольно дано. Въ свою очередь, каждый изъ этихъ двухъ сомножителей могъ бы быть представленъ въ видѣ произведенія двухъ чиселъ, равнымъ образомъ и эти послѣднія и т. д. Такъ каждое число можетъ быть представлено въ видѣ произведенія произвольнаго числа сомножителей, при чемъ, чтобы достигнуть такого изображенія его, необходимо дѣлать соотвѣтственныя дѣленія, какъ это указывается вышеприведеннымъ равенствомъ.

Для примѣра изобразимъ и многочленъ $a-b-c$ въ видѣ произведенія двухъ сомножителей, что при помощи дѣленія и указанныхъ ниже теоремъ можетъ быть, между прочимъ, сдѣлано слѣдующими различными способами:

$$a-b-c=d\cdot\frac{a-b-c}{d} \qquad \text{[опред. 53*]}$$

или

$$a-b-c=a\cdot\frac{a-b-c}{a}$$

$$=a\cdot\frac{a-(b+c)}{a} \qquad \text{[теор. 42]}$$

$$=a\cdot\left(1-\frac{b+c}{a}\right) \qquad \text{[теор. 57]}$$

или

$$a-b-c=(b+c)\cdot\frac{a-b-c}{b+c}$$

$$=(b+c)\cdot\frac{a-(b+c)}{b+c} \qquad \text{те}$$

$$=(b+c)\cdot\left(\frac{a}{b+c}-1\right) \qquad \text{[теор. 57]}$$

и т. п.

Изображеніе числа (слѣд., и алгебраическаго выраженія, такъ какъ всякое алгебраическое выраженіе означаетъ число) **въ видѣ произведенія называется разложеніемъ его на сомножителей.**

Особенно важную задачу составляетъ изображеніе цѣлаго числа въ видѣ произведенія тоже только цѣлыхъ чиселъ. Какъ извѣстно, рѣшеніе такого рода задачъ привело къ созданію понятія о простыхъ и составныхъ числахъ и къ извѣстнымъ ариѳметическимъ теоремамъ, выражающимъ признаки дѣлимости (на 3, 9, 2, 5, 2^2, 5^2, 2^3, 5^3 и т. д.).

Не менѣе важную задачу составляетъ изображеніе цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій въ видѣ произведеній тоже только цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій.

Когда идетъ рѣчь о разложеніи на сомножителей, то имѣется преимущественно въ виду разложеніе цѣлыхъ чиселъ на *простыхъ* сомножителей, цѣлыхъ же алгебраическихъ выраженій на цѣлыхъ алгебраическихъ сомножителей и притомъ тоже по возможности простыхъ, т. е. такихъ, которые, какъ и простыя числа натуральнаго ряда, дѣлятся только на 1 и сами на себя.

Всякій цѣлый **одночленъ** (если онъ не состоитъ изъ одной только буквы) уже имѣетъ видъ произведенія за исключеніемъ случая, легко приводимаго къ тому же виду, когда онъ есть частное съ численнымъ дѣлителемъ (напр., $\frac{a^2p}{4}=\frac{1}{4}a^2p$).

Слѣдовательно, говоря о разложеніи одночлена на сомножителей, мы можемъ имѣть въ виду только разложеніе его коэффиціента, если онъ цѣлое число, на простыхъ сомножителей или также многочленныхъ его сомножителей на болѣе простыхъ.

Но разложеніе многочленовъ на сомножителей составляетъ задачу, которая должна быть разсмотрѣна особо.

Примѣры.

1) Разложеніе одночлена $432a^7b^4c^3$ на множителей производится такъ:

$$432a^7b^4c^3=2^4\,.\,3^3\,.\,a^7b^4c^3$$

2) $1125(x-y)^3y^4z=3^2\,.\,5^3\,.\,(x-y)^3y^4z.$

§ 90. **Разложеніе многочленовъ на сомножителей.** На этой ступени разложеніе многочленовъ на сомножителей можетъ производиться при помощи слѣдующихъ пріемовъ, примѣняемыхъ, смотря по надобности, отдѣльно или совмѣстно однихъ съ другими:

I. ***Вынесеніе за скобки общаго множителя.***

Этотъ пріемъ состоитъ въ примѣненіи теоремы 48^a.

Примѣры.

1) $an-bn-cn+dn=n(a-b-c+d)$

2) $135a^5p^3x-225a^2p^4x^2-90a^2p^3x=45a^2p^3x(3a^3-5apx-2)$

3) $a^{3x}-2a^{x+y}+5a^x=a^x(a^{2x}-2a^y+5)$

4) $2a(x^2+2y^3)-3b^2(x^2+2y^3)+c(x^2+2y^3)=(x^2+2y^3)(2a-3b^2+c)$.

II. ***Сумма или разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ*** разлагается на сомножителей при помощи теоремъ **70** и **71** и очень часто при помощи заключающейся въ нихъ какъ частный случай теоремы **52^a**.

Примѣры.

1) $a^2b^2-9c^2=(ab+3c)(ab-3c)$.

2) По теоремѣ **70**

$$x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4).$$

3) Такъ какъ $1=1^2=1^3=1^4=1^5=\ldots=1^n$

и $(q^2)^2=q^2\,.\,q^2=q^4$, $(q^2)^3=q^2\,.\,q^2\,.\,q^2=q^6$,

вообще $(q^m)^n=q^{mn}$, то по теоремѣ **71**

$$p^7q^{14}+1=(pq^2)^7+1^7=(pq^2+1)(p^6q^{12}-p^5q^{10}+p^4q^8-p^3q^6+p^2q^4-pq^2+1).$$

4) Такимъ же примѣненіемъ теоремы **70** выраженіе $a^{12}-b^8$ разложить на множителей менѣе удобно, чѣмъ повтореннымъ примѣненіемъ теоремы **52^a**. Послѣднимъ же способомъ названное выраженіе можетъ быть разложено на сомножителей такъ:

$$a^{12}-b^8=(a^6+b^4)(a^6-b^4)=(a^6+b^4)(a^3+b^2)(a^3-b^2).$$

5) Такъ же можно разложить на сомножителей слѣдующій двучленъ:

$$x^{16}y^{48}-1=(xy^3)^{16}-1^{16}$$
$$=(x^8y^{24}+1)(x^8y^{24}-1)$$
$$=(x^8y^{24}+1)(x^4y^{12}+1)(x^4y^{12}-1)$$
$$=(x^8y^{24}+1)(x^4y^{12}+1)(x^2y^6+1)(x^2y^6-1)$$
$$=(x^8y^{24}+1)(x^4y^{12}+1)(x^2y^6+1)(xy^3+1)(xy^3-1).$$

6) $18a^5b-162a^3b^7=18a^3b(a^2-9b^6)=18a^3b(a+3b^3)(a-3b^3)$

III. ***Квадратъ суммы или разности двухъ чиселъ*** представляетъ, по теоремамъ **50** и **51**, разлагаемое на множителей выраженіе, если оно состоитъ изъ суммы двухъ квадратовъ и положительнаго или отрицательнаго удвоеннаго произведенія ихъ основаній. Напр., въ трехчленѣ $25x^6-10x^3y+y^2$ первый членъ есть квадратъ выраженія $5x^3$, послѣдній— квадратъ y, а средній удвоенное произведеніе $5x^3$ и y со знакомъ —. Слѣд., этотъ трехчленъ разлагается на множителей слѣдующимъ образомъ:

$$25x^6-10x^3y+y^2=(5x^3-y)^2.$$

Подобнымъ образомъ по числу и составу членовъ многочлена въ немъ можно узнать кубъ или высшую степень бинома (см. упражненія въ § 62).

Примѣры.

1) $9(a-b)^2+6(a-b)c+c^2=[3(a-b)+c]^2$
$=(3a-3b+c)^2$

2) $(p^3-q^2)^2-2(p^3-q^2)+1=(p^3-q^2)^2-2(p^3-q^2)\,.\,1+1^2$
$=(p^3-q^2-1)^2$

3) $8u^{15}-12u^{10}v+6u^5v^2-v^3=$
$(2u^5)^3-3\,.\,(2u^5)^2\,.\,v+3\,.\,(2u^5)\,.\,v^2-v^3=$
$(2u^5-v)^3$

4) $16a^5b-16a^4b^2+4a^3b^3=$
$4a^3b(4a^2-4ab+b^2)=4a^3b(2a-b)^2$

5) $x^{12}-2x^6y^6+y^{12}=(x^6-y^6)^2=[(x^3+y^3)(x^3-y^3)]^2$
$=[(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)]^2$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$=(x+y)^2(x-y)^2(x^2+xy+y^2)^2(x^2-xy+y^2)^2.$

IV. ***Пріемъ группировки.***

Въ многочленахъ, содержащихъ нѣсколько большее число членовъ, послѣдніе можно иногда такъ сгруппировать, что дѣлается возможнымъ примѣненіе одного изъ первыхъ трехъ пріемовъ.

Напр., сгруппировавъ въ многочленѣ

$$ac-bc+ad-bd-ae+be$$

члены такъ:

$$(ac-bc)+(ad-bd)-(ae-be),$$

мы къ каждой изъ разностей въ скобкахъ можемъ примѣнить пріемъ I, а затѣмъ еще разъ тотъ же пріемъ ко всему выраженію. Такъ мы получаемъ:

$$ac-bc+ad-bd-ae+be=c(a-b)+d(a-b)-e(a-b)=(a-b)(c+d-e).$$

Примѣры.

1) $21a^5b^4-56a^2b^3c^4-15a^3bc^3+40c^7=$
$7a^2b^3(3a^3b-8c^4)-5c^3(3a^3b-8c^4)=$
$(3a^3b-8c^4)(7a^2b^3-5c^3).$

2) $x^5-4x^3y^2-8x^2y^3+32y^5=$
$x^3(x^2-4y^2)-8y^3(x^2-4y^2)=$
$(x^2-4y^2)(x^3-8y^3)=$
$(x+2y)(x-2y)\,.\,(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=$
$(x+2y)(x-2y)^2(x^2+2xy+4y^2).$

3) $49a^2-25b^2+30bc-9c^2=$
$49a^2-(25b^2-30bc+9c^2)=$
$49a^2-[(5b)^2-2\,.\,5b\,.\,3c+(3c)^2]=$
$(7a)^2-(5b-3c)^2=$
$[7a+(5b-3c)]\,.\,[7a-(5b-3c)]=$
$(7a+5b-3c)(7a-5b+3c).$

4) Въ слѣдующемъ выраженіи можно сначала вынести общаго множителя за скобки, а затѣмъ еще при помощи группировокъ разложить на сомножителей выраженіе въ скобкахъ:

$5a^5b^2c-10a^4b^3c+5a^3b^4c+10a^4b^2c^2-10a^3b^3c^2+5a^3b^2c^3=$
$5a^3b^2c(a^2-2ab+b^2+2ac-2bc+c^2)=$
$5a^3b^2c[(a-b)^2+2(a-b)c+c^2]$
$5a^3b^2c[(a-b)+c]^2=5a^3b^2c(a-b+c)^2.$

V. ***Группировка съ разбивкою члена на два.***

Этотъ пріемъ чаще всего приходится примѣнять при разложеніи на множителей трехчлена 2-й степени вида x^2+mx+n, когда требуется представить его въ видѣ произведенія двухъ двучленовъ, а именно, въ видѣ

$$(x+a)(x+b).$$

Выполнивъ умноженіе этихъ двучленовъ, мы получаемъ

$$x^2+(a+b)x+ab$$

и заключаемъ отсюда, что для разсматриваемаго разложенія нужно коэффиціентъ при x представить въ видѣ суммы такихъ двухъ чиселъ, которыхъ произведеніе равно члену, не содержащему x.

Такъ, напр., трехчленъ

$$x^2+8x+15$$

можно разложить на сомножителей такъ:

$x^2+8x+15=x^2+3x+5x+15=$
$x(x+3)+5(x+3)=(x+3)(x+5).$

Примѣры.

1) $x^2-16x+63=x^2-7x-9x+63=x(x-7)-9(x-7)=(x-7)(x-9).$

Здѣсь коэффиціентъ при x есть сумма чиселъ -7 и -9, а 63 ихъ произведеніе.

2) $x^2-7x-30=x^2+3x-10x-30=x(x+3)-10(x+3)=(x+3)(x-10).$

Здѣсь членъ, не содержащій x, отрицателенъ, а потому можетъ быть только произведеніемъ числа положительнаго на число отрицательное. Сумму -7 и произведеніе -30 даютъ числа -10 и $+3$.

3) $21a^2-41ab+10b^2=21a^2-35ab-6ab+10b^2$
$=7a(3a-5b)-2b(3a-5b)$
$=(3a-5b)(7a-2b).$

4) $a^2-6ab+8b^2+2bc-c^2=$
$a^2-6ab+9b^2-b^2+2bc-c^2=$
$a^2-6ab+9b^2-(b^2-2bc+c^2)=$
$(a-3b)^2-(b-c)^2=$
$[(a-3b)+(b-c)]\,.\,[(a-3b)-(b-c)]$
$(a-3b+b-c)(a-3b-b+c)=$
$(a-2b-c)(a-4b+c)$.

5) $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2-x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=$
$(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

6) $3x^2y^2-x^4-y^4=x^2y^2+2x^2y^2-x^4-y^4=x^2y^2-(x^4-2x^2y^2+y^4)=$
$(xy)^2-(x^2-y^2)^2=(xy+x^2-y^2)(xy-x^2+y^2)$.

VI. *Группировка съ добавленіемъ членовъ.*

Иногда разложеніе многочлена на сомножителей при помощи объясненныхъ уже пріемовъ дѣлается возможнымъ или упрощается послѣ добавленія подходящихъ членовъ, не содержащихся еще въ немъ.

Примѣры.

1) Многочленъ

$$a^2+10ab-30b-9$$

можно было бы разложить на сомножителей и при помощи разсмотрѣнныхъ уже пріемовъ, но также, начиная съ добавленія взаимно уничтожающихся членовъ $+25b^2$ и $-25b^2$, слѣдующимъ образомъ:

$$a^2+10ab-30b-9=a^2+10ab+25b^2-25b^2-30b-9$$
$$=a^2+10ab+25b^2-(25b^2+30b+9)$$
$$=(a+5b)^2-(5b+3)^2=[(a+5b)+(5b+3)][(a+5b)-(5b+3)]$$
$$=(a+5b+5b+3)(a+5b-5b-3)$$
$$=(a+10b+3)(a-3).$$

2) Многочленъ

$$a^6-a^4+2a^3+2a^2$$

можно, примѣняя разсматриваемый здѣсь пріемъ, разложить на сомножителей такъ:

$$a^6-a^4+2a^3+2a^2=a^6+2a^3+1-a^4+2a^2-1$$
$$=a^6+2a^3+1-(a^4-2a^2+1)=(a^3+1)^2-(a^2-1)^2$$
$$=[(a^3+1)+(a^2-1)][(a^3+1)-(a^2-1)]$$
$$=(a^3+1+a^2-1)[(a+1)(a^2-a+1)-(a+1)(a-1)]$$
$$=(a^3+a^2)(a+1)[a^2-a+1-(a-1)]$$
$$=a^2(a+1)(a+1)(a^2-a+1-a+1)$$
$$=a^2(a+1)^2(a^2-2a+2).$$

3) При разсмотрѣнномъ выше способѣ разложенія на сомножителей трехчлена типа $x^2+(a+b)x+ab$ тѣ 2 числа, которыя при сложеніи даютъ коэффиціентъ при x, а при умноженіи 3-й членъ трехчлена, отыскиваются

путемъ испытаній. Но отыскиваніе ихъ такимъ образомъ можетъ иногда потребовать очень много времени. Вѣрнѣе и скорѣе ведетъ къ цѣли разсматриваемый теперь способъ, если добавлять такіе два взаимно уничтожающіеся члена, чтобы одинъ изъ нихъ былъ равенъ квадрату половины коэффиціента при x.

Покажемъ примѣненіе этого пріема на рѣшеніи первой изъ задачъ въ предыдущей группѣ примѣровъ.

Вставляя члены названнаго свойства послѣ второго члена трехчлена

$$x^2-16x+63,$$

мы получаемъ:

$$\begin{aligned} x^2-16x+63 &= x^2-16x+64-64+63 \\ &= x^2-2\cdot8\cdot x+8^2-1 \\ &= (x-8)^2-1^2 \\ &= (x-8+1)(x-8-1) \\ &= (x-7)(x-9) \end{aligned}$$

Изъ этого примѣра видно, что объясненный пріемъ даетъ рѣшеніе безъ всякаго исканія, если только вставленный отрицательный членъ и третій членъ даннаго трехчлена вмѣстѣ составляютъ отрицательный квадратъ какого-либо числа

ГЛАВА XVI

Общій наибольшій дѣлитель и общее наименьшее кратное.

§ 91 **Вступительныя замѣчанія.** Въ предыдущей главѣ мы познакомились съ тѣмъ, что въ области алгебраическихъ выраженій соотвѣтствуетъ важнымъ ариѳметическимъ понятіямъ о простомъ и составномъ числѣ и о разложеніи на сомножителей. Въ этой намъ предстоитъ распространить на алгебраическія выраженія также понятія о дѣлителяхъ и кратномъ, объ общихъ дѣлителяхъ и общихъ кратныхъ и, наконецъ, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и общемъ наименьшемъ кратномъ

Во избѣжаніе повтореній условимся, что все, что въ этой главѣ будетъ говориться о цѣлыхъ алгебраическихъ выраженіяхъ, должно считаться относящимся и къ цѣлымъ числамъ, что во всѣхъ теоремахъ, въ которыхъ будетъ говориться о «числахъ», будутъ подразумѣваться цѣлыя абсолютныя числа, и что все утверждаемое этими теоремами должно считаться относящимся и къ цѣлымъ алгебраическимъ выраженіямъ.

§ 92. **Кратныя и дѣлители.**



Опредѣленіе. Ц ѣ л о е а л г е б р а и ч е с к о е в ы р а ж е н і е, д ѣ л я щ е е с я н а ц ѣ л о (т. е. такъ, что въ частномъ получается тоже цѣлое алгебраическое выраженіе) н а д р у г о е ц ѣ л о е а л г е б р а и-

ческое выраженіе, называется кратнымъ послѣдняго, послѣднее же дѣлителемъ перваго.

На основаніи понятія о цѣломъ алгебраическомъ выраженіи произведеніе P цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій A, B, C,..., N есть также **цѣлое алгебраическое** выраженіе. На основаніи же теоремъ **67** и **63**, частное отъ дѣленія P на каждаго изъ этихъ сомножителей и на произведеніе частныхъ есть произведеніе всѣхъ остальныхъ и потому тоже цѣлое алгебраическое выраженіе. Слѣдовательно, P есть кратное какъ каждаго изъ сомножителей A, B, C,..., N, такъ и произведенія двухъ изъ нихъ или трехъ или скольких угодно, а каждый изъ этихъ сомножителей и каждое изъ этихъ произведеній — дѣлитель выраженія P. Наконецъ, въ силу этого P, какъ и вообще всякое цѣлое выраженіе, считается кратнымъ самого себя и дѣлителемъ самого себя.

§ 93. **Общій наибольшій дѣлитель.** Алгебраическія выраженія могутъ имѣть *общихъ* дѣлителе

Напр., $15a^3b^2c^4$,
$9a^4b^3c$,
$12a^5(a+b)c^2$

имѣютъ общихъ дѣлителей 3, a, a^2, a^3, c, $3ac$, $3a^2c$, $3a^3c$ Частныя отъ дѣленія приведенныхъ трехъ выраженій на послѣдняго изъ дѣлителей, состоящаго изъ наибольшаго числа простыхъ сомножителей (конечно, если считать a^3 за 3 простыхъ сомножителя), суть

$$5b^2c^3,$$
$$3ab^3,$$
$$4a^2(a+b)c.$$

Изъ нихъ первое и второе имѣютъ общихъ дѣлителей b и b^2, первое и третье общаго дѣлителя c, второе и третье общаго дѣлителя a. Но всѣ три частныя общихъ дѣлителей, кромѣ 1, уже не имѣютъ и представляютъ собою вслѣдствіе этой особенности примѣръ выраженій, обозначаемыхъ слѣдующимъ особымъ названіемъ:

Опредѣленіе. Выраженія, не имѣющія общихъ дѣ- **73**
лителей кромѣ 1, называются взаимно-простыми.

Изъ всѣхъ дѣлителей выраженій, данныхъ въ разсматриваемомъ примѣрѣ, только послѣдній $3a^3c$ даетъ взаимно-простыя частныя и вслѣдствіе этой особенности представляетъ собою примѣръ такъ называемаго *общаго наибольшаго* дѣлителя.

Опредѣленіе. Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ **74**
нѣсколькихъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій называется цѣлое же алгебраическое выраженіе, на которое всѣ они дѣлятся нацѣло такъ, что при этомъ получаются взаимно простыя частныя.

Изъ понятія объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ слѣдуетъ, что отыскивать его можно такимъ способомъ:

75 **Правило.** Чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ данныхъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій, нужно послѣднія разложить на простыхъ сомножителей. Тогда общій наибольшій дѣлитель будетъ произведеніе всѣхъ *общихъ* данымъ выраженіямъ сомножителей въ *низшей* встрѣчающейся степени.

Примѣры.

1) Чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя выраженій

$$48a^3b^4c^2,\quad 36a^2b^3c^7,\quad 60a^4b^5c^5 \text{ и } 168a^2b^6c^5d,$$

разложимъ ихъ на сомножителей:

$$48a^3b^4c^2 = 2^4 \,.\, 3 \,.\, a^3b^4c^2,$$
$$36a^2b^3c^7 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, a^2b^3c^7,$$
$$60a^4b^5c^5 = 2^2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, a^4b^5c^5,$$
$$168a^2b^6c^3d = 2^3 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, a^3b^6c^3d.$$

По правилу 75 теперь общій наибольшій дѣлитель данныхъ выраженій будетъ:

$$2^2 \,.\, 3 \,.\, a^2b^3c^2 = 12a^2b^3c^2.$$

2) Чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя выраженій

$$180a^2c^4 - 360abc^4 + 180b^2c^4,$$
$$72a^4c^3 - 144a^2b^2c^3 + 72b^4c^3,$$
$$252a^3c^5 - 756a^2bc^5 + 756ab^2c^3 - 252b^3c^5,$$

мы разлагаемъ ихъ на множителей:

$$180a^2c^4 - 360abc^4 + 180b^2c^4 = 180c^4(a^2 - 2ab + b^2) = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5c^4(a-b)^2;$$
$$72a^4c^3 - 144a^2b^3c^3 + 72b^4c^3 = 72c^3(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, c^3(a^2-b^2)^2$$
$$= 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, c^3[(a+b)(a-b)]^2 = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, c^3(a+b)^2(a-b)^2;$$
$$252a^3c^5 - 756a^2bc^5 + 756ab^2c^5 - 252b^3c^5 = 252c^5(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$$
$$= 252c^5(a-b)^3 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 7 \,.\, (a-b)^3c^5;$$

а отсюда мы по послѣднему правилу находимъ, что общій наибольшій дѣлитель данныхъ выраженій есть

$$2^2 \,.\, 3^2 \,.\, c^3(a-b)^2 = 36(a-b)^2c^3.$$

§ 94. **Общее наименьшее кратное.** Алгебраическія выраженія, имѣющія общаго дѣлителя, являются всѣ кратными его. Наоборотъ, данныя алгебраическія выраженія могутъ быть всѣ дѣлителями одного и того же выраженія, которое будетъ въ такомъ случаѣ ихъ *общимъ кратнымъ*.

Получающійся наипростѣйшимъ образомъ примѣръ общаго кратнаго нѣсколькихъ выраженій A, B, C,..., N есть ихъ произведеніе P. Всякое кратное его будетъ также кратнымъ этихъ выраженій. Такимъ образомъ общихъ кратныхъ для всякой группы данныхъ выраженій можно найти сколько угодно.

Но важно умѣть найти изъ числа ихъ наипростѣйшее, т. е. такое, которое, будучи изображено въ видѣ произведенія, состояло бы изъ возможно наименьшаго числа простыхъ сомножителей. Такое общее кратное называется *наименьшимъ* и можетъ быть опредѣлено также слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленіе. Общимъ наименьшимъ кратнымъ нѣсколькихъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій называется цѣлое же алгебраическое выраженіе, которое на всѣхъ ихъ дѣлится нацѣло такъ, что при этомъ получаются взаимно-простыя частныя. **76**

Изъ понятія объ общемъ наименьшемъ кратномъ слѣдуетъ, что отыскивать его можно слѣдующимъ способомъ:

Правило. Чтобы найти общее наименьшее кратное нѣсколькихъ данныхъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій, нужно ихъ разложить на простыхъ сомножителей. Тогда ихъ общее наименьшее кратное будетъ произведеніе *всѣхъ* встрѣчающихся въ данныхъ выраженіяхъ сомножителей въ *высшей* встрѣчающейся степени. **77**

Изъ этого правила, равно какъ уже и изъ понятія объ общемъ наименьшемъ кратномъ, слѣдуетъ, что если одно изъ данныхъ выраженій есть кратное всѣхъ остальныхъ, то оно есть общее наименьшее кратное всѣхъ ихъ.

Примѣры.

1) Чтобы найти общее наименьшее кратное выраженій

$$80x^7y^5z,\quad 72x^5y^6,\quad 60x^3y^2z^3,$$

разложимъ ихъ на сомножителей:

$$80x^7y^5z = 2^4 \,.\, 5 \,.\, x^7y^5z;$$
$$72x^5y^6 = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, x^5y^6;$$
$$80x^5y^2z^3 - 2^2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, x^5y^2z^3.$$

Теперь по правилу **77** общее наименьшее кратное данныхъ выраженій будетъ:

$$2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, x^7y^6z^3 = 720x^7y^6z^3.$$

2) Общее наименьшее кратное выраженій

$$180p^2x^3-360pqx^3+180q^2x^3,$$
$$72p^4x^5-144p^2q^2x^5+72q^4x^5,$$
$$160p^3x-480p^2qx+480pq^2x-160q^3x,$$
$$96p^2x^2+192pqx^2+96q^2x^2$$

отыскиваемъ такъ:

$$180p^2x^3-360pqx^3+180q^2x^3=180x^3(p^2-2pq+q^2)=2^2.3^2.5.(p-q)^2x^3;$$
$$72p^4x^5-144p^2q^2x^5+72q^4x^5=72x^5(p^4-2p^2q^2+q^4)=2^3.3^2.x^5(p^2-q^2)^2$$
$$=2^3.3^2.x^5[(p+q)(p-q)]^2=2^3.3^2(p+q)^2(p-q)^2x^5;$$
$$160p^3x-480p^2qx+480pq^2x-160q^3x=160x(p^3-3p^2q+3pq^2-q^3)=2^5.5.(p-q)^3x;$$
$$96p^2x^2+192pqx^2+96q^2x^2=96x^2(p^2+2pq+q^2)=2^5.3(p+q)^2x^2;$$

общее наименьшее кратное данныхъ выраженій есть

$$2^5 . 3^2 . 5 . (p+q)^2(p-q)^2x^5=1440(p+q)^2(p-q)^3x^5.$$

§ 95. **Общій способъ отысканія общаго наибольшаго дѣлителя.** Изложенный въ предыдущихъ параграфахъ способъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя не всегда въ состояніи дать результатъ, заслуживающій этого названія въ точномъ смыслѣ слова, такъ какъ при разложеніи на множителей многочленовъ высокихъ степеней могутъ встрѣтиться непреодолимыя трудности. Въ такихъ случаяхъ отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя должно производиться по способу, основанному на доказываемыхъ ниже теоремахъ.

Предварительно же замѣтимъ, что для обозначенія общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ или алгебраическихъ выраженій существуетъ краткій знакъ: пишутъ латинскую букву D (начальная буква слова divisor) и послѣ нея въ скобкахъ отдѣленныя другъ отъ друга запятыми тѣ числа или выраженія, которыхъ общій наибольшій дѣлитель долженъ быть обозначенъ. Такъ, напр., символъ

$$D(a^2-b^2,\ 3a-3b,\ a^3-a^2b)$$

означаетъ общаго наибольшаго дѣлителя выраженій a^2-b^2, $3a-3b$ и a^3-a^2b.

При помощи этого знака мы равенствомъ

$$D(a, b)=1$$

имѣемъ возможность удобно выразить, что a и b числа взаимно-простыя, а равенства

$$A=aT$$
$$B=bT$$
$$C=cT$$

въ связи съ равенствомъ

$$D(a, b, c)=1$$

выражаютъ, что T есть общій наибольшій дѣлитель выраженій A, B и C.

§ 96. **Теорема.** Если рядъ чиселъ [1]) умножимъ на одно и то же число[1]), то и общій наибольшій дѣлитель ихъ умножится на то же число [1]).

Предп. $A=aT$, $B=bT$,..., $N=nT$; $D(a, b,..., n)=1$.

Утв. $D(Ap, Bp,..., Np)=pT$.

Док. Такъ какъ по предположенію $A=aT$, то $Ap=apT$

» » » » $B=bT$, » $Bp=bpT$

. . . .

» » » » . . . . . .

. . . .

» » » » $N=nT$, » $Np=npT$.

Изъ праваго столбца равенствъ въ связи съ даннымъ въ предположеніи условіемъ

$$D(a, b,..., n)=1$$

слѣдуетъ справедливость утвержденія.

§ 97. **Теорема.** Если рядъ чиселъ раздѣлимъ на одно и то же число, то и общій наибольшій дѣлитель ихъ раздѣлится на то же число.

Предп. $A=aT$, $B=bT$, ... , $N=nT$; $D(a, b, ... , n)=1$.

Утв. $D\left(\frac{A}{q}, \frac{B}{q}, \ldots, \frac{N}{q}\right)=\frac{T}{q}$.

Док. Вслѣдствіе предположенія относительно a, b, ..., n эти числа, будучи взаимно-простыми, не имѣютъ и съ q общаго дѣлителя кромѣ 1. Слѣдовательно, если вообще каждое изъ чиселъ $A=aT$, $B=bT$,..., $N=nT$ можно раздѣлить на q, то только вслѣдствіе того, что на q дѣлится общій ихъ множитель T. Результатъ этихъ дѣленій должно потому изобразить такъ:

$$\frac{A}{q}=a\cdot\frac{T}{q},$$
$$\frac{B}{q}=b\cdot\frac{T}{q},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{N}{q}=n\cdot\frac{T}{q}.$$

А эти равенства въ связи съ предположеніемъ

$$D(a, b,..., n)=1$$

ясно показываютъ, что дѣйствительно

$$D\left(\frac{A}{q}, \frac{B}{q}, \ldots, \frac{N}{q}\right)=\frac{T}{q}.$$

---

[1]) См. § 91.

§ 98. **Теорема.** Общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ не измѣнится, если одно изъ нихъ умножимъ или раздѣлимъ на число взаимно-простое съ другимъ.

I. ***Предп.*** $A=aT$
$B=bT$
$D(a, b)=1$
$D(B, p)=1.$
Утв. $D(pA, B)=T.$

Док. Если B и p, какъ дано въ предположеніи, числа взаимно-простыя, то они вообще не имѣютъ общихъ множителей, слѣдовательно, не имѣютъ ихъ и b и p; а такъ какъ по предположенію ихъ не имѣютъ также a и b, то должны быть взаимно-простыми также число b и произведеніе ap, что выражается равенствомъ

$$D(ap, b)=1,$$

которое въ связи съ равенствами

$$pA=apT \text{ и}$$
$$B=bT$$

показываетъ, что справедливо первое изъ утвержденій, содержащихся въ теоремѣ.

II. ***Предп.*** $A=aT$
$B=bT$
$D(a, b)=1$
$D(B, q)=1.$

Утв. $D\left(\frac{A}{q}, B\right)=T.$

Док. Какъ въ доказательствѣ первой части теоремы изъ равенствъ

$$B=bT \text{ и}$$
$$D(B, q)=1$$

слѣдуетъ, что $D(q, b)=1$,
но также, что $D(q, T)=1$,

такъ что, если вообще $A=aT$ дѣлится на q, то q содержится въ a, но не въ T.

По предположенію a и b взаимно-простыя числа, слѣдовательно, должны быть подавно взаимно-простыми числа $\frac{a}{q}$ и b, такъ какъ частное $\frac{a}{q}$ должно состоять изъ всѣхъ множителей числа a кромѣ тѣхъ, изъ которыхъ состоитъ число q.

Слѣдовательно,

$$D\left(\frac{a}{q},\ b\right)=1$$

и общій наибольшій дѣлитель чиселъ

$$\frac{A}{q}=\frac{a}{q}\,.\,T$$

и

$$B=bT$$

есть T.

§ 99. **Теорема.** Многочленъ, котораго всѣ члены суть кратныя одного и того же числа, есть кратное того же числа.

Док. Что числа $A, B, C, \ldots, N$ суть кратныя одного и того же числа T, можно выразить равенствами:

$$\begin{array}{c} A=aT \\ B=bT \\ C=cT \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ N=nT \end{array}$$

Слѣд., по теор. VII:

$$\pm A\pm B\pm C\pm\ldots\pm N=\pm aT\pm bT\pm cT\pm\ldots\pm nT$$
$$=(\pm a\pm b\pm c\pm\ldots\pm n)T, \text{ по теор. } 48^a.$$

Послѣднее выраженіе есть также кратное T, а потому изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ справедливость утвержденія.

§ 100. **Теорема.** Общій наибольшій дѣлитель дѣлимаго и дѣлителя есть въ то же время общій наибольшій дѣлитель дѣлителя и остатка.

Док. Если частное отъ дѣленія числа A на число B [1]) назовемъ Q, а получающійся остатокъ R, то, какъ извѣстно,

$$A=BQ+R.$$

Слѣдовательно, по опредѣленію разности

$$A-BQ=R.$$

Если общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ A и B назовемъ T, то по предыдущей теоремѣ и R дѣлится на T. Притомъ число T должно быть общимъ *наибольшимъ* дѣлителемъ чиселъ B и R, такъ какъ въ противномъ случаѣ и A, какъ сумма чиселъ BQ и R, по той же теоремѣ, дѣлилась бы на число большее чѣмъ T [2]) и потому общимъ дѣлителемъ чиселъ A и B не могло бы быть T, какъ было предположено.

---

[1]) Или многочлена A на многочленъ B.

[2]) Или соотвѣтственно на многочленъ кратный T.

§ 101. **Способъ послѣдовательныхъ дѣленій.** На основаніи послѣдней теоремы отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя для двухъ чиселъ (или многочленовъ) можетъ быть приведено къ отысканію его для меньшаго изъ нихъ (соотвѣтственно для того изъ обоихъ многочленовъ, котораго степень ниже) и остатка, получающагося при дѣленіи большаго изъ нихъ на меньшее. Отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя для дѣлителя и остатка можетъ быть такимъ же способомъ приведено къ отысканію его для еще меньшихъ двухъ чиселъ. Продолжая такимъ образомъ, мы должны будемъ всегда предпослѣдній остатокъ дѣлить на послѣдній. Такъ какъ при этомъ остатки, будучи цѣлыми числами (или многочленами), все будутъ уменьшаться (соотвѣтственно понижаться въ степени), то мы, наконецъ, дойдемъ до остатка 0 (см. конецъ параграфа).

Дѣлитель послѣдняго дѣленія и будетъ общій наибольшій дѣлитель данныхъ двухъ чиселъ.

Если онъ окажется 1, то данныя числа взаимно-простыя.

Изложенный способъ отысканія общаго наибольшаго дѣлителя называется *способомъ послѣдовательныхъ дѣленій.*

При примѣненіи его возможны на основаніи предыдущихъ теоремъ значительныя сокращенія и упрощенія дѣйствій, которыя будутъ показаны на приведенныхъ ниже примѣрахъ. Пользоваться этими упрощеніями въ особенности необходимо при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя для многочленовъ, при чемъ еще важно замѣтить, что если они взаимно-простые, разсматриваемый способъ приводитъ не всегда къ дѣленію на 1, а иногда и къ дѣленію другъ на друга взаимно-простыхъ выраженій, для которыхъ общій наибольшій дѣлитель 1 узнается безъ производства этого дѣйствія (какъ напр., для a и b, для a^2-2b и c^3 и т. п.).

§ 102. **Отысканіе по способу послѣдовательныхъ дѣленій общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ.** Каждый дѣлитель общаго наибольшаго дѣлителя T двухъ чиселъ (или многочленовъ) A и B есть также, по смыслу и опредѣленію этихъ понятій, общій дѣлитель чиселъ A и B. Слѣдовательно общій наибольшій дѣлитель чиселъ A, B и C есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ T и C. Такъ же общій наибольшій дѣлитель четырехъ чиселъ есть общій наибольшій дѣлитель общаго наибольшаго дѣлителя трехъ изъ нихъ и четвертаго (или общаго наибольшаго дѣлителя двухъ изъ нихъ и общаго наибольшаго дѣлителя остальныхъ двухъ, и т. д.

Изъ этого разсужденія слѣдуетъ:

Правило. Если требуется по способу послѣдовательныхъ дѣленій отыскать общаго наибольшаго дѣлителя болѣе чѣмъ для двухъ чиселъ или многочленовъ, то нужно его отыскать для двухъ изъ нихъ, затѣмъ общаго наибольшаго дѣлителя для него и третьяго числа или многочлена и т. д.

Примѣры.

1) *Задача.*.

Найти общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ

397250 и 159354.

Рѣшеніе.

Оба данныя числа могутъ быть раздѣлены на 2. Но слѣдуетъ запомнить, что при этомъ и общій наибольшій дѣлитель будетъ раздѣленъ на 2.

Изъ получающихся послѣ этого дѣленія чиселъ

198625 и 79677

первое можно, по теоремѣ, доказанной въ § 98, безъ измѣненія общаго наибольшаго дѣлителя, раздѣлить на число 25, взаимно-простое со вторымъ, второе же на число 9 взаимно-простое съ первымъ.

Такъ получаются числа

7945 и 8853.

На основаніи той же теоремы мы можемъ первое изъ этихъ чиселъ еще раздѣлить на 5, второе на 3, при чемъ находимъ числа

1589 и 2951.

Теперь приступимъ къ послѣдовательнымъ дѣленіямъ:

$$\begin{array}{r|l} 2951 & 1589 \\ \cline{2-2} 1589 & 1 \\ \hline 1362 & \end{array}$$

Прежде чѣмъ дѣлить 1589 на 1362 мы можемъ послѣднее число раздѣлить на число 6, взаимно-простое съ первымъ. Произведя же затѣмъ дѣленіе:

$$\begin{array}{r|l} 1589 & 227 \\ \cline{2-2} 1589 & 7 \\ \hline 0 & \end{array}$$

мы узнаемъ, что *искомый общій наибольшій дѣлитель* есть **2 . 227 = 454.**

Повторимъ произведенныя дѣйствія безъ объяснительнаго текста, чтобы показать ***схему*** расположенія дѣйствій при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя по способу ***послѣдовательныхъ дѣленій:***

	0	1	7	... частныя
Упрощенія { 397250 : 2	159354 : 2			
198625 : 25	79677 : 9			
7945 : 5	8853 : 3			
1589	2951	1589	227	... дѣлимыя и дѣлители
	1589	1589		
Упрощеніе.... {	1362 : 6	0		..... остатки
	227			

Общ. наиб. дѣл. $: 2 . 227 = 454$.

Эти дѣйствія располагаются иногда и иначе.

Первыя упрощенія производятся особо, а затѣмъ пишутъ

$$\begin{array}{r|l} 2951 & 1589 \\ 1589 & 1 \\ \hline 1362 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1589 & 227 \\ 1589 & 7 \\ \hline 0 & \end{array}$$

2) *Задача.*

Найти общаго наибольшаго дѣлителя многочленовъ:

$2x^6-5ax^5+6a^2x^4-4a^3x^3+a^4x^2$,

$x^4-4ax^3+6a^2x^2-5a^3x+2a^4$,

$2x^4-ax^3+2a^3x-a^4$.

Рѣшеніе.

Отыщемъ сперва общаго наибольшаго дѣлителя для перваго и третьяго многочленовъ.

Предварительно можно первый изъ нихъ раздѣлить на выраженіе x^2 взаимно-простое съ послѣднимъ. Послѣ этого производимъ дѣленіе:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-5ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4 & 2x^4-ax^3+2a^3x-a^4 \\ 2x^4-\ ax^3 \qquad\qquad +2a^3x-a^4 & 1 \\ \hline -4ax^3+6a^2x^2-6a^3x+2a^4 & \end{array}$$

Раздѣливъ этотъ остатокъ на $-2a$, дѣлимъ на него прежняго дѣлителя:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 - ax^3 \qquad\quad + 2a^3x - a^4 & 2x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \\
\underline{2x^4 - 3ax^3 + 3a^2x^2 - a^3x} & \overline{x + a} \\
\qquad 2ax^3 - 3a^2x^2 + 3a^3x - a^4 & \\
\qquad \underline{2ax^3 - 3a^2x^2 + 3a^3x - a^4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Слѣдовательно, общій наибольшій дѣлитель перваго и третьяго изъ данныхъ многочленовъ есть

$$2x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3.$$

Теперь отыщемъ общаго наибольшаго дѣлителя для него и для второго изъ данныхъ многочленовъ.

Но замѣтимъ предварительно, что теорема, доказанная въ § 100 справедлива не только для послѣдняго остатка, но для всякаго, и что потому и къ каждому изъ нихъ примѣнима теорема, доказанная въ § 98.

Въ слѣдующемъ дѣленіи второго изъ данныхъ многочленовъ на полученнаго выше общаго дѣлителя мы послѣднею теоремою воспользуемся, умноживъ дѣлимое на 2, а затѣмъ и первый остатокъ на 2, чтобы избѣжать дробныхъ коэффиціентовъ въ частномъ.

Съ этими упрощеніями это дѣленіе принимаетъ такой видъ:

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 - 8ax^3 + 12a^2x^2 - 10a^3x + 4a^4 & 2x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \\
\underline{2x^4 - 3ax^3 + 3x^2a^2 - a^3x} & \overline{x, -5a} \text{ [1]} \\
\quad - 5ax^3 + 9a^2x^2 - 9a^3x + 4a^4 & \\
\quad -10ax^3 + 18a^2x^2 - 18a^3x + 8a^4 \ldots & \text{умноженный на 2 первый остатокъ} \\
\quad \underline{-10ax^3 + 15a^2x^2 - 15a^3x + 5a^4} & \\
\qquad\qquad 3a^2x^2 - 3a^3x + 3a^4 &
\end{array}$$

Послѣдняго дѣлителя нужно раздѣлить на этотъ остатокъ, предварительно раздѣленный на $3a^2$ [§ 98]:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 & x^2 - ax + a^2 \\
\underline{2x^3 - 2ax^2 + 2a^2x} & \overline{2x - a} \\
\quad - ax^2 + a^2x - a^3 & \\
\quad \underline{- ax^2 + a^2x - a^3} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Такъ мы узнаемъ, что искомый общій наибольшій дѣлитель есть

$$x^2 - ax + a^2.$$

---

[1]) Запятою обозначено, что на мѣстѣ частнаго стоятъ только частныя отъ отдѣльныхъ дѣленій. Знать дѣйствительное частное нѣтъ и надобности.

3) *Задача.*

Сократить дробь

$$\frac{6x^4-3x^3+10x^2-9x+2}{21x^5+20x^3-14x^2-25x+10}.$$

Рѣшеніе.

При помощи послѣдовательныхъ дѣленій мы находимъ общаго наибольшаго дѣлителя для числителя и знаменателя данной дроби равнымъ

$$3x^3+5x-2.$$

На этотъ многочленъ мы и сокращаемъ данную алгебраическую дробь, послѣ чего получаемъ:

$$\frac{6x^4-3x^3+10x^2-9x+2}{21x^5+20x^3-14x^2-25x+10}=\frac{2x-1}{7x^2-5}.$$

§ 103. **Отысканіе общаго наименьшаго кратнаго способомъ послѣдовательныхъ дѣленій** основывается на слѣдующемъ предложеніи:

Теорема. Общее наименьшее кратное двухъ чиселъ или многочленовъ равно произведенію одного изъ нихъ на частное отъ дѣленія другого на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Док. Если назовемъ v общее наименьшее кратное чиселъ или многочленовъ A и B, T—ихъ общаго наибольшаго дѣлителя и частныя $\frac{A}{T}$ и $\frac{B}{T}$ соотвѣтственно буквами a и b, то по смыслу примѣненныхъ обозначеній

$$D(a,\ b)=1$$

и потому

$$v=abT.$$

Дѣйствительно произведеніе abT дѣлится какъ на A, такъ и на B, и даетъ при этомъ взаимно-простыя частныя b и a [63, 67 и 76].

Но это произведеніе можетъ быть изображено такъ:

$$v=abT=aT\ .\ b=A\ .\ \frac{B}{T}$$

или

$$v=a\ .\ bT=\frac{A}{T}\ .\ B,$$

чѣмъ утвержденіе и доказано.

104. **Примѣненіе этого способа къ нѣсколькимъ числамъ.** Доказанная въ предыдущемъ параграфѣ теорема совершенно опредѣленно указываетъ, какъ найти общее наименьшее кратное *двухъ* чиселъ. Способъ же отысканія его для *нѣсколькихъ* чиселъ указывается слѣдующимъ разсужденіемъ.

Такъ какъ каждое кратное общаго наименьшаго кратнаго v двухъ чиселъ A и B есть также, по смыслу и опредѣленію этихъ понятій, общее кратное чиселъ A и B, то общее наименьшее кратное чиселъ A, B и C есть общее наименьшее кратное чиселъ v и C.

Такъ же общее наименьшее кратное четырехъ чиселъ есть общее наименьшее кратное общаго наименьшаго кратнаго трехъ изъ нихъ и четвертаго (или общаго наименьшаго кратнаго двухъ изъ нихъ и общаго наименьшаго кратнаго остальныхъ двухъ) и т. д.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

Правило. Если требуется по способу послѣдовательныхъ дѣленій отыскать общее наименьшее кратное болѣе чѣмъ для двухъ чиселъ или многочленовъ, то нужно его отыскать для двухъ изъ нихъ, затѣмъ общее наименьшее кратное для него и третьяго числа или многочлена и т. д.

При отыскапіи общаго наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ чиселъ можетъ быть достигнуто значительное упрощеніе вычисленій чрезъ соединеніе способа послѣдовательныхъ дѣленій со способомъ разложенія на множителей, какъ показано ниже во 2-мъ и 3-мъ примѣрахъ.

Замѣтимъ еще, что и для общаго наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ чиселъ существуетъ *сокращенное обозначеніе*, состоящее въ томъ, что послѣ буквы m (начальная буква латинскаго слова multiplum) пишутъ въ скобкахъ эти числа, отдѣляя ихъ запятыми другъ отъ друга. Такъ, напр., символъ

$$m(72,\ 48,\ 120)$$

означаетъ общее наименьшее кратное чиселъ 72, 48, 120, символъ

$$m(3x^2-16ax+5a^2,\ 9ax^2-a^3)$$

—общее наименьшее кратное заключенныхъ въ скобки двухъ выраженій.

Примѣры.

1) Чтобы найти общее наименьшее кратное чиселъ

$$1152,\ 1944,\ 432,\ 224,$$

можно способомъ послѣдовательныхъ дѣленій найти общихъ наибольшихъ дѣлителей первыхъ двухъ чиселъ и послѣднихъ двухъ чиселъ.

Получивъ

$$D(1152,\ 1944)=72$$

и

$$D(432,\ 224)=16,$$

умножимъ

$$1944 \text{ на } \frac{1152}{72}=16$$

и

$$432 \text{ на } \frac{224}{16}=14\,,$$

при чемъ получаемъ 31104 и 6048. Отыскавъ общаго наибольшаго дѣлителя

этихъ чиселъ, мы находимъ его равнымъ 864. Слѣдовательно, общее наименьшее кратное всѣхъ данныхъ чиселъ есть произведеніе 31104 на $\frac{6048}{864}=7$, то есть 217728.

Нетрудно убѣдиться, что для чиселъ, такъ легко разлагающихся на сомножителей, какъ данныя, другой способъ нахожденія общаго наименьшаго кратнаго (77) приводитъ скорѣе и удобнѣе къ цѣли.

2) Чтобы найти общее наименьшее кратное чиселъ

$$2812,\ 5661,\ 8075,\ 35853,$$

отыщемъ общаго наибольшаго дѣлителя первыхъ двухъ изъ нихъ, примѣняя основанныя на доказанной въ § 98 теоремѣ упрощенія. Найдя его равнымъ 37, разложимъ эти два числа на сомножителей:

$$2812=2^2 \,.\, 19 \,.\, 37$$
$$5661=3^2 \,.\, 17 \,.\, 37,$$

Теперь можно тѣмъ же способомъ отыскать общаго наибольшаго дѣлителя послѣднихъ двухъ данныхъ чиселъ. Найдя его равнымъ 323, убѣдимся, не дѣлится ли онъ на одного изъ множителей первыхъ двухъ чиселъ (17, 19 или 37). Оказывается, что

$$323=17 \,.\, 19.$$

А потому мы имѣемъ:

$$8075=5^2 \,.\, 17 \,.\, 19$$
$$35853=3 \,.\, 17 \,.\, 19 \,.\, 37.$$

Слѣдовательно, по правилу 77 искомое общее наименьшее кратное есть

$$2^2 .\ 3^2 .\ 5^2 .\ 17 \,.\, 19 \,.\, 37=3 .\ 100 .\ 35853=10755900.$$

3) Если бы требовалось найти общее наименьшее кратное для тѣхъ же многочленовъ, для которыхъ мы во 2-мъ примѣрѣ въ § 102 нашли общаго наибольшаго дѣлителя, то можно было бы начать дѣйствія такъ же, какъ тамъ. Найдя общаго наибольшаго дѣлителя перваго и третьяго многочленовъ, мы можемъ ихъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$2x^6-5ax^5+6a^2x^4-4a^3x^3+a^3x^2=x^2(x-a)(2x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)$$
$$2x^4-ax^3+2a^3x-a^4=(x+a)(2x^3-3ax^2+3a^2x-a^3).$$

Найдя для этого общаго наибольшаго дѣлителя и для второго изъ данныхъ многочленовъ общаго наибольшаго дѣлителя x^2-ax+a^2, и раздѣливъ на него этотъ многочленъ, мы получаемъ частное $x^2-3ax+2a^2$. Теперь нужно еще убѣдиться, не содержится ли въ этомъ частномъ множитель $x-a$ перваго или множитель $x+a$ третьяго изъ данныхъ многочленовъ.

Такъ мы узнаемъ, что

$$x^2-3ax+2a^2=(x-a)(x-2a).$$

Данные же многочлены теперь представляются въ слѣдующемъ окончательномъ видѣ:

$$2x^6-5ax^5+6a^2x^4-4a^3x^3+a^4x^2=x^2(x-a)(x^2-ax+a^2)(2x-a)$$
$$x^4-4ax^3+6a^2x^2-5a^3x+2a^4=(x-a)(x-2a)(x^2-ax+a^2)$$
$$2x^4-ax^3+2a^3x-a^4=(x+a)(x^2-ax+a^2)(2x-a).$$

Слѣдовательно, по правилу 77, общее наименьшее кратное данныхъ многочленовъ есть

$$x^2(x-a)(x-2a)(x+a)(x^2-ax+a^2)(2x-a)$$

или

$$x^2(x-a)(x-2a)(2x-a)(x^3+a^3) \text{ [теор. 71].}$$

ГЛАВА XVII.

Дѣйствія надъ частными.

Правила, относящіяся къ примѣненію скобокъ.

§ 105. **Приведеніе частныхъ къ общему знаменателю.** Если мы къ частнымъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ примѣнимъ первую часть теоремы 64 и расширимъ первое изъ нихъ на d, второе на b, то получаемъ:

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$$

и

$$\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd},$$

т. е. частныя съ одинаковыми дѣлителями.

Такое преобразованіе нѣсколькихъ данныхъ частныхъ, при которомъ всѣ они пріобрѣтаютъ одного и того же дѣлителя, называется приведеніемъ ихъ къ общему знаменателю[1]).

Такъ какъ пріемомъ, при помощи котораго оно можетъ быть достигнуто, можетъ быть только расширеніе данныхъ частныхъ, то общій знаменатель ихъ долженъ быть во всякомъ случаѣ общее кратное ихъ дѣлителей.

---

[1]) Было бы послѣдовательно, говоря о частныхъ, называть это преобразованіе приведеніемъ къ общему дѣлителю. Но терминъ «общій дѣлитель» имѣетъ уже другое значеніе. Потому, во избѣжаніе недоразумѣній, должно отдать предпочтеніе приведенному выше обозначенію, могущему быть отнесеннымъ въ сущности только къ дробямъ, но не къ частнымъ всякаго значенія.

Такихъ общихъ кратныхъ ихъ (слѣдовательно, и способовъ приведенія къ общему знаменателю) можетъ быть найдено безчисленное множество (см. § 94). Но изъ нихъ слѣдуетъ отдать предпочтеніе *наименьшему*, такъ какъ только при такомъ выборѣ получится наипростѣйшій видъ приведенныхъ къ общему знаменателю частныхъ.

Если, напр., требуется привести къ общему знаменателю частныя

$$\frac{x}{9a^3-6a^2b+ab^2},\ \frac{y}{27a^3-b^3},\ \frac{z}{9a^2b+3ab^2+b^3},$$

то рѣшеніе такой задачи нужно начать съ отысканія общаго наименьшаго кратнаго ихъ дѣлителей. Послѣднее же мы находимъ такъ:

$$9a^3-6a^2b+ab^2=a(9a^2-6ab+b^2)=a(3a-b)^2$$
$$27a^3-b^3=(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$$
$$9a^2b+3ab^2+b^3=b(9a^2+3ab+b^2).$$

Слѣд., по правилу 77, искомый общій знаменатель есть

$$ab(3a-b)^2(9a^2+3ab+b^2).$$

Имѣя предъ собою это выраженіе и дѣлителей въ томъ видѣ, который они получили послѣ разложенія на сомножителей, мы сейчасъ же видимъ, какихъ сомножителей у котораго изъ нихъ не достаетъ до тѣхъ, изъ которыхъ состоитъ общій знаменатель. Такимъ образомъ узнается для каждаго изъ данныхъ частныхъ такъ называемый *дополнительный множитель*, чрезъ расширеніе на котораго оно приводится къ общему знаменателю. У дѣлителя перваго частнаго будутъ на лицо всѣ сомножители общаго знаменателя, если къ сомножителямъ $a(3a-b)^2$, изъ которыхъ онъ состоитъ, добавить сомножителей $b(9a^2+3ab+b^2)$. Послѣднее выраженіе и есть дополнительный множитель для перваго изъ данныхъ частныхъ. Такимъ же образомъ мы узнаемъ, что для второго онъ будетъ $ab(3a-b)$, а для третьяго $a(3a-b)^2$. Послѣ указаннаго расширенія на этихъ множителей мы получаемъ рѣшеніе:

$$\frac{x}{9a^3-6a^2b+ab^2}=\frac{x}{a(3a-b)^2}=\frac{b(9a^2+3ab+b^2)x}{ab(3a-b)^2(9a^2+3ab+b^2)}=\frac{b(9a^2+3ab+b^2)x}{ab(3a-b)(27a^3-b^3)};$$

$$\frac{y}{27a^3-b^3}=\frac{y}{(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)}=\frac{ab(3a-b)y}{ab(3a-b)^2(9a^2+3ab+b^2)}=\frac{ab(3a-b)y}{ab(3a-b)(27a^3-b^3)};$$

$$\frac{z}{9a^2b+3ab^2+b^3}=\frac{z}{b(9a^2+3ab+b^2)}=\frac{a(3a-b)^2z}{ab(3a-b)^2(9a^2+3ab+b^2)}=\frac{a(3a-b)^2z}{ab(3a-b)(27a^3-b^3)}.$$

Полезно замѣтить, что если въ общемъ знаменателѣ возможны какія-либо упрощенія его вида чрезъ выполненіе умноженій, какъ въ данномъ примѣрѣ, то ихъ должно производить только послѣ отысканія дополнительныхъ множителей.

По теоремѣ **53**^{2} можно придать видъ частнаго съ какимъ угодно дѣлителемъ и такому выраженію, которое этого вида еще не имѣетъ. Такъ, напр., u или двучленъ $3p^2-5q$ можно привести къ тому же общему знаменателю, къ которому мы привели данныя въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ частныя, слѣдующимъ образомъ:

$$u=\frac{ab(3a-b)(27a^3-b^3)u}{ab(3a-b)(27a^3-b^3)};$$

$$3p^2-5q=\frac{ab(3a-b)(27a^3-b^3)(3p^2-5q)}{ab(3a-b)(27a^3-b^3)}.$$

§ 106. **Сложеніе и вычитаніе частныхъ.** По теоремѣ **56**, многочленъ, члены котораго суть частныя съ одинаковыми дѣлителями, можетъ быть замѣненъ однимъ частнымъ. Въ предыдущемъ же параграфѣ было показано, какъ можно частныя, сколько бы ихъ ни было дано, преобразовать такъ, чтобы дѣлители ихъ сдѣлались равными, и какъ можно и всякому другому одночлену придать видъ частнаго съ такимъ же дѣлителемъ. Слѣдовательно, всякая сумма и всякая разность частныхъ, а также частныхъ и другихъ одночленовъ, можетъ быть представлена въ видѣ одного частнаго. Такое преобразованіе называется сложеніемъ и вычитаніемъ ихъ. Производится же оно такимъ образомъ, что сначала данныя частныя и данные другіе одночлены приводятся къ общему знаменателю, а затѣмъ примѣняется правило **56**.

Для запоминанія резюмируемъ дополненіе къ нему, составляющее содержаніе послѣднихъ двухъ параграфовъ, слѣдующимъ образомъ:

Правило. При сложеніи и вычитаніи частныхъ 78
(дробей) **послѣднія при помощи расширенія нужно привести къ одному дѣлителю** ***(общему знаменателю)*****, избирая этимъ общимъ знаменателемъ общее наименьшее кратное дѣлителей** ***(знаменателей)*** **всѣхъ данныхъ частныхъ** ***(дробей)*****.**

По этому правилу и по теоремѣ **56** мы имѣемъ:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=\frac{anp}{mnp}+\frac{bmp}{mnp}+\frac{cmn}{mnp}=\frac{anp+bmp+cmn}{mnp}.$$

Не трудно убѣдиться, что отъ перемѣны порядка данныхъ въ рѣшенной задачѣ слагаемыхъ не измѣнились бы ни общій знаменатель, ни дополнительные множители. Измѣнился бы только порядокъ слагаемыхъ въ дѣлимомъ рѣшенія, не измѣняющій величины дѣлимаго, слѣдовательно, и величины получающагося частнаго.

Сказанное остается справедливымъ, сколько бы частныхъ ни слагалось, какого бы они ни были знака, и какая бы при этомъ ни избиралась группировка слагаемыхъ.

А изъ этого слѣдуетъ, что различные знаменатели у дробей не создаютъ какого бы то ни было препятствія тому, чтобы и для нихъ оставались въ силѣ всѣ доказанныя до сихъ поръ теоремы о сложеніи и вычитаніи [Ср. § 70].

Значитъ, теперь окончательно выяснено, что эти теоремы справедливы какъ для абсолютныхъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, такъ и для относительныхъ цѣлыхъ чиселъ и дробей.

Примѣры.

Задача 1.

Представить въ видѣ *одной* алгебраической дроби выраженіе

$$\frac{5-2a}{48a^3b^2}-\frac{a-3b^2}{72a^2b^4}+\frac{7}{36b^5}.$$

Рѣшеніе.

Сначала нужно отыскать общаго знаменателя, что удобно производить по слѣдующему образцу:

$$\left.\begin{array}{l} 48a^3b^2=2^4\,.\,3\,.\,a^3b^2\\ 72a^2b^4=2^3\,.\,3^2\,.\,a^2b^4\\ 36b^5\;=2^2\,.\,3^2\,.\,b^5 \end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{Общій знаменатель:}\\ 2^4\,.\,3^2\,.\,a^3\,.\,b^5=144a^3b^5\end{array}\left|\begin{array}{l}\text{Дополнительные}\\ \quad\text{множители:}\\ 3b^3\\ 2ab\\ 2^2\,.\,a^3=4a^3\end{array}\right.$$

Пользуясь табличкою дополнительныхъ множителей, мы теперь предписанное преобразованіе производимъ такъ:

$$\frac{5-2a}{48a^3b^2}-\frac{a-3b^2}{72a^2b^4}+\frac{7}{36b^5}=\frac{(5-2a)\,.\,3b^3}{48a^3b^2\,.\,3b^3}-\frac{(a-3b^2)\,.\,2ab}{72a^2b^4\,.\,2ab}+\frac{7\,.\,4a^3}{36b^5\,.\,4a^3}=$$
$$\frac{15b^3-6ab^3}{144a^3b^5}-\frac{2a^2b-6ab^3}{144a^3b^5}+\frac{28a^3}{144a^3b^5}=\frac{15b^3-6ab^3-(2a^2b-6ab^3)+28a^3}{144a^3b^5}=$$
$$\frac{15b^3-6ab^3-2a^2b+6ab^3+28a^3}{144a^3b^5}=\frac{28a^3-2a^2b+15b^3}{144a^3b^5}.$$

Задача 2.

Упростить выраженіе

$$\frac{a}{18ax+36x^2}-\frac{2x}{30ax-15a^2}-\frac{a-4x}{60ax}+\frac{9a-2x}{45a^2-180x^2}.$$

Рѣшеніе.

Мы обращаемъ напередъ вниманіе на то, что, отыскивая общаго знаменателя, мы во второмъ изъ знаменателей получимъ сомножителя $2x-a$, а въ четвертомъ сомножителя $a-2x$. Абсолютное значеніе этихъ множителей одно и то же, почему достаточно, чтобы только одинъ изъ нихъ встрѣчался въ числѣ множителей общаго знаменателя.

Послѣ этого замѣчанія ходъ рѣшенія будетъ понятенъ и безъ дальнѣйшихъ объясненій:

	Общій знаменатель:	Дополнительные множители:
$18ax+36x^2=18x(a+2x)$ $=2\,.\,3^2\,.\,x(a+2x)$		$2\,.\,5\,.\,a(a-2x)=10a(a-2x)$
$30ax-15a^2=15a(2x-a)$ $=3\,.\,5\,.\,a(2x-a)$ $=-3\,.\,5\,.\,a(a-2x)$	$2^2\,.\,3^2\,.\,5\,.\,ax(a+2x)(a-2x)$ $=180ax(a+2x)(a-2x)=N$	$-2^2\,.\,3\,.\,x(a+2x)=$ $-12x(a+2x)$
$60ax=2^2\,.\,3\,.\,5\,.\,ax$		$3(a+2x)(a-2x)$
$45a^2-180x^2=45(a^2-4x^2)$ $=3^2\,.\,5(a+2x)(a-2x)$		$2^2\,.\,ax=4ax$

$$\frac{a}{18ax+36x^2}-\frac{2x}{30ax-15a^2}-\frac{a-4x}{60ax}+\frac{9a-2x}{45a^2-180x^2}=\frac{10a^2(a-2x)}{N}-$$

$$\frac{-24x^2(a+2x)}{N}-\frac{3(a-4x)(a+2x)(a-2x)}{N}+\frac{4ax(9a-2x)}{N}=\frac{10a^3-20a^2x}{N}-$$

$$\left(-\frac{24ax^2+48x^3}{N}\right)+\frac{-(3a^3-12a^2x-12ax^2+48x^3)}{N}+\frac{36a^2x-8ax^2}{N}=$$

$$\frac{10a^3-20a^2x+24ax^2+48x^3-3a^3+12a^2x+12ax^2-48x^3+36a^2x-8ax^2}{N}=$$

$$\frac{7a^3+28a^2x+28ax^2}{N}=\frac{7a(a^2+4ax+4x^2)}{N}=\frac{7a(a+2x)^2}{180ax(a+2x)(a-2x)}=\frac{7(a+2x)}{180x(a-2x)}.$$

§ 107. **Теорема**. На частное можно множить, умножая на его дѣлимое и дѣля полученный результатъ на его дѣлителя.

Утв. $\frac{a}{b}\,.\,n=\frac{a\,.\,n}{b}$.

Док. Если n и частное $\frac{a}{b}$ цѣлыя числа, то въ произведеніи $n\,.\,\frac{a}{b}$ множимое $\frac{a}{b}$ мы можемъ сдѣлать множителемъ, а множителя n множимымъ, не измѣняя при этомъ величины произведенія [4]. Слѣдовательно (пока еще только при упомянутомъ выше условіи), по теоремѣ 58,

$$\frac{a}{b}\,.\,n=\frac{a\,.\,n}{b}.$$

§ 108. **Введеніе умноженія на дробь.** По первоначальному опредѣленію умноженія [3] множителемъ можетъ быть только абсолютное цѣлое число, и не могутъ имъ быть также ни 1, ни 0. Затѣмъ понятіе объ умноженіи было расширено и было введено

умноженіе на цѣлыя относительныя числа и на 0 [§ 52], а также на 1 (конецъ § 28).

Чтобы произведенія, содержащія сомножителями частныя, имѣли всегда **смыслъ**, понятіе объ умноженіи опять расширяется и вводится умноженіе на дробныя числа. Смыслъ, въ которомъ слѣдуетъ это сдѣлать, указанъ теоремою, доказанною въ предыдущемъ параграфѣ. Умноженіе на дробь примѣняется уже и въ обыкновенной ариѳметикѣ и, какъ извѣстно изъ нея, не даетъ недоразумѣній или противорѣчій при рѣшеніи практическихъ задачъ. Ходомъ всѣхъ дальнѣйшихъ разсужденій подтвердится, что и въ теоріи не получится нигдѣ противорѣчій, если это расширеніе понятія объ умноженіи будетъ произведено слѣдующимъ образомъ:

79 **Опредѣленіе**. Умножить на дробь значитъ умножить на ея числителя и полученный результатъ раздѣлить на ея знаменателя.

По этому опредѣленію не только въ томъ случаѣ, когда частное a означаетъ цѣлое число [§ 107], но и въ случаѣ дробнаго значенія его должно быть:

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{an}{b}.$$

Но, по теоремѣ **58**, и

$$a \cdot \frac{n}{b} = \frac{an}{b}.$$

А поэтому изъ теоремы, доказанной въ § 107, и опредѣленія **79** получается:

Слѣдствіе. На дробь *(вообще на частное)* можно множить, дѣля на ея знаменателя *(его дѣлителя)* и умножая полученный результатъ на ея числителя *(его дѣлимое)*.

Примѣчаніе.

Когда умноженіе на дробь опредѣляется такъ:

«умножить число на дробь $\frac{p}{q}$ значитъ взять $\frac{p}{q}$ этого числа»

или, что то же самое,

«умножить число на дробь $\frac{p}{q}$ значитъ повторить p разъ q-ую часть этого числа»,

то за опредѣленіе умноженія на дробь берется приведенное только-что слѣдствіе изъ опредѣленія **79**.

§ 109. **Умноженіе частныхъ.**

Теорема. Частныя (*дроби*) умножаютъ между собою, умножая ихъ дѣлимыя (*числителей*) между собою и ихъ дѣлителей (*знаменателей*) между собою. **80**

Утв. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Док. I. Если множитель $\frac{a}{b}$ цѣлое число, напр. n, то по опредѣленію **53*** $a=bn$. Слѣдовательно,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = n \cdot \frac{c}{d} = \frac{nc}{d} \qquad [\text{теор. } 58]$$

и

$$\frac{ac}{bd} = \frac{bnc}{bd} = \frac{nc}{d} \qquad [\text{теор. } 64]$$

Слѣд., по теоремѣ **VI**:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

II. Если a дробь, то по опредѣленію **79**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(a \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot b$$

$$= \frac{ac}{d} : b \qquad [\text{теор. } 58]$$

$$= \frac{ac}{bd} \qquad [\text{теор. } 60].$$

Доказавъ справедливость теоремы для произведенія двухъ частныхъ, мы убѣждаемся въ справедливости ея для произвольнаго количества ихъ, умножая другъ на друга сначала два изъ нихъ, ихъ произведеніе на третье и т. д.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что отъ измѣненія порядка перемножаемыхъ между собою частныхъ можетъ измѣниться только порядокъ сомножителей въ дѣлимомъ и дѣлителѣ получающагося въ результатѣ частнаго, слѣдовательно, не можетъ измѣниться величина результата.

А изъ этого далѣе слѣдуетъ, что и для дробей остаются справедливыми доказательства теоремъ въ § 18.

Изъ всего же сказаннаго вытекаетъ результатъ, что и для дробей должны оставаться въ силѣ всѣ теоремы объ умноженіи, содержащіяся во второй главѣ [1]).

§ 110. **Дополненіе къ доказательству теоремы 48**. Введя умноженіе на дробь, мы должны дополнить доказательство теоремы 48 и доказать справедливость ея и для того случая, когда множитель дробное число.

Если m дробь, напр. $\frac{p}{q}$, то

$$m(a-b+c)=\frac{p}{q}(a-b+c)$$

$$=\frac{p(a-b+c)}{q} \quad \text{[опред. 79]}$$

$$=\frac{pa-pb+pc}{q} \quad \text{[теор. 48]}$$

$$=\frac{pa}{q}-\frac{pb}{q}+\frac{pc}{q} \quad \text{[теор. 57]}$$

$$=\frac{p}{q}\cdot a-\frac{p}{q}\cdot b+\frac{p}{q}\cdot c \quad \text{[теор. 59]};$$

съ другой стороны:

$$ma-mb+mc=\frac{p}{q}\cdot a-\frac{p}{q}\cdot b+\frac{p}{q}\cdot c$$

$$\overline{m(a-b+c)=ma-mb+mc,} \quad \Big\{\text{Слѣд., по теор. VI:}$$

что и требовалось доказать [2]).

Вмѣстѣ же съ этимъ доказано, что, каковы бы ни были значенія буквъ, цѣлыя или дробныя, всегда

$$ma-mb+mc=m(a-b+c)$$

или

$$am-bm+cm=(a-b+c)m,$$

такъ что, напр.,

$$1\tfrac{2}{9}x+\tfrac{5}{6}x-\tfrac{3}{4}x=(1\tfrac{2}{9}+\tfrac{5}{6}-\tfrac{3}{4})x=1\tfrac{11}{36}x.$$

А изъ этого слѣдуетъ, что доказательство теоремы 20, слѣдовательно, и сама она, справедливы и для дробныхъ коэффиціентовъ.

---

[1]) Слѣдовательно, и для дробей остаются въ силѣ перемѣстительный и сочетательный законы умноженія.

[2]) Отсюда слѣдуетъ, что и для дробей остается въ силѣ распредѣлительный законъ умноженія.

§ 111 **Второе расширеніе значенія буквъ**. Изъ понятія о дѣленіи слѣдуетъ, что вмѣстѣ съ введеніемъ умноженія на дробь вводится и дѣленіе на дробь. Такимъ образомъ мы и на дроби распространили понятія о всѣхъ дѣйствіяхъ, о которыхъ до сихъ поръ была рѣчь; и только показатель степени попрежнему можетъ пока еще быть только числомъ натуральнаго ряда. По большей части доказательства разсмотрѣнныхъ до сихъ поръ теоремъ остаются справедливыми и для дробей, для немногихъ остальныхъ нужны такія дополненія, какое нами было сдѣлано въ предыдущемъ параграфѣ для теоремы **48**. Подобныя дополненія нужны еще для теоремъ отъ **58** до **67**. Но ихъ удобнѣе будетъ сдѣлать послѣ доказательства теоремы **82**; а такъ какъ произвести ихъ очень нетрудно, то мы и предоставляемъ самимъ учащимся дать эти дополненія въ видѣ упражненія.

Теперь ничто уже не препятствуетъ тому, чтобы отнынѣ всякая буква могла означать и дробное число, какъ абсолютное, такъ и относительное, и не только во всѣхъ предстоящихъ разсужденіяхъ, но и во всѣхъ предложеніяхъ, доказанныхъ до сихъ поръ, почему эти послѣднія и выражены уже въ формѣ, остающейся въ силѣ и въ томъ случаѣ, когда числа, упоминаемыя въ нихъ, суть дроби.

§ 112 **Дѣленіе частныхъ**. При формулированіи правила дѣленія на частное можно воспользоваться слѣдующимъ *понятіемъ, вообще часто примѣнимымъ въ математическихъ наукахъ:*

Опредѣленіе. Два числа, произведеніе которыхъ равняется 1, называются обратными другъ другу. **81**

Напр.,

$\frac{3}{4}$ есть число обратное $\frac{4}{3}$,
$2\frac{2}{7}$ » » » $\frac{7}{16}$,
5 » » » $\frac{1}{5}$,
$\frac{a}{b}$ » » » $\frac{b}{a}$,
c » » » $\frac{1}{c}$,
$\frac{1}{d}$ » » » d.

Теорема. Чтобы раздѣлить на какое-либо число *(на дробь)*, можно умножить на число обратное ему *(на дробь обратную ей)*. **82**

Утв. $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$.

Док. Обозначимъ $a : \frac{b}{c}$ буквою x. Въ такомъ случаѣ равенство

$a : \frac{b}{c} = x$ — выражаетъ, что x есть [какъ и $a : \frac{b}{c}$] число, которое, будучи умножено на $\frac{b}{c}$, дастъ a. Но это можетъ быть выражено и такъ:

$a = \frac{b}{c} \cdot x.$ — Отсюда же, по теоремѣ **58**, слѣдуетъ:

$a = \frac{bx}{c}.$ — Но $\frac{bx}{c}$, слѣд., и a, есть число, которое будучи умножено на c, дастъ bx. А это можетъ быть выражено и такъ:

$ac = bx.$ — Изъ этого же равенства мы видимъ, что x есть число, которое, будучи умножено на b, даетъ ac. Но это можно выразить и такъ:

$\frac{ac}{b} = x.$ — А отсюда, по теоремѣ **59**, слѣдуетъ:

$a \cdot \frac{c}{b} = x.$

Сравнивая первое и послѣднее равенства въ доказательствѣ, мы, по теор. **VI**, заключаемъ, что дѣйствительно:

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}.$$

Примѣчаніе.

По этой теоремѣ всякое дѣленіе можетъ быть сведено къ умноженію. Напр.,

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b},$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}.$$

§ 113. **Примѣры умноженія и дѣленія частныхъ.**

$$1) \quad 6a^2bp^6 \cdot \frac{b^3}{15a^7p^4q^5} = \frac{6a^2bp^6 \cdot b^3}{15a^7p^4q^5} \quad [\text{теор. } \mathbf{58}]$$

$$= \frac{2b^4p^2}{5a^5q^5} \quad [\text{теоремы } \mathbf{64}, \mathbf{59}, \mathbf{68}].$$

2) $\frac{21pr^2}{8qx^3} \cdot \frac{4}{9}q^3r^4 = \frac{21pr^2}{8qx^3} \cdot \frac{4q^3r^4}{9}$ [теор. **58**]

$= \frac{21pr^2 \cdot 4q^3r^4}{8qx^3 \cdot 9}$ [теор. **80**]

$= \frac{7pq^2r^6}{6x^3}$ [теоремы **13**, **13a**, **64**, **59**, **16**].

3) $\frac{30m^6-25m^5n+5m^4n^2}{4n^2-8np+4p^2} : (30m^7n-10m^6n^2-30m^7p+10m^6np)$

$= \frac{5m^4(6m^2-5mn+n^2)}{4(n^2-2np+p^2)} : 10m^6(3mn-n^2-3mp+np)$

$= \frac{5m^4(6m^2-3mn-2mn+n^2)}{4(n-p)^2} : 10m^6[n(3m-n)-p(3m-n)]$

$= \frac{5m^4[3m(2m-n)-n(2m-n)]}{4(n-p)^2} : 10m^6(3m-n)(n-p)$

$= \frac{5m^4(2m-n)(3m-n)}{4(n-p)^2} : 10m^6(3m-n)(n-p)$

[по правиламъ §90]

$= \frac{5m^4(2m-n)(3m-n)}{4(n-p)^2 \cdot 10m^6(3m-n)(n-p)}$ [теор. **60**]

$= \frac{2m-n}{8m^2(n-p)^3}$ [теоремы **13**, **64**, **67**, **59**, **68**, **16**].

4) $\frac{3a^3b}{10c^2} \cdot \frac{5bc^3}{6a^2} \cdot \frac{8ac}{9b^3} = \frac{3a^3b \cdot 5bc^3 \cdot 8ac}{10c^2 \cdot 6a^2 \cdot 9b^3}$ [теор. **80**]

$= \frac{2a^2c^2}{9b}$.

5) $\frac{8}{15}ax^3y \cdot \frac{10by^2}{9x^2} \cdot \frac{27cx^4}{16y^5} = \frac{8ax^3y \cdot 10by^2 \cdot 27cx^4}{15 \cdot 9x^2 \cdot 16y^5} = \frac{abcx^5}{y^2}$.

6) $\frac{2}{3}(a^2c-6abc+9b^2c) : \frac{5a^2c^3-15abc^3}{27a-9b} = \frac{2(a^2-6ab+9b^2)c}{3} : \frac{5ac^3(a-3b)}{9(3a-b)}$

$= \frac{2(a-3b)^2c}{3} \cdot \frac{9(3a-b)}{5ac^3(a-3b)}$ [теор. **82**]

$= \frac{2(a-3b)^2c \cdot 9(3a-b)}{3 \cdot 5ac^3(a-3b)} = \frac{6(a-3b)(3a-b)}{5ac^2}$.

7) $\frac{24x^my^5}{35z^{11}} : \frac{60x^4y^n}{49z^{10}} = \frac{24x^my^5}{35z^{11}} \cdot \frac{49z^{10}}{60x^4y^n}$ [теор. **82**]

$= \frac{24x^my^5 \cdot 49z^{10}}{35z^{11} \cdot 60x^4y^n} = \frac{14x^{m-4}}{25y^{n-5}z}$.

$$8)\quad 0{,}5\,\frac{a^2}{b}\left(ab^2-2b^3-0,(6)\,\frac{b^4}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b}\cdot ab^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b}\cdot 2b^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{b^4}{a}\quad\text{[теор. 48]}$$

$$=\frac{a^3b^2}{2b}-\frac{2a^2b^3}{2b}-\frac{2a^2b^4}{2\cdot 3\cdot ab}\quad\text{[теор. 58 и 80]}$$

$$=\frac{a^3b}{2}-a^2b^2-\frac{ab^3}{3}\quad\text{[теор. 64, 59, 67, 68]}$$

$$=\frac{1}{2}\,a^3b-a^2b^2-\frac{1}{3}\,ab^3\quad\text{[теор. 82]}$$

$$9)\quad\left(\frac{2px}{3qy}-5p^2x^2+\frac{10p^3qx^3y}{9}\right)\left(\frac{3qy}{4px}-\frac{1}{5}\,q^2y^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{15pqxy}{4}+\frac{5p^2q^2x^2y^2}{6}-\frac{2pqxy}{15}+p^2q^2x^2y^2-\frac{2p^3q^3x^3y^3}{9}$$

[по теоремѣ **49** и по сокращенiи]

$$=\tfrac{1}{2}-3\tfrac{3}{4}pqxy+\tfrac{5}{6}p^2q^2x^2y^2-\tfrac{2}{15}pqxy+p^2q^2x^2y^2-\tfrac{2}{9}\,p^3q^3x^3y^3\quad\text{[теор. 59]}$$

$$=\tfrac{1}{2}-3\tfrac{53}{60}\,pqxy+1\tfrac{5}{6}\,p^2q^2x^2y^2-\tfrac{2}{9}\,p^3q^3x^3y^3\quad\text{[теор. 20]}.$$

$$10)\quad\left(\frac{25x^2}{36y^3}-\frac{5x}{12y^2}+\frac{1}{4y}\right):\frac{5x^2}{8y^2}=\frac{25x^2\cdot 8y^2}{36y^3.5x^2}-\frac{5x\cdot 8y^2}{12y^2\cdot 5x^2}+\frac{8y^2}{4y.5x^2}\text{[теор. 57, 82, 80]}$$

$$=\frac{10}{9y}-\frac{2}{3x}+\frac{2y}{5x^2}\quad\text{[по сокращенiи]}.$$

§ 114. **Обзоръ теоремъ о дѣйствiяхъ второго разряда надъ произведенiемъ и частнымъ.** Теоремы, доказанныя въ §§ 14, 18, 71, 72, 73, 74, 107, и 112, и слѣдствiя изъ нихъ содержать всѣ правила, необходимыя для того, чтобы можно было соединить чрезъ умноженiе и дѣленiе *произведенiе* и *частное* двухъ чиселъ съ третьимъ числомъ, и къ нимъ сводятся *всѣ случаи соединенiя между собою трехъ чиселъ дѣйствiями второго разряда*.

Обзоръ всѣхъ возможныхъ случаевъ такого соединенiя даютъ слѣдующiя равенства, изъ которыхъ тѣ, которыя помѣщены въ послѣднихъ 4 строкахъ, вытекаютъ какъ слѣдствiе, по теоремѣ V, изъ тѣхъ, которыя помѣщены въ первыхъ 4 строкахъ:

1) $(ab)\,.\,c=(ac)\,.\,b=a\,.\,(bc)$
2) $(ab):c=(a:c)\,.\,b=a\,.\,(b:c)=a:(c:b)$
3) $(a:b)\,.\,c=(ac):b=a:(b:c)=a\,.\,(c:b)$
4) $(a:b):c=(a:c):b=a:(bc)$

5) $a\,.\,(bc)=abc=acb$
6) $a:(bc)=(a:b):c=(a:c):b$
7) $a\,.\,(b:c)=(ab):c=(a:c)\,.\,b=a:(c:b)$
8) $a:(b:c)=(a:b)\,.\,c=(ac):b=a\,.\,(c:b)$.

Если сравнить эти 8 строкъ равенствъ съ 8 строками равенствъ въ § 26, то оказывается, что вся разница между ними состоитъ только въ томъ, что тутъ стоитъ всякiй разъ знакъ умноженiя, когда тамъ стоитъ знакъ сложенiя, и здѣсь всякiй разъ знакъ дѣленiя, когда тамъ стоитъ знакъ вычитанiя; и въ томъ еще, что тутъ во 2-й и 7-й и въ 3-й и 8-й строкахъ стоитъ по выраженiю больше, чѣмъ тамъ. Но тутъ обзоръ дается уже по введенiи дробныхъ чиселъ, тамъ же онъ былъ данъ еще до введенiя чиселъ отрицательныхъ. По введенiи послѣднихъ и тамъ должны быть добавлены во 2-й и 7-й строкахъ выраженiе $a - (c - b)$ и въ 3-й и 8-й выраженiе $a + (c - b)$.

Сравниваемыя двѣ группы равенствъ обнаруживаютъ съ особенною отчетливостью то сходство между теоремами, относящимися къ дѣйствiямъ перваго разряда, и теоремами, относящимися къ дѣйствiямъ второго разряда, которое должно было обратить на себя вниманiе и до этого, наравнѣ съ другими аналогiями, о которыхъ особо будетъ говориться позднѣе. Каждой теоремѣ первой категорiи непремѣнно соотвѣтствуетъ теорема послѣдней и наоборотъ. Такъ и соотвѣтствующее теоремѣ **18** предложенiе существуетъ и будетъ нами ниже доказано.

И для тѣхъ теоремъ, которыя касаются одновременнаго соединенiя между собою чиселъ дѣйствiями перваго и второго разрядовъ (напр., для теоремъ **15**, **20**, **48**, **56** и **57** и т. п.) существуютъ аналогичныя. Но онѣ могутъ быть даны только позднѣе при помощи дѣйствiй третьяго (высшаго) разряда, изъ которыхъ дано понятiе пока только объ одномъ: о возвышенiи въ степень.

Теорема. От ъ порядка, въ которомъ производятся одно послѣ другого умноженiя и дѣленiя на нѣсколько какихъ-либо чиселъ, окончательный результатъ этихъ дѣйствiй не зависитъ. **18ª**

Док. Положимъ, что надъ числами a, b, c, d и e должно произвести одно послѣ другого дѣйствiя, указываемыя выраженiемъ

$$a : b : c \,.\, d \,.\, e$$

и сравнимъ съ результатомъ этихъ дѣйствiй тотъ, который получится отъ производства тѣхъ же дѣйствiй въ такомъ порядкѣ:

$$a \,.\, d : c : b \,.\, e.$$

Замѣняя въ этихъ выраженiяхъ дѣленiя умноженiями по правилу, изложенному въ примѣчанiи къ теоремѣ **82**, мы имѣемъ:

$$a : b : c \,.\, d \,.\, e = a \,.\, \frac{1}{b} \,.\, \frac{1}{c} \,.\, d \,.\, e$$

$$a \,.\, d : c : b \,.\, e = a \,.\, d \,.\, \frac{1}{c} \,.\, \frac{1}{b} \,.\, e.$$

Правыя же части въ этихъ равенствахъ равны по теоремѣ **4**, слѣдовательно и выраженія $a : b : c \,.\, d \,.\, e$ и $a \,.\, d : c : b \,.\, e$ означаютъ оба одно и то же число.

Совершенно такимъ же образомъ можно доказать, что и при замѣнѣ порядка двухъ какихъ-либо другихъ изъ предписанныхъ умноженій и дѣленій обратнымъ порядкомъ результатъ всѣхъ дѣйствій не измѣнится.

Измѣняя же достаточное число разъ порядокъ все только двухъ изъ этихъ дѣйствій, мы можемъ замѣнить первоначально предписанный порядокъ ихъ какимъ угодно другимъ.

Изъ этого и слѣдуетъ справедливость теоремы для разсмотрѣннаго случая. Но такимъ же образомъ можно и при всякомъ другомъ числѣ предписанныхъ умноженій и дѣленій показать возможность измѣненія порядка этихъ дѣйствій.

Слѣдовательно, теорема справедлива вообще.

Упражненія.

1) Какъ должны въ области дѣйствій перваго разряда гласить предложенія, соотвѣтствующія теоремамъ **64** и **67**, и что въ этой области соотвѣтствуетъ расширенію и сокращенію?

2) Что въ области дѣйствій второго разряда соотвѣтствуетъ опредѣленію **28** и правилу **29**, и какъ должны въ ней гласить правила, соотвѣтствующія правиламъ **40**, **41** и **42**?

§ 115. **Правила, относящіяся къ примѣненію скобокъ.** По окончаніи ученія о дѣйствіяхъ перваго и второго разряда рѣшаются обыкновенно задачи на преобразованіе болѣе сложныхъ выраженій, въ которыхъ встрѣчаются всѣ эти дѣйствія. Въ такихъ выраженіяхъ встрѣчаются въ большемъ противъ обыкновеннаго количествѣ скобки. До сихъ поръ намъ достаточно было краткаго указанія на то, для чего онѣ служатъ [§ 8]. Теперь же намъ надлежитъ точнѣе и подробнѣе формулировать правила ихъ примѣненія.

Скобки, какъ мы уже знаемъ, указываютъ порядокъ, въ которомъ слѣдуетъ производить дѣйствія. Такъ, выраженіемъ

$$(a+b) \,.\, c$$

указывается, что слѣдуетъ a съ b сложить и на полученную сумму умножить c. Выраженіемъ же

$$a+(b \,.\, c)$$

указывается, что слѣдуетъ сначала c умножить на b, а затѣмъ полученное произведеніе сложить съ a. Если число стоитъ между двумя знаками дѣйствій, какъ въ приведенныхъ двухъ выраженіяхъ b, то только и есть двѣ возможности для порядка, въ которомъ можно произвести указанныя

дѣйствія. Потому для упрощенія одинъ изъ возможныхъ двухъ случаевъ можно и принято писать безъ скобокъ. Такъ порядокъ дѣйствій, указанный вторымъ выраженіемъ, принято указывать проще безъ скобокъ выраженіемъ

$$a+b \,.\, c \text{ или } a+bc.$$

Вошло въ обычай скобокъ не ставить въ слѣдующихъ случаяхъ:

Правило. Если нѣсколько чиселъ соединены между собою знаками дѣйствій одного и того же разряда, то этимъ выражается требованіе, чтобы дѣйствія производились подъ рядъ. **83**

Примѣчаніе.

«Подъ рядъ» для дѣйствій перваго и второго разряда означаетъ слѣва вправо одно дѣйствіе за другимъ, для возвышенія въ степень—сверху внизъ.

Напр., выраженіемъ a^{x^5} указывается, что сначала должно x возвысить въ 5-ую степень, а затѣмъ a въ степень x^5.

Что требуется сначала возвысить a въ x-ю степень, а затѣмъ a^x въ 5-ю степень, выражается такъ: $(a^x)^5$.

Правило. Если число стоитъ между знаками дѣйствій различныхъ разрядовъ, то сначала слѣдуетъ произвести дѣйствіе высшаго разряда. **84**

Скобки же примѣняются только въ остальныхъ случаяхъ, то есть, если дѣйствія одного разряда должно произвести не подъ рядъ, или если дѣйствіе низшаго разряда должно быть произведено раньше.

Нѣкоторые изъ способовъ указанія дѣйствій, которыя требуется произвести, дѣлаютъ скобки излишними. Такое удобство представляетъ, напр., горизонтальная черта въ смыслѣ знака дѣленія, какъ видно изъ сравненія начертаній

$$(a+b):(c+d) \text{ и } \frac{a+b}{c+d}.$$

Другой примѣръ представляетъ произведеніе, между сомножителями котораго не поставлено знаковъ умноженія. Такъ $\frac{3}{5}\, ab \,.\, 6cd$ означаетъ

$$\left(\tfrac{3}{5} \,.\, a \,.\, b\right) . \left(6 \,.\, c \,.\, d\right)$$

и $a : bcd$ означаетъ

$$a : (b \,.\, c \,.\, d).$$

Но abc^2 должно понимать какъ

$$a \cdot b \cdot (c^2)$$

Наконецъ, своеобразное начертаніе показателя степени надъ строкою равносильно заключенію его въ скобки. Такъ выраженія

$$a^{2b+c},\ a^{x^2+y^2},\ a^{5bc}$$

только и могутъ быть истолкованы какъ степени съ показателями $2b+c$, x^2+y^2 и $5bc$.

Примѣры преобразованія болѣе сложныхъ выраженій.

1) $$\frac{5-6x}{y^2-y}+\frac{3}{z}\cdot\frac{8x^3-1}{y^4-1}:\frac{4x^2+2x+1}{24z^2}:\frac{6y}{z^2}:\frac{4z^3}{y^3+y^2+y+1}$$

$$=\frac{5-6x}{y^2-y}+\frac{3(8x^3-1)}{z(y^4-1)}\cdot\frac{24z^2}{4x^2+2x+1}\cdot\frac{z^2}{6y}\cdot\frac{y^3+y^2+y+1}{4z^3}$$

$$=\frac{5-6x}{y^2-y}+\frac{3(8x^3-1)\cdot 24z^2\cdot z^2(y^3+y^2+y+1)}{z(y^4-1)\cdot(4x^2+2x+1)\cdot 6y\cdot 4z^3}$$

$$=\frac{5-6x}{y^2-y}+\frac{3(2x-1)(4x^2+2x+1)(y^3+y^2+y+1)}{(y-1)(y^3+y^2+y+1)(4x^2+2x+1)y}$$

$$=\frac{5-6x}{y(y-1)}+\frac{3(2x-1)}{(y-1)y}=\frac{5-6x+6x-3}{y(y-1)}=-\frac{2}{y(y-1)}.$$

2) $$\frac{1}{2}a^2\left(1+\frac{a}{b}\right):\left\{\left[2b+(a-b)^2:2a\right]\left[a-1:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{b}{b}+\frac{a}{b}\right):\left\{\left[\frac{4ab}{2a}+\frac{a^2-2ab+b^2}{2a}\right]\left[a-1\cdot\frac{ab}{a+b}\right]\right\}$$

$$=\frac{a^2(a+b)}{2b}:\left[\frac{a^2+2ab+b^2}{2a}\cdot\left(a-\frac{ab}{a+b}\right)\right]$$

$$=\frac{a^2(a+b)}{2b}:\left[\frac{(a+b)^2}{2a}\cdot\frac{a^2+ab-ab}{a+b}\right]=\frac{a^2(a+b)}{2b}:\frac{(a+b)^2\cdot a^2}{2a(a+b)}$$

$$=\frac{a^2(a+b)}{2b}:\frac{(a+b)a}{2}=\frac{a^2(a+b)}{2b}\cdot\frac{2}{(a+b)a}=\frac{a^2(a+b)\cdot 2}{2b(a+b)a}=\frac{a}{b}.$$

3) $$\frac{\dfrac{x-y}{x^3+y^3}+\dfrac{2}{x^2-xy+y^2}}{\dfrac{x}{y}-\left(\dfrac{3x-y}{9x}-1\right)}:\frac{\dfrac{1}{x+y-\dfrac{3xy}{x+y}}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{y}{9x}}$$

$$=\frac{\dfrac{x-y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}+\dfrac{2(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}}{\dfrac{9x^2}{9xy}-\dfrac{(3x-y)y}{9xy}+\dfrac{9xy}{9xy}}:\frac{1:\left(\dfrac{(x+y)^2}{x+y}-\dfrac{3xy}{x+y}\right)}{\dfrac{3x}{9x}+\dfrac{y}{9x}}.$$

$$=\frac{\left(\frac{x-y+2x+2y}{x^3+y^3}\right)}{\left(\frac{9x^2-(3xy-y^2)+9xy}{9xy}\right)}:\frac{1:\frac{x^2+2xy+y^2-3xy}{x+y}}{\left(\frac{3x+y}{9x}\right)}=\frac{\left(\frac{3x+y}{x^3+y^3}\right)}{\left(\frac{9x^2+6xy+y^2}{9xy}\right)}:\frac{\left(\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right)}{\left(\frac{3x+y}{9x}\right)}$$

$$=\frac{(3x+y)\,9xy}{(x^3+y^3)(3x+y)^2}:\frac{(x+y)9x}{(x^2-xy+y^2)(3x+y)}=\frac{9xy}{(x^3+y^3)(3x+y)}\cdot\frac{(x^2-xy+y^2)(3x+y)}{(x+y)9x}$$

$$=\frac{9xy(x^2-xy+y^2)(3x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)(3x+y)(x+y)9x}=\frac{y}{(x+y)^2}.$$

ГЛАВА XVIII.

Нуль какъ дѣлимое и какъ дѣлитель.

Понятіе о безконечности.

§ 116. **Дѣлимое 0, выраженіе $\frac{0}{0}$ и невозможность дѣленія на 0.** Если въ частномъ $\frac{a}{b}$ дѣлимое $a=0$, то по опредѣленію частнаго [53] и $\frac{a}{b}=0$.

Если въ этомъ частномъ и $a=0$ и $b=0$, то оно принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$ и по опредѣленію дѣленія можетъ означать каждое число, ибо каждое число, будучи умножено на 0, даетъ 0. Поэтому говорятъ, что $\frac{0}{0}$ **означаетъ неопредѣленность.** Смыслъ появленія неопредѣленностей при рѣшеніи практическихъ задачъ будетъ впослѣдствіи поясненъ примѣрами (§§ 118, 389, 391, 415—418, 420, 510).

Если же, наконецъ, въ частномъ $\frac{a}{b}$ только $b=0$, то, не расширяя круга нашихъ представленій, мы имѣемъ право только сказать, что при упомянутомъ условіи это частное не имѣетъ смысла, другими словами, что д ѣ л и т ь н а 0 н е л ь з я, такъ какъ вѣдь не существуетъ ни одного такого числа, которое бы, будучи умножено на 0, дало не 0, а какое-либо другое число.

§ 117. **Понятіе о безконечности.** Только при извѣстномъ расширеніи круга нашихъ представленій частному $\frac{a}{0}$ можетъ быть приданъ извѣстный смыслъ. А именно, если представить себѣ въ частномъ $\frac{a}{b}$, предполагая a и b абсолютными числами, при неизмѣняющемся a, дѣлителя b все болѣе и болѣе уменьшающимся, то $\frac{a}{b}$ будетъ все болѣе и болѣе увеличиваться, при

чемъ это увеличеніе можетъ быть продолжено безгранично, въ зависимости отъ безграничнаго приближенія къ 0 дѣлителя b.

Чтобы выражать такое безграничное увеличеніе, въ математикѣ существуетъ знакъ ∞, обозначающій «безконечно большое число», «безконечно большая величина» или просто «безконечно большой».

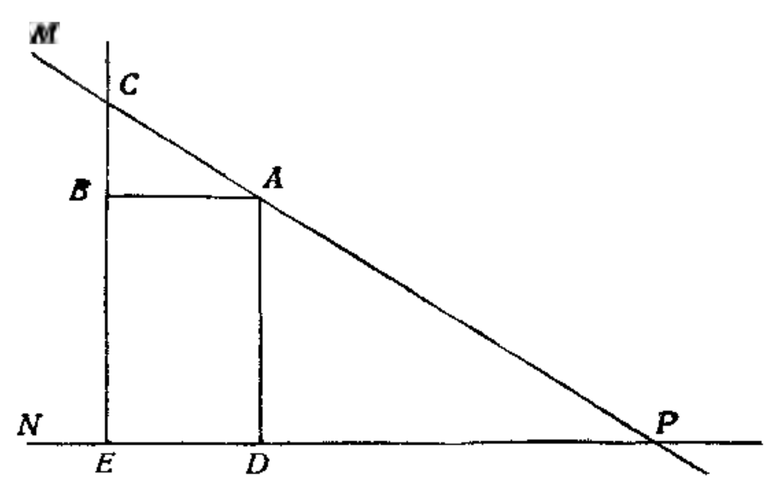
Пользуясь этимъ знакомъ, сказанное о безграничномъ увеличеніи частнаго $\frac{a}{b}$ можно выразить равенствомъ:

$$\frac{a}{0} = \infty \text{ *)}$$

Но въ этомъ равенствѣ символъ 0 понимаютъ двояко: или въ ненастоящемъ смыслѣ, а только для указанія того, что знаменатель въ частномъ вида $\frac{a}{b}$ можетъ быть сдѣланъ по абсолютной величинѣ своей меньше всякаго абсолютнаго числа, какъ бы мало оно ни было, или въ настоящемъ смыслѣ.

---

*) Въ поясненіе примѣненія знака ∞ приведемъ примѣръ изъ геометріи. При вращеніи прямой MP около одной изъ ея точекъ A въ одну или другую сторону точка P пересѣченія прямыхъ MP и NP будетъ уходить вправо или влѣво все дальше и дальше. Чтобы судить о томъ, какъ именно далеко она уйдетъ, опустимъ изъ точки A на NP перпендикуляръ AD, возставимъ къ AD произвольной длины перпендикуляръ AB и проведемъ чрезъ B прямую, также перпендикулярную къ NP и пересѣкающую прямыя MP и NP въ точкахъ C и E. Числа, выражающія,



сколько разъ мѣра длины содержится въ отрѣзкахъ DP, AD, AB и BC, назовемъ соотвѣтственно буквами x, a, b и c. По извѣстной геометрической теоремѣ отрѣзокъ DP долженъ быть во столько же разъ длиннѣе отрѣзка AD, во сколько разъ AB больше BC. Это выражается равенствомъ:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

А отсюда по опредѣленію 53 и по теоремѣ 56 мы узнаемъ, что

$$x = \frac{ab}{c}$$

А въ зависимости отъ этого и символъ ∞ понимается двояко: въ первомъ случаѣ онъ означаетъ перемѣнную величину, которая можетъ быть сдѣлана больше всякаго заданнаго числа, какъ бы велико оно ни было: во второмъ же случаѣ онъ указываетъ, что въ частномъ дѣлитель сдѣлался или оказывается равнымъ 0. Но какъ въ приведенномъ внизу геометрическомъ примѣрѣ, такъ и въ другихъ случаяхъ, такое указаніе есть въ то же время указаніе на нѣкоторую вполнѣ опредѣленную суть дѣла, на наступившій въ разсматриваемомъ вопросѣ особый вполнѣ опредѣленный случай. Поэтому словами:

«такая-то величина при такихъ-то условіяхъ дѣлается безконечно большою»

или отвѣтомъ:

«задача допускаетъ безконечно большое рѣшеніе»

говорится больше, чѣмъ простымъ отрицаніемъ возможности рѣшенія задачи или какого-либо значенія у названной величины. Этимъ удовлетворяется при этомъ стремленіе алгебры, которымъ она обязана вообще и развитіемъ своимъ, а именно стремленіе обобщать и превращать такимъ способомъ всякія исключенія въ частные, т. е. особые только, случаи общихъ правилъ.

Введеніемъ отрицательныхъ чиселъ и числа 0 было достигнуто, что разность $a - b$ пріобрѣла смыслъ для всѣхъ безъ исключенія значеній a и b; введеніемъ же дробныхъ чиселъ то же самое было достигнуто для частнаго $\frac{a}{b}$, за однимъ только исключеніемъ, состоящимъ въ случаѣ, когда дѣлитель равенъ 0. Если кромѣ того и дѣлимое равно 0, то частное имѣетъ указанный уже выше смыслъ, который еще будетъ поясненъ многими примѣрами. А чтобы представить и случай, когда только дѣлитель равенъ 0, какъ частный случай (а не какъ исключительный, когда частное не имѣетъ значенія), и вводятъ понятіе о безконечности, достигая этимъ не только удовлетворенія извѣстной формѣ, а и больше, такъ какъ понимаемое и вторымъ образомъ понятіе, обозначаемое символомъ ∞, допускаетъ, какъ мы увидимъ изъ многочисленныхъ примѣровъ, вполнѣ опредѣленное толкованіе.

Важно только при этомъ не забывать, что символъ ∞ не означаетъ какого-либо опредѣленнаго числа, хотя онъ и вводится также для обобщенія, какъ и относительныя и дробныя числа: какъ бы велико ни было опредѣ-

---

Чѣмъ болѣе теперь прямая MP будетъ приближаться къ положенію параллельному NP, тѣмъ дальше будетъ уходить точка P, имѣя возможность удаляться безгранично, при чемъ отрѣзки AD и AB будутъ сохранять свою длину, а вмѣстѣ съ ними числа a и b свою величину, отрѣзокъ же BC, равный c мѣрамъ длины, будетъ становиться все меньше и меньше, такъ что c будетъ все меньше и меньше отличаться отъ 0, пока, наконецъ, точка C не совпадетъ съ B и прямая MP не станетъ параллельною NP.

Все это можно выразить коротко при помощи понятія, съ которымъ мы здѣсь знакомимся, говоря: когда прямая MP станетъ параллельною NP, отрѣзокъ BC станетъ равнымъ 0 мѣрамъ длины, а разстояніе точки P отъ D равнымъ $\frac{ab}{0} = \infty$.

ленное число, напр., сколько-либо квадрилліоновъ или децилліоновъ или еще большее число, оно можетъ быть названо только *очень большимъ*, *но не безконечно большимъ*, и знакомъ ∞ обозначено быть не можетъ. Не означая же опредѣленнаго числа, вводимое теперь понятіе обладаетъ особыми свойствами, которыя мы постепенно будемъ изучать и на нѣкоторыя изъ которыхъ будетъ указано уже въ слѣдующемъ параграфѣ.

Если

$$\frac{a}{b} = c,$$

то должно быть всегда также

$$\frac{a}{c} = b.$$

Чтобы зависимость между обоими послѣдними равенствами оставалась справедливою безъ исключеній, необходимо вмѣстѣ съ равенствомъ

$$\frac{a}{0} = \infty$$

допустить и равенство

$$\frac{a}{\infty} = 0,$$

котораго смыслъ можетъ быть выраженъ словами такимъ образомъ:

Если въ частномъ $\frac{a}{b}$ представить себѣ при неизмѣняющемся a дѣлителя все болѣе и болѣе увеличивающимся, то $\frac{a}{b}$ будетъ по абсолютной величинѣ своей все болѣе и болѣе уменьшаться и можетъ такимъ образомъ быть сдѣлано меньше всякаго заданнаго абсолютнаго числа, какъ бы мало ни было это послѣднее.

Чтобы понятіе о безконечности было примѣнимо и въ случаяхъ, когда разсматриваемыя величины выражаются въ относительныхъ числахъ, послѣ введенія понятія объ абсолютной безконечно большой величинѣ вводятся и понятія $+\infty$ и $-\infty$. Первое можно представить себѣ получающимся въ томъ случаѣ, когда въ частномъ $\frac{a}{b}$ дѣлимое и дѣлитель одинаковаго знака и дѣлитель уменьшается по абсолютной величинѣ своей до 0, второе получающимся чрезъ такое же уменьшеніе дѣлителя въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель знаковъ противоположныхъ.

§ 118. **Нѣкоторые виды неопредѣленностей**. Если мы значеніе частнаго $\frac{a}{b}$ обозначимъ буквою c, то по опредѣленію дѣленія [53] должно быть

$$a = bc.$$

Въ смыслѣ, изложенномъ въ предыдущемъ параграфѣ, при a конечномъ и b равномъ 0 частное $\frac{a}{b}$, слѣдовательно, и c, должны быть ∞. Но при этихъ значеніяхъ буквъ равенство $a=bc$ принимаетъ видъ

$$a=0.\ \infty.$$

Совершенно такимъ же образомъ мы и для нѣкотораго другого числа d получили бы:

$$d=0.\ \infty,$$

и такъ же для какого-нибудь третьяго числа e

$$e=0.\ \infty \quad \text{и т. д.}$$

То есть, оказывается, что выраженіе $0.\ \infty$ мы должны считать неопредѣленнымъ такъ же, какъ и $\frac{0}{0}$.

На неопредѣленность выраженія $0.\ \infty$ указываетъ и то обстоятельство, что всякое выраженіе, принимающее при извѣстныхъ значеніяхъ буквъ видъ $\frac{0}{0}$, можетъ быть преобразовано такъ, что при тѣхъ же значеніяхъ буквъ оно приметъ видъ $0.\ \infty$. Такъ, напр., всегда

$$\frac{x}{x}=x.\frac{1}{x}.$$

При $x=0$ лѣвая часть этого равенства превращается въ $\frac{0}{0}$, а правая въ $0.\ \infty$.

Разсуждая такимъ же образомъ, мы можемъ обнаружить и другіе виды неопредѣленностей.

По теоремѣ 82 должно быть всегда

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}:\frac{1}{a}.$$

При $a=0$ и $b=0$ лѣвая часть этого равенства превращается въ $\frac{0}{0}$, а правая въ $\frac{\infty}{\infty}$. Отсюда необходимо заключить, что и $\frac{\infty}{\infty}$ выражаетъ неопредѣленность.

По теоремѣ 56

$$\frac{1}{x}-\frac{1-x}{x}=\frac{x}{x}.$$

При $x=0$ правая часть этого равенства принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, а лѣвая $\infty-\infty$. Слѣдовательно, къ неопредѣленнымъ выраженіямъ должно отнести и послѣднее.

Какъ выраженіе $0 \ \infty$ могло означать всякое число, и a и d, и e и т. д., такъ и всякое изъ другихъ неопредѣленныхъ выраженій, такъ напр., могутъ быть

$$\frac{0}{0}=a,$$
$$\frac{0}{0}=b,$$
$$\frac{\infty}{\infty}=c,$$
$$\infty \quad \infty = m,$$
$$\infty - \infty = n$$
и т. д.

Послѣ же допущенія этихъ равенствъ допускаются и равенства

$$\infty = c.\infty$$
$$\frac{\infty}{c}=\infty,$$
$$\infty = m + \infty,$$

указывающія на нѣкоторыя свойства безконечности.

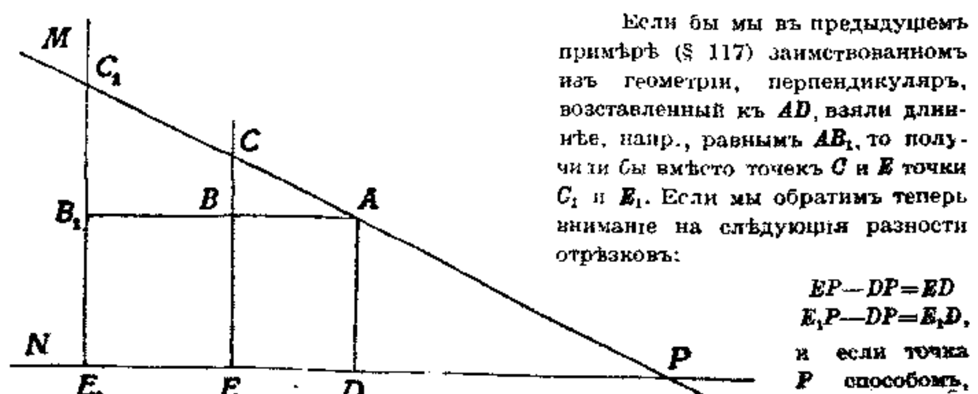
Подробное изученіе различныхъ видовъ неопредѣленностей выходитъ изъ рамокъ курса алгебры. Но такъ какъ впослѣдствіи при изслѣдованіи нѣкоторыхъ выраженій намъ придется встрѣтиться со случаями, когда они дѣлаются неопредѣленными, то и оказывается необходимымъ по крайней мѣрѣ указать на главнѣйшіе виды неопредѣленностей. Пока мы познакомились со слѣдующими:

$$\frac{0}{0}, \quad 0.\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \quad \infty\ ^{*)}.$$

(См. §§ 275 и 332).

---

*) И смыслъ неопредѣленностей можетъ быть поясненъ примѣрами изъ геометріи, смыслъ послѣдней, напр., слѣдующимъ образомъ.



Если бы мы въ предыдущемъ примѣрѣ (§ 117) заимствованномъ изъ геометріи, перпендикуляръ, возставленный къ AD, взяли длиннѣе, напр., равнымъ AB_1, то получили бы вмѣсто точекъ C и E точки C_1 и E_1. Если мы обратимъ теперь вниманіе на слѣдующія разности отрѣзковъ:

$$EP-DP=ED$$
$$E_1P-DP=E_1D,$$

и если точка P способомъ, указаннымъ въ упомянутомъ примѣрѣ, уйдетъ вправо въ безконечность, то величина и той и

Примѣчаніе 1.

Примѣромъ, приведеннымъ здѣсь внизу, поясняется и будетъ подтверждено еще другими примѣрами (§§ 389, 391, 420), что если выраженіе, получившееся при рѣшеніи какой-либо задачи, принимаетъ при извѣстныхъ значеніяхъ буквъ одинъ изъ видовъ неопредѣленности, то это имѣетъ нѣкоторый реальный смыслъ.

Примѣчаніе 2.

Изъ всего изложеннаго мы должны заключить относительно введеннаго понятія о безконечности, что съ нимъ нельзя производить дѣйствій такимъ же образомъ, какъ съ числами, а что нужно особо изучать, въ какомъ смыслѣ должно соединять знаками дѣйствій ∞ и ∞, а также ∞ и 0, и, наконецъ, ∞ и конечныя числа, то есть, изучать, при какомъ толкованіи такихъ соединеній они, являясь частными случаями общихъ правилъ, не дадутъ противорѣчій.

Сказанное относится преимущественно ко второму изъ существующихъ и разсмотрѣнныхъ нами понятій о безконечности, съ которымъ намъ по большей части и придется встрѣчаться *)

ГЛАВА XIX.

Степени.

§ 119. **Возвышеніе относительныхъ чиселъ въ степень.** Опредѣленіе **степени** дано въ § 16. Въ § 21 было произведено расширеніе понятія о **степени**, состоящее во введеніи показателя 1.

Изъ опредѣленія степени (съ упомянутымъ расширеніемъ понятія) слѣдуетъ, что

$$0^x = 0 \ , \ 1^x = 1,$$

то есть, что всякая степень 0 есть 0 и всякая степень 1 есть 1.

Какъ непосредственныя слѣдствія изъ опредѣленія степени и изъ теоремы **47** получаются предложенія:

Теорема. Четная степень всякаго числа (какъ положительнаго, такъ и отрицательнаго) есть число положительное. 

Теорема. Нечетная степень числа имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и это число. 

другой разности выразится символомъ $\infty - \infty$. Ясно, что имъ же могутъ быть выражены, сколько угодно, отрѣзковъ, что, слѣдовательно, разность $\infty - \infty$ опредѣленной величины не обозначаетъ.

*) Въ иностранной математической литературѣ существуютъ отличительныя обозначенія для обоихъ понятій о безконечности: безконечность перваго рода называется *ненастоящею*, безконечность же второго рода *настоящею*.

Эти теоремы могутъ быть выражены слѣдующими равенствами:

$$(\pm a)^{2n} = +a^{2n},$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1},$$
$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

(См. примѣчанiе въ § 88).

§ 120. **Введенiе возвышенiя въ нулевую и отрицательную степени.** Въ §§ 20 и 76 доказаны были теоремы объ умноженiи и дѣленiи степеней съ одинаковыми основанiями. Доказательство послѣдней относилось, однако, только къ тому случаю, когда показатель дѣлимаго больше показателя дѣлителя, остальные же случаи остались не изслѣдованными. Теперь разсмотримъ всѣ возможные случаи:

1) Если $p>q$, то, какъ доказано было въ § 76,

$$\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}.$$

2) Если $p=q$, то $a^q=a^p$, и потому

$$\frac{a^p}{a^q}=\frac{a^p}{a^p}=1.$$

3) Если $p<q$, то

$$\frac{a^p}{a^q}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{p\text{ сомножителей}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{p\text{ сомножителей}}\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\ (\text{всего } q \text{ сомножителей})}=\frac{1}{a^{q-p}},$$

такъ какъ p сомножителей a сокращаются, послѣ чего въ дѣлителѣ остаются $(q-p)$ сомножителей a, въ дѣлимомъ же получается 1.

Такъ мы видимъ, что результатъ дѣленiя $\frac{a^p}{a^q}$ слѣдовало бы всякiй разъ выражать съ упоминанiемъ всѣхъ трехъ возможностей слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{a^p}{a^q}=\begin{cases} a^{p-q}, \text{ если } p>q, \\ 1, \text{ если } p=q, \\ \frac{1}{a^{q-p}}, \text{ если } p<q. \end{cases}$$

Это составляло бы большое неудобство. Но оказывается, что его можно устранить такимъ же способомъ, какимъ уже устранялись подобныя же неудобства раньше, а именно, при помощи расширенiя понятiя о дѣйствiи. Чтобы узнать, въ какомъ смыслѣ оно можетъ быть произведено въ этомъ

случаѣ, посмотримъ, что получится, если бы мы во всякомъ случаѣ стали писать:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.$$

При условіи $p=q$ мы получили бы выраженіе a^0, при условіи же $p<q$ показателемъ оказалось бы отрицательное число $-(q-p)$. А такъ какъ показатели 0 и отрицательные еще ни въ какомъ смыслѣ не примѣнялись (по первоначальному опредѣленію степени такіе показатели вообще смысла не имѣютъ), то можно было бы согласиться понимать 1 подъ a^0 и $\frac{1}{a^{q-p}}$ подъ $a^{-(q-p)}$ или $\frac{1}{a^n}$ подъ a^{-n}. Но польза отъ такого соглашенія можетъ получиться только въ томъ случаѣ, если съ такими выраженіями можно будетъ обращаться какъ со степенями, другими словами, если при примѣненіи къ нимъ правилъ и теоремъ, по которымъ производятся дѣйствія надъ степенями въ первоначальномъ значеніи этого слова, будутъ всегда получаться вѣрные результаты, т. е. тѣ же, которые бы получились, если бы не надъ ними производились выполненныя дѣйствія, а надъ тѣми выраженіями, которыя ими замѣняются. При повѣркѣ оказывается, что если примѣнять къ выраженіямъ a^0 и a^{-n} теоремы о степеняхъ, то дѣйствительно получаются тѣ же результаты, которые бы получились, если бы были замѣнены a^0 числомъ 1 и a^{-n} выраженіемъ $\frac{1}{a^n}$.

Мы эту повѣрку будемъ дѣлать постепенно. Она будетъ состоять въ томъ, что мы всякую теорему о степеняхъ будемъ доказывать, считаясь съ возможностью какъ положительныхъ показателей, такъ и показателя 0 и отрицательныхъ показателей, при чемъ доказательства будутъ основываться какъ на первоначальномъ опредѣленіи степени, такъ и на слѣдующихъ расширеніяхъ понятія о ней:

Опредѣленіе. С т е п е н ь с ъ п о к а з а т е л е м ъ 0 о з н а ч а е т ъ 1. **86**

Опредѣленіе. С т е п е н ь с ъ о т р и ц а т е л ь н ы м ъ п о к а з а т е л е м ъ о з н а ч а е т ъ о б р а т н у ю в е л и ч и н у с т е п е н и с ъ т ѣ м ъ ж е о с н о в а н і е м ъ и п о к а з а т е л е м ъ р а в н ы м ъ и п р о т и в о п о л о ж н ы м ъ д а н н о м у. **87**

Эти опредѣленія выражаются также слѣдующими равенствами:

Опредѣленіе: $a^0=1$. **86a**

Опредѣленіе: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. **87a**

Примѣчаніе. При $a=0$ послѣднее равенство превращается въ слѣдующее:

$$0^{-n}=\frac{1}{0^n}=\frac{1}{0},$$

а выраженіе a^0 равное $\frac{a^\nu}{a^\nu}$ въ $\frac{0^\nu}{0^\nu} = \frac{0}{0}$. Изъ этого видно, что безъ такого расширенія круга нашихъ представленій, съ какимъ мы познакомились въ главѣ XVIII, 0 нельзя возвышать въ степени отрицательныя и нулевую.

§ 121. **Дополненіе къ доказательству теоремы 16.** Въ предыдущемъ параграфѣ было разъяснено, что произведенное теперь расширеніе понятія о возвышеніи въ степень должно быть оправдано доказательствомъ теоремъ о степеняхъ и для вновь введенныхъ показателей. Поэтому и доказательство теоремы 16 должно быть дополнено въ этомъ смыслѣ. Чтобы оно удовлетворяло этому требованію, оно можетъ быть дано въ такомъ видѣ:

Утв. $a^m . a^n = a^{m+n}$.

Док. Такъ какъ каждый изъ показателей m и n можетъ быть и положительнымъ числомъ и 0 и числомъ отрицательнымъ, то всѣхъ возможныхъ случаевъ, которые должны быть разсмотрѣны въ доказательствѣ, 9. Но по теоремѣ 4,

$$a^m . a^n = a^n . a^m,$$

а по теоремѣ 2

$$a^{m+n} = a^{n+m}.$$

Поэтому ни одна изъ возможныхъ комбинацій не будетъ упущена изъ виду, если теорема будетъ доказана для каждаго изъ слѣдующихъ 6 случаевъ:

I. Случай, когда $m > 0$,

$n > 0$,

доказанъ въ § 20.

II. Если $m > 0$,

$n = 0$,

то

$$a^m . a^n = a^m . a^0 = a^m . 1 = a^m,$$
$$a^{m+n} = a^{m+0} = a^m.$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

III. Если $m > 0$,

$n < 0$,

то можно сдѣлать и по виду явнымъ, что n отрицательное число, написавъ $-\nu$ вмѣсто n. Тогда ν абсолютное число, и потому:

$$a^m . a^n = a^m . a^{-\nu} = a^m . \frac{1}{a^\nu} = \frac{a^m}{a^\nu} = a^{m-\nu},$$
$$a^{m+n} = a^{m+(-\nu)} = a^{m-\nu}.$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

IV. Если $m=0$,
$n=0$,

то

$$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^0 = 1 \cdot 1 = 1,$$
$$a^{m+n} = a^{0+0} = a^0 = 1.$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

V. Если $m=0$,
$n<0$,

то, какъ выше, положимъ

$$n=-\nu,$$

послѣ чего имѣемъ:

$$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^{-\nu} = 1 \cdot \frac{1}{a^\nu} = \frac{1}{a^\nu},$$
$$a^{m+n} = a^{0+(-\nu)} = a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu}.$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

VI. Если, наконецъ, $m<0$,
$n<0$,

то для того, чтобы и по виду сдѣлать явными отрицательныя значенія буквъ m и n, напишемъ $-\mu$ вмѣсто m и $-\nu$ вмѣсто n.

Тогда

$$a^m \cdot a^n = a^{-\mu} \cdot a^{-\nu} = \frac{1}{a^\mu} \cdot \frac{1}{a^\nu} = \frac{1}{a^\mu \cdot a^\nu} = \frac{1}{a^{\mu+\nu}},$$
$$a^{m+n} = a^{-\mu-\nu} = a^{-(\mu+\nu)} = \frac{1}{a^{\mu+\nu}}.$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad *).$$

Доказавъ такимъ образомъ справедливость теоремы для двухъ сомножителей, не трудно убѣдиться въ справедливости ея и для всякаго количества ихъ: для этого достаточно умножить произведеніе двухъ изъ нихъ на третьяго, это произведеніе на четвертаго и т. д.

Упражненіе. Формулировать получающееся по теоремѣ V слѣдствіе изъ этой теоремы!

---

*) Въ доказательствѣ въ сущности еще не достаетъ всѣхъ случаевъ, когда оба или одинъ изъ показателей равенъ 1. Эти случаи предоставляемъ разсмотрѣть самимъ учащимся какъ для этой теоремы, такъ и для слѣдующихъ.

Примѣры.

1) $5a^{2x-y} \,.\, 3a^{3x-2y} \,.\, \frac{1}{6}a^{3y-4x}$

$= 5 \,.\, 3 \,.\, \frac{1}{6} \,.\, a^{2x-y+3x-2y+3y-4x}$

$= 2\frac{1}{2}\, a^x.$

2) $(a^p - 2 + a^{-p})(2a^{2p} - a^p)$
$2a^{3p} - 4a^{2p} - 2a^p$
$\quad - a^{2p} + 2a^p + a^0 =$
$2a^{3p} - 5a^{2p} \qquad + 1.$

§ 122 **Общее доказательство теоремы 68** И доказательство теоремы **68** должно быть дополнено въ томъ же смыслѣ, въ какомъ было дополнено въ предыдущемъ параграфѣ доказательство теоремы **16**. Но это дополненіе можетъ быть замѣнено слѣдующимъ ниже доказательствомъ ея въ самомъ общемъ видѣ, которое возможно на основаніи опредѣленія дѣленія и которымъ доказывается справедливость ея для всѣхъ вообще показателей, для которыхъ справедлива теорема **16**.

Утв. $a^m : a^n = a^{m-n}$

Док. По опредѣленію дѣленія [**53**] $a^m : a^n$ есть число, которое, будучи умножено на a^n, должно дать a^m. Если мы умножимъ a^{m-n} на a^n, то получаемъ:

$a^n \,.\, a^{m-n} = a^{n+m-n} = a^m,$

изъ чего слѣдуетъ, что дѣйствительно для всѣхъ родовъ чиселъ, для которыхъ справедлива теорема **16**, справедлива и теорема **68**.

Упражненіе. Формулировать получающееся по аксіомѣ V слѣдствіе изъ этой теоремы!

Примѣры.

1) $\frac{x^{8p^2-7pq-6q^2}}{x^{(8p+9q)(p-2q)}} = \frac{x^{8p^2-7pq-6q^2}}{x^{8p^2-13pq-6q^2}}$

$= x^{(8p^2-7pq-9q^2)-(8p^2-13pq-6q^2)}$

$= x^{8p^2-7pq-6q^2-8p^2+13pq+6q^2} = x^{6pq}.$

2) $(a^{-8x} - a^{-2x} + a^{-x} - 1 + a^x) : a^{-2x}$
$(a^{-3x} - a^{-2x} + a^{-x} - a^0 + a^x) : a^{-2x} =$
$\frac{a^{-3x}}{a^{-2x}} - \frac{a^{-2x}}{a^{-2x}} + \frac{a^{-x}}{a^{-2x}} - \frac{a^0}{a^{-2x}} + \frac{a^x}{a^{-2x}} =$
$a^{-x} - a^0 + a^x - a^{2x} + a^{3x} =$
$a^{-x} - 1 + a^x - a^{2x} + a^{8x}.$

§ 123. **Уничтоженіе отрицательныхъ показателей и примѣненіе ихъ при расположеніи многочленовъ**. При помощи отрицательныхъ показа-

телей могутъ быть расположены и такіе многочлены, въ которыхъ главная **буква** встрѣчается и въ знаменателяхъ дробей. При этомъ члены, не содержащіе ея вовсе, должны считаться содержащими ее въ нулевой степени.

Такія преобразованія и уничтоженіе отрицательныхъ показателей удобно производить при помощи слѣдующей теоремы:

Теорема. *Всякаго сомножителя изъ дѣлителя можно перенести сомножителемъ въ дѣлимое и наоборотъ, если перемѣнить при этомъ знакъ передъ показателемъ этого сомножителя.* **88**

I ***Утв.*** $\frac{a}{bc^{-n}} = \frac{ac^{+n}}{b}$.

Док. $\frac{a}{bc^{-n}} = \frac{a}{b \cdot \frac{1}{c^n}}$ [опред. 87]

$= a : \frac{b}{c^n}$ [теор. 58]

$= a \cdot \frac{c^n}{b}$ [теор. 82]

$= \frac{ac^{+n}}{b}$ [теор. 58].

II ***Утв.*** $\frac{ab^{-p}}{c} = \frac{a}{cb^{+p}}$.

Док. $\frac{ab^{-p}}{c} = \frac{a \cdot \frac{1}{b^p}}{c}$ [опред. 87]

$= \frac{a}{b^p} : c$ [теор. 58]

$= \frac{a}{cb^{+p}}$ [теор. 60].

Примѣры.

1) $\frac{2^{-3}b^3m^{-1}p^{-3}q^{-4}}{5^{-1}a^{-4}c^{-2}d^{-1}n^2} = \frac{5^{+1}a^4b^3c^2d^1}{2^{+3}m^1n^2p^3q^4} = \frac{5a^4b^3c^2d}{8mn^2p^3q^4}$.

2) $\frac{b^{35}x^{-17}z^{-8}}{2a^{-24}c^{-15}y^{40}} : \frac{2c^{12}y^{-34}z^{-1}}{a^{-23}b^{-33}x^{12}} =$

$\frac{b^{35}x^{-17}z^{-8}}{2a^{-24}c^{-15}y^{40}} \cdot \frac{a^{-23}b^{-33}x^{12}}{2c^{12}y^{-34}z^{-1}}$ [теор. 82]

$= \frac{a^{-23}b^2x^{-5}z^{-8}}{4a^{-24}c^{-3}y^6z^{-1}}$ [теор. 80]

$= \frac{a^{24}a^{-23}b^2c^3}{4x^5y^6z^{-1}z^8}$ [теор. 88]

$= \frac{ab^2c^3}{4x^5y^6z^7}$ [теор. 16].

3) Чтобы раздѣлить многочленъ

$$\frac{a}{4b^5}+\frac{2}{a^3b}-\frac{929}{360ab^3}-\frac{25a^2}{36b^6}+\frac{141}{40b^4}-\frac{31}{12a^2b^2}$$

на многочленъ $\frac{2b}{3a^2}+\frac{5a}{6b^2}-\frac{4}{5b}-\frac{3}{4a}$,

перенесемъ въ каждомъ членѣ дѣлимаго и дѣлителя буквы въ числителей и расположимъ затѣмъ оба многочлена по возрастающимъ степенямъ буквы a, послѣ чего дѣленіе производится такъ:

$$2a^{-3}b^{-1}-2\frac{7}{12}a^{-2}b^{-2}-2\frac{209}{360}a^{-1}b^{-3}+3\frac{21}{40}a^{0}b^{-4}+\frac{1}{4}a^{1}b^{-5}-\frac{25}{36}a^{2}b^{-6} \;\Big|\; \frac{2}{3}a^{-2}b^{1}-\frac{3}{4}a^{-1}b^{0}-\frac{4}{5}a^{0}b^{-1}+\frac{5}{6}a^{1}b^{-2}$$

$$2a^{-3}b^{-1}-2\frac{1}{4}a^{-2}b^{-2}-2\frac{2}{5}a^{-1}b^{-3}+2\frac{1}{2}a^{0}b^{-4} \qquad \Big|\; 3a^{-1}b^{-2}-\frac{1}{2}a^{0}b^{-3}-\frac{5}{6}a^{1}b^{-4}$$

$$-\frac{1}{3}a^{-2}b^{-2}-\frac{13}{72}a^{-1}b^{-3}+1\frac{1}{40}a^{0}b^{-4}+\frac{1}{4}a^{1}b^{-5}$$

$$-\frac{1}{3}a^{-2}b^{-2}+\frac{3}{8}a^{-1}b^{-3}+\frac{2}{5}a^{0}b^{-4}-\frac{5}{12}a^{1}b^{-5}$$

$$-\frac{5}{9}a^{-1}b^{-3}+\frac{5}{8}a^{0}b^{-4}+\frac{2}{3}a^{1}b^{-5}-\frac{25}{36}a^{2}b^{-6}$$

$$-\frac{5}{9}a^{-1}b^{-3}+\frac{5}{8}a^{0}b^{-4}+\frac{2}{3}a^{1}b^{-5}-\frac{25}{36}a^{2}b^{-6}$$

$$0$$

По уничтоженіи же отрицательныхъ показателей отвѣтъ принимаетъ видъ:

$$\frac{3}{ab^2}-\frac{1}{2b^3}-\frac{5a}{6b^4}.$$

§ 124. Умноженіе степеней съ одинаковыми показателями и возвышеніе произведенія въ степень.

Теорема. Степени съ одинаковыми показателями перемножаютъ, умножая между собою ихъ основанія, при чемъ показатель остается тотъ же[1]). **89** 

Утв. $a^n \,.\, b^n = (ab)^n$.

Док. I. Если $n > 0$, то

$$a^n \,.\, b^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{n \text{ сомножителей}} \,.\, \underbrace{b \,.\, b \,.\, b \,.\, \ldots \,.\, b}_{n \text{ сомножителей.}}$$

$$= a \,.\, b \,.\, a \,.\, b \,.\, a \,.\, b \,.\, \ldots \,.\, a \,.\, b \quad [\text{теор. } \mathbf{13}]$$

$$= \underbrace{(ab) \,.\, (ab) \,.\, (ab) \,.\, \ldots \,.\, (ab)}_{n \text{ сомножителей}} \quad [\text{теор. } \mathbf{14}]$$

$$= (ab)^n.$$

II. Если $n=0$, то

$$a^n \,.\, b^n = a^0 \,.\, b^0 = 1 \,.\, 1 = 1,$$

$$(ab)^n = (ab)^0 = 1.$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$a^n \,.\, b^n = (ab)^n.$$

III. Если $n<0$, то, написавъ $-\nu$ вмѣсто n для того, чтобы сдѣлать явнымъ отрицательное значеніе показателя n, мы имѣемъ:

$$a^n \,.\, b^n = a^{-\nu} \,.\, b^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu} \,.\, \frac{1}{b^\nu} = \frac{1}{a^\nu b^\nu} = \frac{1}{(ab)^\nu},$$

$$(ab)^n = (ab)^{-\nu} = \frac{1}{(ab)^\nu}.$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$a^n \,.\, b^n = (ab)^n.$$

Такимъ же образомъ теорема доказывается для всякаго числа сомножителей.

Изъ доказанной теоремы мы, по теоремѣ V, получаемъ:

Слѣдствіе. Произведеніе возвышаютъ въ какую-либо степень, возвышая въ эту степень каждаго сомножителя[2]). **90** 

---

[1]) Менѣе удобно для запоминанія, но зато вполнѣ точно, эту теорему можно было бы формулировать такъ:

Произведеніе степеней съ одинаковыми показателями равняется степени съ тѣмъ же показателемъ и основаніемъ, равнымъ произведенію основаній сомножителей.

[2]) **Распредѣлительный законъ возвышенія въ степень.**

Примѣры.

1) $2^7 \,.\, 3 \,.\, 5^8 = 3 \,.\, 5 \,.\, 2^7 \,.\, 5^7 = 15 \,.\, (2 \,.\, 5)^7 =$
$15 \,.\, 10^7 = 150000000$

Этимъ способомъ это умноженіе можетъ быть произведено въ умѣ.

2) $$\left(\frac{b^2-c^2}{a}\right)^n\left(\frac{a}{b^2-2bc+c^2}\right)^n =$$
$$=\left[\frac{(b+c)(b-c)}{a}\cdot\frac{a}{(b-c)^2}\right]^n=\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^n.$$

3) $$(ab)^{x-4y}(abc)^{3x+y}(ac)^{3y-4x} =$$
$$a^{x-4y}b^{x-4y}a^{3x+y}b^{3x+y}c^{3x+y}a^{3y-4x}c^{3y-4x}$$
$$a^{x-4y+3x+y+3y-4x}b^{x-4y+3x+y}c^{3x+y+3y-4x} =$$
$$a^0b^{4x-3y}c^{4y-x} = b^{4x-3y}c^{4y-x}.$$

§ 125. **Дѣленіе степеней съ одинаковыми показателями и возвышеніе частнаго въ степень.**

91 **Теорема**. Степени съ одинаковыми показателями дѣлятъ, дѣля другъ на друга ихъ основанія, причемъ показатель остается тотъ же[1]).

Утв. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$

Док. По опредѣленію дѣленія [53] $\frac{a^n}{b^n}$ есть число, которое, будучи перемножено съ b^n, должно дать a^n. Если мы умножимъ $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ на b^n, то получаемъ:

$$b^n \,.\, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(b \,.\, \frac{a}{b}\right)^n = a^n,$$

изъ чего слѣдуетъ, что въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Изъ доказаннаго предложенія, по теоремѣ V, получается:

92 **Слѣдствіе**. Частное возвышаютъ въ какую-либо степень, возвышая въ эту степень и дѣлимое и дѣлителя.

---

1) Въ формулировкѣ вполнѣ точной эту теорему можно было бы выразить такъ:

Частное двухъ степеней съ одинаковыми показателями равняется степени съ тѣмъ же показателемъ и основаніемъ, равнымъ частному отъ дѣленія основанія дѣлимаго на основаніе дѣлителя.

Примѣры.

1) $\left(-7\frac{1}{4}\right)^5 : \left(3\frac{5}{8}\right)^5 = \left(-\frac{29}{4}\right)^5 : \left(\frac{29}{8}\right)^5 =$

$= \left(-\frac{29 \cdot 8}{4 \cdot 29}\right)^5 = (-2)^5 = -32$

2) $\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{3m^3n^{-3}}\right)^{-x} : \left(\frac{a^{-5}m^{-3}}{6b^5n^{-2}}\right)^{-x} =$

$\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{3m^3n^{-3}} : \frac{a^{-5}m^{-3}}{6b^5n^{-2}}\right)^{-x} =$

$= \left(\frac{a^{-4}b^{-5} \cdot 6b^5n^{-2}}{3m^3n^{-3} \cdot a^{-5}m^{-3}}\right)^{-x}$

$= \left(\frac{2a^5a^{-4}b^0n^3n^{-2}}{m^0}\right)^{-x} = (2an)^{-x}$

$= \frac{1}{(2an)^x}$

3) $\left(\frac{4x}{3y}\right)^3 \cdot \left(\frac{3y}{2x}\right)^4 = \frac{(2 \cdot 2 \cdot x)^3}{(3y)^3} \cdot \frac{(3y)^4}{(2x)^4}$

$= \frac{2^3 \cdot 2^3 \cdot x^3 \cdot 3^4 \cdot y^4}{3^3 \cdot y^3 \cdot 2^4 \cdot x^4} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot y}{x}$

$= \frac{12y}{x}.$

§ 126. **Теорема.** Величина степени не измѣнится, если перемѣнимъ знакъ показателя и въ то же время основаніе замѣнимъ числомъ обратнымъ. **93**

Утв. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}.$

Док. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{+n}}$ [опред. 87]

$= 1 : \frac{a^n}{b^n}$ [теор. **92**]

$= 1 \cdot \frac{b^n}{a^n}$ [теор. **82**]

$= \frac{b^n}{a^n}$ [опред. **3**ᵉ (§ 28)]

$= \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$ [теор. **91**].

Примѣры.

1) $0,375^{-3}=\left(\frac{3}{8}\right)^{-3}=\left(\frac{8}{3}\right)^{3}=\frac{512}{27}=18\frac{26}{27}$.

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\cdot\left(\frac{a}{3bc}\right)^{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\cdot\left(\frac{3bc}{a}\right)^{n}=$

$$\left(\frac{a\cdot 3bc}{b\cdot a}\right)^{n}=(3c)^{n}.$$

Упражненіе.

Какъ измѣняется величина степени отъ перемѣны знака ея показателя?

§ 127. **Потенцированіе степени.**

94 **Теорема.** Степень возвышаютъ въ степень, умножая между собою показателей.

Утв. $(a^m)^n=a^{mn}$.

Док. I. Если $n>0$,

$m>0$,

то

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\text{ сомножителей}}$$
$$=a^{m+m+m+\ldots+m\ (n\text{ слагаемыхъ})}$$
$$=a^{nm}=a^{mn}.$$

II. Если $n>0$,

$m=0$,

то

$$(a^m)^n=(a^0)^n=1^n=1,$$
$$a^{mn}=a^{0\cdot n}=a^0=1.$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

III. Если $n>0$,

$m<0$,

то, написавъ —μ вмѣсто m, чтобы сдѣлать явнымъ отрицательное значеніе буквы m, мы имѣемъ:

$$(a^m)^n=(a^{-\mu})^n=\left(\frac{1}{a^{\mu}}\right)^n=\frac{1^n}{a^{\mu n}}=\frac{1}{a^{\mu n}},$$

$$a^{mn}=a^{(-\mu)\cdot n}=a^{-\mu n}=\frac{1}{a^{\mu n}}.$$

{Слѣд., по теор. VI:

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

IV. Если $n=0$,

то при всякомъ m

$$\left.\begin{array}{l}(a^m)^n=(a^m)^0=1,\\ a^{mn}=a^{m\cdot 0}=a^0=1.\end{array}\right\}$$

Слѣд., по теор. VI:

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

V. Если $n<0$,
$m>0$,

то, написавъ $-\nu$ вмѣсто n, чтобы сдѣлать явнымъ отрицательное значенiе показателя n, мы имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l}(a^m)^n=(a^m)^{-\nu}=\dfrac{1}{(a^m)^\nu}=\dfrac{1}{a^{m\nu}}.\\ a^{mn}=a^{m\cdot(-\nu)}=a^{-m\nu}=\dfrac{1}{a^{m\nu}}.\end{array}\right\}$$

Слѣд., по теор. VI:

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

VI. Если $n<0$,
$m=0$,

то, написавъ $-\nu$ вмѣсто n, какъ выше, мы имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l}(a^m)^n=(a^0)^{-\nu}=\dfrac{1}{1^\nu}=\dfrac{1}{1}=1,\\ a^{mn}=a^{0\cdot(-\nu)}=a^0=1.\end{array}\right\}$$

Слѣд., по теор. VI:

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

VII. Если $n<0$,
$m<0$,

то, какъ выше, написавъ $-\mu$ вмѣсто m и $-\nu$ вмѣсто n, мы имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l}(a^m)^n=(a^{-\mu})^{-\nu}=\dfrac{1}{(a^{-\mu})^\nu}=1:\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\mu\nu}=1:\dfrac{1}{a^{\mu\nu}}=a^{\mu\nu},\\ a^{mn}=a^{(-\mu)(-\nu)}=a^{\mu\nu}.\end{array}\right\}$$

Слѣд., по теор. VI:

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

Изъ этой теоремы мы, по теоремѣ V и послѣ обобщенiя для любого числа потенцированiй, получаемъ:

Слѣдствiе. Если нужно число возвысить въ степень, выраженную произведенiемъ, то можно возвысить его въ степень, указываемую однимъ изъ сомножителей, результатъ въ степень, указываемую другимъ изъ сомножителей, и т. д. до послѣдняго.

Удобнѣе же эту теорему выразить такъ:

Число можно потенцировать на произведеніе, потенцируя его на одного сомножителя, результатъ на другого, и т. д. до послѣдняго.

§ 128. **Порядокъ потенцированія.**

95 **Теорема.** Отъ порядка, въ которомъ производятся нѣсколько послѣдовательныхъ возвышеній въ степень, величина результата не зависитъ.

Утв. $(a^m)^n = (a^n)^m$.

Док. $(a^m)^n = a^{mn}$

$(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}$

{Слѣд., по теор. VI:

$(a^m)^n = (a^n)^m$.

На тѣхъ же теоремахъ основывается доказательство для любого числа возвышеній въ степень, изъ чего и слѣдуетъ справедливость теоремы.

Слѣдствіе. Степень можно возвысить въ степень, возвышая въ эту послѣднюю ея основаніе.

Напр., 3-я степень степени 2^5, по правилу, выражаемому этимъ слѣдствіемъ, равна 8^5.

Примѣры.

1) $[(2^{-2})^{-3}]^2 = 2^{(-2)\cdot(-3)\cdot 2} = 2^{12} = 4096$.

2) $$\left(4a^{-7}b^{-6}c\right)^3 : \frac{(6a^{-3}b^3c^5)^6(\frac{1}{2}b^7c^4)^{-5}}{(\frac{1}{9}a^{-1}c^{-2})^{-4}}$$

$$=\left(2^2\,.\,a^{-7}b^{-6}c\right)^3 \cdot \frac{(3^{-2}\,.\,a^{-1}c^{-2})^{-4}}{(2\,.\,3\,.\,a^{-3}b^3c^5)^6(2^{-1}\,.\,b^7c^4)^{-5}}$$

$$=\frac{2^6\,.\,a^{-21}b^{-18}c^3\,.\,3^8\,.\,a^4c^8}{2^6\,.\,3^6\,.\,a^{-18}b^{18}c^{30}\,.\,2^5\,.\,b^{-35}c^{-20}} = \frac{3^2\,.\,a^{-21}a^4a^{18}c^3c^8c^{-30}c^{20}}{2^5b^{18}b^{-35}b^{18}} = \frac{9ac}{32b}.$$

§ 129. **Теорема.** Всякая степень дроби, кромѣ нулевой, есть дробь.

Предп. a—дробь;

$n \neq 0$.

Утв. a^n также дробь.

Док. *I случай*: $n > 0$.

По теоремѣ VII значеніе n-ой степени дроби a не можетъ зависѣть отъ вида, въ которомъ эта дробь изображена. Потому мы можемъ предположить,

что a дробь несократимая (т. е. сокращенная уже, на сколько вообще возможно), напр., $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q взаимно-простыя числа. Вслѣдствіе послѣдняго условія и

$$a^n = \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}$$

также будетъ дробь, и притомъ несократимая, такъ какъ знаменатель дроби $\frac{p^n}{q^n}$ не содержитъ ни одного множителя, который содержался бы въ числителѣ и на котораго ее поэтому можно было бы сократить.

II случай: $n < 0$.

Чтобы сдѣлать и по виду явнымъ, что n отрицательное число, положимъ

$$n = -\nu.$$

Тогда

$$a^n = a^{-\nu} = \left(\frac{p}{q}\right)^{-\nu} = \left(\frac{q}{p}\right)^\nu = \frac{q^\nu}{p^\nu}.$$

Слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ, по тѣмъ же причинамъ, что и въ первомъ случаѣ, a^n есть число дробное.

§ 130. Потенцированіе неравенствъ.

Теорема. 1. При равныхъ положительныхъ показателяхъ степень большаго положительнаго числа больше.

Предп. $a > b$, при чемъ $b > 0$ (слѣд., и $a > 0$),
$n > 0$.

Утв. $a^n > b^n$.

Док. Повторимъ неравенство $a > b$
n разъ:

$$\left.\begin{array}{c} a > b \\ a > b \\ a > b \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a > b \end{array}\right\} n \text{ строкъ.}$$

$$a^n > b^n.$$

Если мы перемножимъ эти неравенства, то, по 2-й изъ теоремъ въ § 63, оказывается, что дѣйствительно:

Слѣдствіе 1. При положительномъ не измѣняющемся показателѣ степень положительнаго числа измѣняется въ томъ же смыслѣ, въ которомъ измѣняется это число.

Слѣдствіе 2. При положительномъ показателѣ всякая степень правильной дроби есть также правильная дробь и всякая степень неправильной дроби есть также неправильная дробь.

Теорема 2. При возвышеніи равныхъ положительныхъ чиселъ большихъ 1 въ степень получается больше тамъ, гдѣ показатель больше.

Предп. $a=b$, при чемъ $a>1$ (слѣд., и $b>1$),
$m>n$.

Утв. $a^m>b^n$

Док. Предполагая t положительнымъ числомъ, мы второе предположеніе можемъ выразить равенствомъ [§ 48]:

$$m=n+t.$$

Изъ предположенія

$$a=b$$

по теоремѣ VII слѣдуетъ $a^n=b^n$, а изъ предположенія $a>1$,

по послѣднему слѣдствію 2, $a^t>1$

Слѣд., по 1-й изъ теоремъ въ § 63:

$$a^{n+t}>b^n$$

или

$$a^m>b^n.$$

Слѣдствіе. Степень числа большаго 1 измѣняется въ томъ же смыслѣ, въ которомъ измѣняется показатель.

Теорема. 3. При возвышеніи равныхъ положительныхъ чиселъ меньшихъ 1 въ степень получается меньше тамъ, гдѣ показатель больше.

Предп. $a=b$, при чемъ $0<a<1$ (слѣд., и $0<b<1$).
$m>n$.

Утв. $a^m<b^n$.

Док. Второе предположеніе можетъ быть выражено равенствомъ [§ 48]:

$$m=n+t.$$

Изъ перваго предположенія

$$a = b$$

по теоремѣ VII слѣдуетъ:

$a^n = b^n$, а изъ предположенія $a < 1$, по слѣдствію два изъ первой изъ теоремъ, доказанныхъ въ этомъ параграфѣ,

$$a^t < 1$$

{Слѣд., по 1-й теоремѣ въ § 63:

$$a^{n+t} < b^n$$

или

$$a^m < b^n.$$

Слѣдствіе. Степень положительнаго числа меньшаго 1 измѣняется въ смыслѣ противоположномъ тому, въ которомъ измѣняется показатель.

Теорема 4. При возвышеніи положительныхъ чиселъ бо̀льшихъ 1 въ положительныя степени получается больше тамъ, гдѣ основаніе большее и притомъ показатель большій.

Предп. $a > b$, $b > 1$ (слѣд., и $a > 1$),
$m > n$, при чемъ $n > 0$(слѣд., и $m > 0$).

Утв. $a^m > b^n$.

Док. По 1-й изъ теоремъ въ этомъ параграфѣ изъ предположеннаго неравенства

$a > b$ слѣдуетъ:

$a^m > b^m$. По 2-й же изъ этихъ теоремъ слѣдуетъ:

$b^m > b^n$, такъ какъ по предположенію $m > n$.

{ Слѣд., по теор. VIII (§ 51):

$$a^m > b^n.$$

Теорема 5. При возвышеніи положительныхъ чиселъ меньшихъ 1 въ положительныя степени получается больше тамъ, гдѣ основаніе большее и притомъ показатель меньшій.

Предп. $1 > a > b > 0$
$0 < m < n$

Утв. $a^m > b^n$.

Док. По 1-й изъ доказанныхъ въ этомъ параграфѣ теоремъ изъ предположеннаго неравенства

$a > b$ слѣдуетъ:

$a^m > b^m$. Но такъ какъ по предположенію b меньше 1 и $m < n$, то по 3-й изъ этихъ теоремъ мы имѣемъ:

$b^m > b^n$

Слѣд., по теор. VIII:

$a^m > b^n$

ГЛАВА XX.

Понятіе о корнѣ.

Первое понятіе о числахъ ирраціональныхъ и мнимыхъ.

§ 131. **Происхожденіе извлеченія корня** [1]). Какъ отысканіе слагаемаго по даннымъ суммѣ и другому слагаемому приводитъ къ новому дѣйствію—вычитанію, отысканіе сомножителя по даннымъ произведенію и другому сомножителю приводитъ къ новому дѣйствію—дѣленію, такъ отысканіе основанія степени по даннымъ величинѣ ея и показателю ея приводитъ къ новому дѣйствію—извлеченію корня.



Опредѣленіе. Извлечь корень n-ой степени изъ a значитъ найти число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, дастъ a.

Задачу «извлечь корень n-ой степени изъ a» пишутъ такъ:

$$\sqrt[n]{a}\,.^{2)}$$

Число, изъ котораго требуется извлечь корень (a), называется подкореннымъ числомъ или подкоренною величиною, число, показывающее, которой степени корень должно извлечь (n), называется показателемъ корня, результатъ извлеченія корня называется корнемъ. Поэтому и **выраженіе** $\sqrt[n]{a}$ **называется корнемъ,** но его называютъ **также радикаломъ.**

---

[1]) При переходѣ къ ученію о корняхъ хорошо уже сообщать учащимся таблицу всѣхъ дѣйствій [§ 351].

[2]) Знакъ $\sqrt{\ }$ образовался постепенно изъ латинской буквы r, первой буквы латинскаго слова radix, означающаго «корень».

Опредѣленіе. $\sqrt[n]{a}$ означаетъ такое число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, дастъ a. 96а

Это опредѣленіе корня выражается слѣдующимъ равенствомъ:

Опредѣленіе: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. 96б

Слѣдствіе: $\sqrt[n]{a^n} = a$, 96в 

такъ какъ по опредѣленію корня $\sqrt[n]{a^n}$ должно означать число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, даетъ a^n, но a и есть число такого свойства.

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ мы видимъ, что если мы число a сначала возвысимъ въ n-ую степень, а изъ полученнаго результата извлечемъ корень n-ой степени, или если мы сначала изъ числа a извлечемъ корень n-ой степени, а полученный результатъ затѣмъ возвысимъ къ n-ую степень, то эти два дѣйствія взаимно уничтожаются, т. е., получается число a.

Извлеченіе корня называется дѣйствіемъ *обратнымъ* возвышенію въ степень.

Возвышеніе въ степень, извлеченіе корня и еще одно дѣйствіе, о которомъ будетъ рѣчь позднѣе, составляютъ дѣйствія третьяго разряда или **третью ступень дѣйствій.**

Корень второй степени называется также квадратнымъ корнемъ, корень третьей степени—также кубичнымъ корнемъ.

Показателя корня 2 обыкновенно не пишутъ. Такъ

$$\sqrt{9} = \sqrt[2]{9} = 3;$$

$$\sqrt{\frac{121}{196}} = \sqrt[2]{\frac{121}{196}} = \frac{11}{14}.$$

Въ частности должно считать:

$\sqrt[1]{a} = a$, такъ какъ $a^1 = a$;

$\sqrt[n]{0} = 0$, такъ какъ $0^n = 0$,

$\sqrt[n]{1} = 1$, такъ какъ $1^n = 1$.

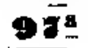
§ 132. **Правило знаковъ.** Такъ какъ и $(+3)^2 = 9$ и $(-3)^2 = 9$, то, очевидно, $\sqrt{9}$ имѣетъ два значенія, а именно $\sqrt{9} = +3$ и $\sqrt{9} = -3$, почему и пишутъ

$$\sqrt{9} = \pm 3.$$

Такимъ же образомъ оказывается, что

$$\sqrt[4]{625} = \pm 5,$$
$$\sqrt[8]{256} = \pm 2.$$

Вообще изъ теоремы 85 вытекаетъ слѣдующее предложеніе:



97 **Слѣдствіе.** Корень четной степени изъ положительнаго числа можетъ быть и положительное и отрицательное число.

Изъ теоремы же 85[a] слѣдуетъ:

97[a] **Слѣдствіе.** Корень нечетной степени изъ какого-либо числа имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и это число.

Знакомясь съ двумя значеніями корня четной степени изъ положительнаго числа, мы въ первый разъ встрѣчаемся съ дѣйствіемъ, дающимъ болѣе одного результата, и съ выраженіемъ, имѣющимъ болѣе одного значенія. Впослѣдствіи мы увидимъ, что такихъ результатовъ и значеній можетъ быть и больше двухъ. Изъ дѣйствій, съ которыми мы до сихъ поръ познакомились, только извлеченіе корня обладаетъ такою особенностью, а изъ встрѣчавшихся до сихъ поръ выраженій, только корень изъ числа можетъ означать нѣсколько различныхъ чиселъ.

Ради упрощенія предстоящихъ изслѣдованій мы пока въ выраженіи $\sqrt[n]{a}$ подъ a будемъ понимать абсолютное или положительное число (если не будетъ особо оговорено, что оно можетъ быть и отрицательнымъ) и самимъ этимъ символомъ будемъ обозначать только абсолютное или положительное изъ всѣхъ значеній, которыя оно можетъ имѣть по опредѣленію **96**.

Отрицательное же значеніе числа a мы въ этомъ символѣ будемъ допускать пока только при условіи, что n нечетное число.

Опредѣленіе. Абсолютное значеніе корня изъ абсолютнаго числа называется *ариѳметическимъ корнемъ* изъ этого числа.

§ 133. **Понятіе о корнѣ съ отрицательнымъ показателемъ.** Возможность введенія корня вида $\sqrt[-m]{a}$ зависитъ отъ того, имѣется ли всегда число, которое, будучи возвышено въ $(-m)$-ую степень, дастъ a. Что такое число существуетъ во всѣхъ случаяхъ, въ которыхъ $\sqrt[m]{a}$ имѣетъ смыслъ, явствуетъ изъ доказываемой ниже теоремы. Потому мы въ смыслѣ, указываемомъ ею, и вводимъ понятіе о корнѣ съ отрицательнымъ показателемъ:

Теорема: $\sqrt[-m]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{a}}$.

Док. Если мы $\frac{1}{\sqrt[m]{a}}$ возвысимъ въ ($-m$)-ую степень, то по теоремѣ **93** получаемъ:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-m} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{+m} = a.$$

Такъ мы видимъ, что и въ самомъ дѣлѣ $\frac{1}{\sqrt[m]{a}}$ есть число, которое, будучи возвышено въ ($-m$)-ую степень, даетъ a, другими словами, что

$$\sqrt[-m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}.$$

Примѣчаніе. Въ этой главѣ и слѣдующихъ двухъ мы, однако, показателя корня будемъ принимать всегда за положительное число (и цѣлое, конечно, пока о возможности дробныхъ показателей не было еще рѣчи).

§ 134. **Теорема.** Корень изъ цѣлаго числа не можетъ быть дробью.

Предп. a—цѣлое число.

Утв. $\sqrt[n]{a}$ или цѣлое число или ни цѣлое число ни дробь.

Док. Ясно, что если a есть n-вая степень нѣкотораго цѣлаго числа, напр., b, то

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n} = b,$$

то есть, $\sqrt[n]{a}$ есть цѣлое число.

Если же a не представляетъ n-ой степени цѣлаго числа, то $\sqrt[n]{a}$ не можетъ быть цѣлымъ числомъ, напр., c, ибо въ такомъ случаѣ было бы

$$a = c^n,$$

а это противорѣчило бы предположенію, что a не представляетъ n-ой степени цѣлаго числа. Но въ такомъ случаѣ $\sqrt[n]{a}$ и дробнымъ числомъ, напр., $\frac{p}{q}$, быть не можетъ, ибо въ такомъ случаѣ было бы

$$a = \left(\frac{p}{q}\right)^n,$$

что невозможно, такъ какъ степень дроби не можетъ быть цѣлымъ числомъ [§ 129].

§ 135. **Теорема**. Корень изъ дроби не можетъ быть цѣлымъ числомъ.

Предп. $\frac{p}{q}$ настоящая дробь.

Утв. $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ или дробь или ни цѣлое число ни дробь.

Док. Ясно, что если $\frac{p}{q}$ есть n-ая степень нѣкоторой дроби, напр., $\frac{k}{l}$, то

$$\sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{\left(\frac{k}{l}\right)^n}=\frac{k}{l},$$

то есть, $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ есть дробь.

Если же $\frac{p}{q}$ не представляетъ n-ой степени дроби, то $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ не можетъ быть дробью, напр. $\frac{c}{d}$, ибо въ такомъ случаѣ было бы по опредѣленію корня

$$\frac{p}{q}=\left(\frac{c}{d}\right)^n,$$

а это противорѣчило бы предположенію, что $\frac{p}{q}$ не представляетъ n-ой степени дроби. Но въ такомъ случаѣ $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ и цѣлымъ числомъ, напр. a, быть не можетъ, ибо въ такомъ случаѣ было бы

$$\frac{p}{q}=a^n,$$

что невозможно, такъ какъ при положительномъ показателѣ степень цѣлаго числа не можетъ быть дробью.

§ 136. **Теорема.** Корень n-ой степени изъ дроби можетъ быть дробью только въ томъ случаѣ, если по сокращеніи ея и числитель и знаменатель ея окажутся n-ыми степенями цѣлыхъ чиселъ.

Док. Предположивъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{p}{q}$ несократимыми дробями и положивъ

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{p}{q}$$

(см. предыдущую теорему), мы имѣемъ по опредѣленію корня

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{p}{q}\right)^n=\frac{p^n}{q^n}.$$

откуда, по теор. 2 въ § 77,

$$a=p^n$$
$$b=q^n.$$

Послѣднія два равенства и выражаютъ, что утвержденіе справедливо.

§ 137. $\sqrt[n]{a}$ **имѣетъ пока смыслъ только въ исключительныхъ случаяхъ.** Въ § 33 изложено было, что разность $a-b$ имѣетъ всегда смыслъ только по введеніи отрицательныхъ чиселъ. Въ § 66 было указано, что частное $a:b$ имѣетъ всегда смыслъ только по введеніи дробныхъ чиселъ. Теперь спрашивается, достаточно ли имѣющагося у насъ запаса чиселъ для того, чтобы и корень $\sqrt[n]{a}$ имѣлъ смыслъ при всѣхъ значеніяхъ n и a.

Изъ послѣднихъ трехъ теоремъ (§§ 134, 135, 136) слѣдуетъ, что корень $\sqrt[n]{a}$ имѣетъ пока смыслъ, т. е. можетъ быть выраженъ какимъ-либо числомъ изъ имѣющагося у насъ пока запаса ихъ только въ томъ случаѣ, если a равняется 1^n или 2^n или 3^n, вообще n-ой степени какого-либо цѣлаго числа, или же если a равняется такой дроби, у которой по сокращеніи ея и числитель и знаменатель окажутся n-ыми степенями цѣлыхъ чиселъ.

Слѣдовательно, символъ $\sqrt[n]{a}$ имѣетъ пока смыслъ только въ исключительныхъ случаяхъ и допустимъ въ составѣ выраженій только при упомянутыхъ выше условіяхъ и соотвѣтственной всякій разъ оговоркѣ.

Подобныя весьма неудобныя ограниченія существуютъ первоначально и для разности $a-b$ и для частнаго $\frac{a}{b}$ и устраняются расширеніемъ понятія о числѣ (см. §§ 33 и 66). Такъ первыя два обратныя дѣйствія приводятъ къ созданію отрицательныхъ чиселъ (вмѣстѣ съ нулемъ) и чиселъ дробныхъ. И такъ же по аналогіи должно ожидать, что и выраженіе $\sqrt[n]{a}$ можетъ пріобрѣсти общій смыслъ, т. е. смыслъ для всякихъ значеній n и a, если вновь будетъ расширено понятіе о числѣ. И какъ въ возможности первыхъ двухъ расширеній понятія о числѣ мы убѣдились на примѣрахъ, взятыхъ изъ жизни, такъ и возможность введенія еще новаго рода чиселъ изслѣдуемъ сначала на примѣрѣ изъ геометріи.

§ 138. **Существованіе величинъ, результатъ измѣренія которыхъ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ числомъ, ни дробью.** По извѣстной геометрической теоремѣ, называемой пиѳагоровой, площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равняется суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на катетахъ. Если мы возьмемъ такой прямоугольный треугольникъ, котораго катеты равны каждый одному дюйму, то площадь каждаго изъ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ, будетъ равна одному квадратному дюйму, и потому площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ, равна 2 квадратнымъ дюймамъ. Изъ геометріи извѣстно также, что длина стороны послѣдняго квадрата должна

выразиться числомъ, котораго 2-я степень должна равняться 2, и которое, слѣдовательно, по опредѣленію корня должно быть обозначено символомъ $\sqrt{2}$, т. е., длина гипотенузы разсмотрѣннаго прямоугольнаго треугольника должна быть равна $\sqrt{2}$ дюймамъ. Эта длина вполнѣ опредѣленная и точная величина. Слѣдовательно, мы тутъ видимъ потребность въ нѣкоторомъ числѣ тоже совершенно точномъ и опредѣленномъ, соотвѣтствующемъ символу $\sqrt{2}$.

Но такого цѣлаго числа, которое, будучи возвышено въ квадратъ, дало бы 2, не существуетъ. По теоремѣ же, доказанной въ § 134, не существуетъ и дроби равной $\sqrt{2}$.

А при помощи приведенной выше пиѳагоровой теоремы легко убѣдиться, что вообще только въ исключительныхъ случаяхъ длина гипотенузы какого-либо прямоугольнаго треугольника съ данными катетами можетъ быть выражена введенными до сихъ поръ числами.

Видя такимъ образомъ передъ собою величины, которыя ни цѣлыми числами ни дробями выражены быть не могутъ, мы убѣждаемся уже не въ возможности только, но и въ необходимости новаго расширенія понятія о числѣ.

Введеніе дробныхъ чиселъ принято основывать на предполагаемой возможности дѣленія каждой величины на равныя части. Въ необходимости новаго расширенія понятія о числѣ мы можемъ убѣдиться не только при вычисленіи длины гипотенузы равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника и вообще гипотенузы прямоугольнаго треугольника, но и при вычисленіи многихъ другихъ геометрическихъ величинъ. Построеніе же гипотенузы прямоугольнаго треугольника по даннымъ катетамъ нисколько не сложнѣе дѣленія прямого отрѣзка на равныя части.

Какъ тотъ же символъ $\frac{a}{b}$, который служитъ для обозначенія частнаго, остается послѣ второго расширенія понятія о числѣ и символомъ для обозначенія дроби $\frac{a}{b}$, такъ и теперь, расширяя вновь понятіе о числѣ, мы символъ $\sqrt[n]{a}$ въ томъ случаѣ, когда его значеніе не цѣлое число и не дробь, оставляемъ символомъ для вводимыхъ новыхъ чиселъ. Послѣ введенія ихъ пріобрѣтаетъ смыслъ корень всякой степени изъ произвольнаго абсолютнаго или положительнаго цѣлаго или дробнаго числа (о корняхъ изъ отрицательныхъ чиселъ будетъ особо рѣчь ниже). Эти вводимыя вновь числа называются **ирраціональными**.

Но ирраціональные корни не единственныя ирраціональныя числа, есть ирраціональныя числа и другого происхожденія.

Введеніе ирраціональныхъ чиселъ составляетъ третье расширеніе понятія о числѣ.

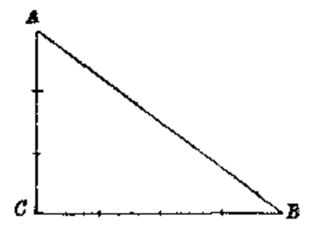
Въ противоположность числамъ ирраціональнымъ тѣ числа, съ которыми мы имѣли дѣло до сихъ поръ, называются *раціональными*.

§ 139. Необходимость еще въ одномъ расширеніи понятія о числѣ Изъ теоремы 85 слѣдуетъ еще, что корень четной степени изъ отрицательнаго числа никакимъ ни раціональнымъ ни ирраціональнымъ числомъ выраженъ быть не можетъ. Такъ по опредѣленію корня символъ $\sqrt{-9}$ долженъ былъ бы означать число, которое, будучи возвышено въ квадратъ, дастъ -9. Но квадратъ всякаго какъ положительнаго, такъ и отрицательнаго числа (безразлично, цѣлое ли оно или дробное, раціональное или ирраціональное) есть число положительное. Слѣдовательно, среди всего имѣющагося у насъ до сихъ поръ запаса чиселъ нѣтъ ни одного, которое соотвѣтствовало бы символу $\sqrt{-9}$. Слѣдовательно, онъ, равно какъ и вообще всякій корень четной степени изъ отрицательнаго числа, долженъ пока считаться не имѣющимъ смысла. Если такимъ корнямъ можетъ быть приданъ смыслъ, то, очевидно, тоже только такимъ же образомъ, какимъ былъ приданъ общій смыслъ разности, частному и корню изъ положительнаго числа, т. е. опять при помощи расширенія понятія о числѣ; и позднѣе мы увидимъ, что такое новое расширеніе понятія о числѣ возможно. Всякій корень четной степени изъ отрицательнаго числа является представителемъ этого новаго рода чиселъ. Ихъ называютъ *числами мнимыми*. И только по введеніи послѣднихъ выраженіе $\sqrt[n]{a}$ имѣетъ всегда смыслъ.

Введеніе мнимыхъ чиселъ составляетъ **четвертое расширеніе понятія о числѣ.**

Въ противоположность числамъ мнимымъ всѣ числа, съ которыми мы имѣемъ дѣло до введенія ихъ, т. е. всѣ числа положительныя и отрицательныя, цѣлыя и дробныя, раціональныя и ирраціональныя, называются *числами вещественными*.

§ 140. Дѣйствія надъ ирраціональными корнями. Если мы разсмотримъ прямоугольный треугольникъ ABC съ катетами 3 и 4 (мѣра произвольная) то квадратъ гипотенузы этого треугольника выразится числомъ $25=3^2+4^2$, слѣдовательно, сама гипотенуза числомъ $\sqrt{25}=5$. Если мы построимъ прямой отрѣзокъ, состоящій изъ отрѣзковъ $MN=AC$ и $NP=AB$, то длина отрѣзка MP выразится числомъ $8=3+5$. Такое же геометрическое сложеніе катета и гипотенузы можно сдѣлать также въ треугольникѣ, о которомъ говорилось въ предыдущемъ параграфѣ. Получающійся отъ такого сложенія отрѣзокъ будетъ состоять изъ двухъ частей, одной длиною въ 1 дюймъ и другой длиною въ $\sqrt{2}$ дюймовъ. Слѣдовательно, относительно длины всего отрѣзка необходимо будетъ сказать, что она равна $(1+\sqrt{2})$ дюймамъ.



Если мы построимъ прямоугольный треугольникъ съ катетами равными 1 дюйму и $\sqrt{2}$ дюймамъ, то квадраты, построенные на этихъ катетахъ,

будутъ равны соотвѣтственно 1 и 2 квадратнымъ дюймамъ, слѣдовательно, квадратъ, построенный на гипотенузѣ этого треугольника равенъ по пиѳагоровой теоремѣ 3 квадратнымъ дюймамъ, длина же самой гипотенузы равна $\sqrt{3}$ дюймамъ. Относительно же длины отрѣзка, равнаго суммѣ этой гипотенузы и большаго изъ катетовъ, необходимо будетъ сказать, что она равна $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ дюймамъ.

Если бы мы катеты, которые мы въ обоихъ послѣднихъ примѣрахъ прибавили къ гипотенузѣ, отняли отъ нея, то получили бы отрѣзки, относительно длины которыхъ необходимо было бы сказать, что она равна въ первомъ случаѣ $(\sqrt{2}-1)$ дюймамъ, а во второмъ случаѣ $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ дюймамъ.

Изъ этихъ и подобныхъ примѣровъ мы убѣждаемся въ существованіи величинъ, которыя могутъ быть выражены только или суммами или разностями чиселъ ирраціональныхъ или чиселъ раціональныхъ и ирраціональныхъ.

Равнымъ образомъ изъ геометріи может быть приведено какое угодно количество примѣровъ такихъ величинъ, которыя должны быть выражены произведеніями или частными ирраціональныхъ чиселъ или чиселъ раціональныхъ и ирраціональныхъ.

Познакомившись такимъ образомъ съ примѣнимостью результатовъ дѣйствій надъ ирраціональными числами, хотя бы и надъ ирраціональными корнями пока только, мы убѣждаемся такимъ образомъ въ цѣлесообразности введенія такихъ дѣйствій. Но для того, чтобы зданіе общей ариѳметики не осталось незаконченнымъ и не нарушена была его внутренняя гармонія, введеніе дѣйствій надъ ирраціональными числами должно считать необходимымъ.

Въ главѣ XXIII будетъ дана общая теорія ирраціональныхъ чиселъ, въ которой будутъ даны и опредѣленія дѣйствій надъ ними.

Въ ней же будутъ даны и опредѣленія равенства и неравенства ирраціональныхъ чиселъ.

Подготовленіемъ же къ ней послужатъ слѣдующія двѣ главы, въ которыхъ обнаружатся, между прочимъ, и нѣкоторыя свойства ирраціональныхъ корней.

ГЛАВА XXI.

Извлеченіе квадратнаго корня.

§ 141. **Выясненіе предстоящей задачи.** Если корень какой-либо степени изъ какого-либо числа раціоналенъ, то значеніе этого корня можетъ быть найдено при помощи разложенія упомянутаго числа на простыхъ сомножителей. Такъ, напр., по признакамъ дѣлимости число 9144576 разлагается на множителей $2^8 \cdot 3^6 \cdot 7^2$. Слѣдовательно,

$$9144576=(2^4 \cdot 3^3 \cdot 7)^2,$$

а потому, по опредѣленію корня,

$$\sqrt{9144576}=2^4 \cdot 3^3 \cdot 7=3024.$$

Такимъ же образомъ число 248832 разлагается на множителей $2^{10} \quad 3^5$
Слѣдовательно,

$$248832=(2^2 \cdot 3)^5,$$

а потому

$$\sqrt[5]{248832}=2^2 \cdot 3=12.$$

Но если въ данномъ числѣ много цыфръ и по однимъ признакамъ дѣлимости окончательное разложеніе его на множителей невозможно, то указанный способъ извлеченія изъ него корня какой-либо степени дѣлается очень сложнымъ и неудобнымъ. Притомъ онъ примѣнимъ только къ раціональнымъ корнямъ, слѣдовательно, только въ очень рѣдкихъ, исключительныхъ случаяхъ. Поэтому необходимо найти другой способъ извлеченія корней, который бы приводилъ всегда къ цѣли и былъ бы въ извѣстномъ разсматриваемомъ ниже смыслѣ примѣнимъ и къ ирраціональнымъ корнямъ. Такъ какъ извлеченіе корня есть дѣйствіе обратное возвышенію въ степень, то, установивъ правило для возвышенія многочлена въ степень, мы можемъ ожидать, что чрезъ обращеніе этого дѣйствія мы найдемъ также правило для извлеченія корня изъ многочлена подобно тому, какъ мы нашли способъ дѣленія многочлена на многочленъ, умноживъ предварительно два многочлена другъ на друга [§ 81]. Правила же, по которымъ будутъ извлекаться корни изъ многочленовъ, будутъ приложимы и къ многозначнымъ числамъ, такъ какъ послѣднія могутъ быть разсматриваемы какъ многочлены (ср. § 85). Но общее правило возвышенія многочлена въ какую-либо степень можетъ быть дано лишь впослѣдствіи. Теперь же могутъ быть даны правила возвышенія многочлена только въ опредѣленныя степени, въ квадратъ, въ кубъ и т. д. Въ зависимости отъ этого мы теперь можемъ только отдѣльно изучать извлеченіе квадратнаго корня, кубичнаго корня и т. д.

a) Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочленовъ.

§ 142. **Возвышеніе многочлена въ квадратъ.** По теоремѣ **50:**

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

По той же теоремѣ мы можемъ возвысить въ квадратъ и трехчленъ слѣдующимъ образомъ:

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$

Такимъ же образомъ мы находимъ, если воспользуемся послѣднимъ полученнымъ для $(a+b+c)^2$ выраженіемъ:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2=$$
$$a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

Всѣ же полученныя выраженія съ полной очевидностью указываютъ на общее правило, какъ должно возвышать многочленъ въ квадратъ:

Теорема. **Квадратъ многочлена равенъ квадрату перваго члена, плюсъ удвоенное произведеніе**

первaго члена на второй, плюсъ квадратъ второго члена, плюсъ удвоенное произведенiе суммы первыхъ двухъ членовъ на третiй, плюсъ квадратъ третьяго члена, плюсъ удвоенное произведенiе суммы первыхъ трехъ членовъ на четвертый, плюсъ квадратъ четвертаго члена и т. д.

§ 143. **Квадратъ расположеннаго многочлена.** Если мы по этой теоремѣ возвысимъ въ квадратъ какой-либо расположенный многочленъ, напр., $2x^2-3xy^2-y^4$, то получаемъ:

$$(2x^2-3xy^2-y^4)^2=(2x^2)^2+2\ .\ 2x^2.(-3xy^2)+(-3xy^2)^2$$
$$+2(2x^2-3xy^2)(-y^4)+(-y^4)^2=4x^4-12x^3y^2+9x^2y^4-4x^2y^4+6xy^6+y^8=$$
$$4x^4-12x^3y^2+5x^2y^4+6xy^6+y^4.$$

Полученный результатъ оказывается также расположеннымъ по нисходящимъ степенямъ буквы x и по восходящимъ степенямъ буквы y. Въ немъ, какъ и въ многочленѣ, который мы возвысили въ квадратъ, первый членъ наивысшiй относительно буквы x, послѣднiй же относительно ея самый низшiй, первый членъ самый низшiй относительно буквы y, послѣднiй относительно ея наивысшiй.

И такъ какъ при возвышенiи тѣмъ же способомъ всякаго даннаго многочлена въ квадратъ въ удвоенныхъ произведенiяхъ степень многочленныхъ множителей *) остается относительно главной буквы все та же, степени же другого множителя относительно ея и степени ея въ квадратахъ все понижаются или все повышаются, смотря по тому, расположенъ ли данный многочленъ по убывающимъ или по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то *вообще при возвышенiи по послѣдней теоремѣ въ квадратъ даннаго расположеннаго многочлена, всегда получится многочленъ, расположенный совершенно въ такомъ же порядкѣ, какъ и данный.*

§ 144. **Составленiе образца извлеченiя квадратнаго корня.** Планъ этой задачи намѣченъ былъ уже въ § 141. Для выполненiя его возвысимъ въ квадратъ какой-либо многочленъ, напр., $3a^2-2ax^3+7x^2$. По теоремѣ, данной въ предыдущемъ параграфѣ, мы получаемъ:

$$(3a^2-2ax^3+7x^6)^2=9a^4-2\ .\ 3a^2\ .\ 2ax^2+4a^2x^6+2(3a^2-2ax^2).\ 7x^6+49x^{12}$$
$$=9a^4-12a^3x^2+4a^2x^6+42a^2x^6-28ax^9+49x^{12}$$
$$=9a^4-12a^3x^3+46a^2x^6-28ax^9+49x^{12}.$$

По опредѣленiю корня обозначаемое символомъ

$$\sqrt{9a^4-12a^2x^3+46a^2x^6-28ax^9+49x^{12}}$$

выраженiе будетъ многочленъ, который, будучи возвышенъ въ квадратъ, дастъ подкоренное выраженiе этого символа. Предположивъ этотъ искомый

*) Въ первомъ удвоенномъ произведенiи слѣдующiй за коэффицiентомъ 2 множитель одночленъ.

многочленъ расположеннымъ по убывающимъ степенямъ буквы a, обозначимъ высшій членъ его буквою α, второй буквою β, третій буквою γ и т. д. Первый членъ искомаго многочлена по упомянутой теоремѣ должно быть выраженіе, квадратъ котораго составитъ высшій членъ многочлена, изъ котораго мы извлекаемъ корень, т. е. $9a^4$. Слѣдовательно,

$$\alpha=\sqrt{9a^4}=3a^2.$$

Чтобы найти слѣдующій членъ искомаго многочлена, отнимемъ отъ подкоренной величины $\alpha^2=(3a^2)^2=9a^4$. Въ получающемся остаткѣ

$$-12a^3x^3+46a^2x^6-28ax^9+49x^{12}$$

высшій членъ $-12a^3x^3$ долженъ быть удвоеннымъ произведеніемъ перваго члена искомаго многочлена на второй, другими словами $2\alpha\beta$. А такъ какъ $\alpha=3a^2$, слѣдовательно, $2\alpha=6a^2$, то β будетъ число, которое, будучи умножено на $6a^2$, дастъ $-12a^3x^3$, то есть,

$$\beta=\frac{-12a^3x^3}{6a^2}=-2ax^3.$$

Если мы отъ полученнаго выше остатка отнимемъ

$$2\alpha\beta+\beta^2=6a^2\,.\,(-2ax^3)+(-2ax^3)^2=-12a^3x^3+4a^2x^6,$$

то въ новомъ остаткѣ

$$42a^2x^6-28ax^9+49x^{12}$$

высшій членъ долженъ быть удвоеннымъ произведеніемъ перваго члена искомаго многочлена на третій, другими словами $2\alpha\gamma$.

А такъ какъ

$$2\alpha=6a^2,$$

то γ будетъ число, которое, будучи умножено на $6a^2$, дастъ $42a^2x^6$, то есть,

$$\gamma=\frac{42a^2x^6}{6a^2}=7x^6.$$

Слѣдовательно,

$$2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=2(3a^2-2ax^3)\,.\,7x^6+49x^{12}=42a^2x^6-28ax^9+49x^{12},$$

то есть, $2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$ составляетъ какъ разъ послѣдній остатокъ. Слѣдовательно, искомый многочленъ есть

$$3a^2-2ax^3+7x^6$$

и извлеченіе корня оканчивается безъ остатка.

Изложеннымъ въ достаточной степени выяснено, какъ бы слѣдовало продолжать дѣйствіе извлеченія квадратнаго корня изъ даннаго многочлена, если бы этотъ корень состоялъ изъ большаго числа членовъ.

Чтобы отчетливѣе былъ виденъ порядокъ производства дѣйствія, повторимъ, опуская объясненія, то же извлеченіе корня, которое мы только

что произвели, въ томъ видѣ, въ какомъ мы считаемъ наиболѣе удобнымъ располагать извлеченіе квадратнаго корня:

$$\sqrt{9a^4-12a^3x^3+46a^2x^6-28ax^9+49x^{12}} = \overset{\alpha}{3a^2}\overset{+\beta}{-2ax^3}\overset{+\gamma}{+7x^6}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9a^4 - \alpha^2 \\
\hline
2\alpha+\beta=6a^2-2ax^3 & \text{»} \; -12a^3x^3+46a^2x^6 \ldots \text{ первый остатокъ} \\
.\; -2ax^3 & -12a^3x^3+4a^2x^6=2\alpha\beta+\beta^2 \\
\hline
2(\alpha+\beta)+\gamma=6a^2-4ax^3+7x^6 & \text{»} \; 42a^2x^6-28ax^9+49x^{12} \ldots \text{ второй остатокъ} \\
.\; 7x^6 & 42a^2x^6-28ax^9+49x^{12}=2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2 \\
\hline
 & 0 \ldots \text{ третій остатокъ.}
\end{array}$$

Въ поясненіе приведеннаго образца замѣтимъ еще слѣдующее:

Въ остаткахъ нѣтъ надобности писать всѣ члены ихъ, а можно писать скачала только наивысшій членъ (или наинизшій, если дѣйствіе располагается по низшей степени главной буквы), а затѣмъ достаточно сносить члены подобные тѣмъ, которые приходится вычитать.

Налѣво отъ вертикальныхъ чертъ надо сначала писать умноженные на 2 уже полученные члены искомаго корня, и только раздѣливъ на удвоенный первый членъ корня первый членъ остатка и получивъ такимъ образомъ слѣдующій членъ искомаго корня, слѣдуетъ этотъ членъ приписывать въ первой строкѣ. Онъ можетъ быть написанъ еще разъ во второй строкѣ какъ множитель, на котораго умножается первая строка.

Греческими буквами наглядно указывается ходъ произведеннаго дѣйствія, равно какъ и то, что произведенное извлеченіе корня состояло въ томъ же возвышеніи въ квадратъ, которое было произведено на стр. 156 съ тою только разницею, что тутъ члены основанія квадрата (т. е. искомаго корня) находились постепенно. Вычитались же здѣсь получающіеся удвоенныя произведенія и квадраты отдѣльныхъ членовъ постепенно изъ даннаго квадрата (т. е. подкоренной величины) для того, чтобы убѣдиться, что эти квадраты членовъ и всѣ удвоенныя произведенія вмѣстѣ дѣйствительно составляютъ этотъ данный квадратъ многочлена.

Если бы мы попытались извлечь квадратный корень изъ того же многочлена изложеннымъ же способомъ, но только не располагая строго дѣйствія или исключительно по высшей степени или исключительно по низшей степени буквы, избранной за главную, то мы не получили бы ни остатка 0, ни настоящаго искомаго корня. А изъ этого мы видимъ, что при извлеченіи квадратнаго корня изъ даннаго многочлена непремѣнно должно соблюдаться правило, чтобы дѣйствіе располагалось или только по высшей или только по низшей степени которой-либо изъ буквъ, встрѣчающихся въ этомъ многочленѣ.

Важно еще упомянуть о томъ, что на основаніи приведеннаго въ § 132 правила знаковъ 97 въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ извлеченія квадратнаго корня первый членъ могъ бы быть также $-3a^2$. Избравъ это выраженіе пер-

вымъ членомъ корня, мы получили бы вторымъ членомъ $+2ax^3$ и третьимъ $-7x^6$. Но такъ какъ

$$-3a^2+2ax^3-7x^6=-(3a^2-2ax^3+7x^6),$$

квадраты же двухъ равныхъ и противоположныхъ чиселъ равны между собою, то и

$$3a^2-2ax^3+7x^6$$

и

$$-3a^2+2ax^3-7x^6$$

должно считать искомымъ корнемъ. Оба рѣшенія задачи можно выразить заразъ такъ:

$$\sqrt{9a^4-12a^3x^3+46a^2x^6-28ax^9+49x^{12}}=\pm(3a^2-2ax^3+7x^6);$$

или же по желанію и такъ:

$$\sqrt{9a^4-12a^2x^3+46a^2x^6-28ax^9+49x^{12}}=\pm(-3a^2+2ax^3-7x^6).$$

Для запоминанія же резюмируемъ кратко все изложенное слѣдующимъ образомъ:

§ 145. **Правило извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена.** Многочленъ, изъ котораго требуется извлечь квадратный корень, располагается по убывающимъ или по возрастающимъ степенямъ буквы, избираемой за главную.

Первый членъ искомаго корня есть квадратный корень изъ перваго члена подкоренной величины.

Квадратъ этого перваго члена корня вычитается изъ даннаго многочлена.

Каждый же слѣдующій членъ искомаго корня отыскивается однимъ и тѣмъ же способомъ, а именно:

Удвоенная полученная уже часть искомаго многочлена пишется предъ вертикальною чертою слѣва отъ остатка.

Частное отъ дѣленія высшаго (или соотвѣтственно низшаго) члена остатка на высшій (или соотвѣтственно низшій) членъ упомянутой удвоенной части корня есть слѣдующій членъ искомаго многочлена.

Къ выраженію слѣва отъ вертикальной черты прибавляется новый членъ корня и на него же умножается полученная сумма. Произведеніе же вычитается изъ послѣдняго остатка.

Такъ дѣйствіе продолжается, пока не получится остатокъ 0 или не обнаружится невозможность извлеченія корня.

§ 146. **Признаки невозможности извлеченія.** Извлеченіе квадратнаго корня, какъ и корня всякой другой степени, изъ даннаго многочлена возможно только въ исключительныхъ случаяхъ, т. е., только въ исключительныхъ случаяхъ существуетъ многочленъ, по возвышеніи котораго въ квадратъ получается данный многочленъ. На основаніи теоремы въ § 142 могутъ быть установлены нѣкоторые признаки, по которымъ иногда еще

не приступая къ выполненію дѣйствія, иногда же изъ свойствъ остатка можно заключить, что извлеченіе квадратнаго корня изъ даннаго многочлена невозможно.

Квадратный корень изъ даннаго многочлена не извлекается,

1) если онъ двучленъ;

2) если, при отсутствіи въ немъ ирраціональныхъ коэффиціентовъ, высшій и низшій члены его (оба или одинъ) не представляютъ квадратовъ;

3) если, при отсутствіи въ немъ дробныхъ членовъ, появляется дробный членъ въ вычисляемомъ корнѣ;

4) если въ остаткѣ появляется членъ, который выше чѣмъ высшій или ниже чѣмъ низшій членъ въ данномъ многочленѣ.

§ 147. **Объ остаткѣ.** Изъ разсужденій въ § 144 слѣдуетъ, что алгебраическая сумма всѣхъ членовъ, которые при извлеченіи квадратнаго корня изъ даннаго многочлена были постепенно вычтены изъ послѣдняго, составляетъ всегда квадратъ выраженія, состоящаго изъ полученныхъ уже членовъ корня. Поэтому, прервавъ на любомъ остаткѣ извлеченіе квадратнаго корня изъ даннаго многочлена, мы можемъ послѣдній представить въ видѣ суммы квадрата названнаго выраженія и остатка.

Напр.,

$$\sqrt{25x^4-30x^3-x^2+9x-1}=5x^2-3x-1$$

$$\begin{array}{ll}
 & 25x^4 \\
\hline
10x^2-3x & -30x^3-x^2 \\
\quad\cdot -3x & \;\;30x^3+9x^6 \\
\hline
10x^2-6x-1 & -10x^2+9x-1 \\
\quad\cdot -1 & -10x^2+6x+1 \\
\hline
 & \qquad 3x-2
\end{array}$$

А потому мы можемъ представить многочленъ $25x^4-30x^3-x^2+9x-1$ въ видѣ такихъ выраженій:

$$25x^4-30x^3-x^2+9x-1=(5x^2-3x)^2-10x^2+9x-1 \text{ или}$$
$$=(5x^6-3x-1)^2+3x-2.$$

Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ остатокъ $3x-2$ указываетъ притомъ, что нѣтъ многочлена, равнаго $\sqrt{25x^4-30x^3-x^2+9x-1}$, такъ какъ при дѣленіи высшаго члена его $3x$ на удвоенный первый членъ корня $10x^2$ получается дробный членъ корня при отсутствіи такихъ членовъ въ подкоренномъ многочленѣ.

Примѣры.

1) Чтобы при извлеченіи квадратнаго корня изъ многочлена

$$4x^2+\frac{4}{3}x-11\frac{8}{9}-\frac{6}{x}+\frac{25}{3x^2}+\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x^4}$$

можно было примѣнить данное въ § 145 правило, перенесемъ букву x въ числителя (по теор. 88) въ тѣхъ членахъ, въ которыхъ она встрѣчается въ знаменателѣ. Послѣ такого преобразованія извлеченіе корня должно будетъ произвести слѣдующимъ образомъ:

$$\sqrt{4x^2+\frac{4}{3}x-11\frac{8}{9}-6x^{-1}+8\frac{1}{3}x^{-2}+6x^{-3}+x^{-4}} = 2x+\frac{1}{3}-3x^{-1}-x^{-2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 \\
\hline
4x+\frac{1}{3} & \text{»}\ \frac{4}{3}x-11\frac{8}{9} \\
\cdot\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}x+\frac{1}{9} \\
\hline
4x+\frac{2}{3}-3x^{-1} & \text{»}\ -12-6x^{-1}+8\frac{1}{3}x^{-2} \\
\cdot\ -3x^{-1} & -12-2x^{-1}+9x^{-2} \\
\hline
4x+\frac{2}{3}-6x^{-1}-x^{-2} & \text{»}\ -4x^{-1}-\frac{2}{3}x^{-2}+6x^{-3}+x^{-4} \\
\cdot\ -x^{-2} & -4x^{-1}-\frac{2}{3}x^{-2}+6x^{-3}+x^{-4} \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

2) Поступая такимъ же образомъ при извлеченіи квадратнаго корня изъ многочлена

$$0{,}04x^2-2+\frac{123}{5x^2}+\frac{11}{x^4}+\frac{4}{x^6},$$

мы получаемъ:

$$\sqrt{0{,}04x^2-2+24{,}6x^{-2}+11x^{-4}+4x^{-6}} = 0{,}2x-5x^{-1}-x^{-3}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 0{,}04x^2 \\
\hline
0{,}4x-5x^{-1} & \text{»}\ -2+24{,}6x^{-2} \\
\cdot\ -5x^{-1} & -2+25x^{-2} \\
\hline
0{,}4x-10x^{-1}-x^{-3} & \text{»}\ -0{,}4x^{-2}+11x^{-4}+4x^{-6} \\
\cdot\ -x^{-3} & -0{,}4x^{-2}+10x^{-4}+x^{-6} \\
\hline
 & x^{-4}+3x^{-6}
\end{array}$$

Слѣдующій членъ корня оказался бы равнымъ $2{,}5x^{-5}$. При умноженіи на него суммы его и удвоенныхъ прежнихъ членовъ корня получились бы члены, содержащіе x^{-8} и x^{-10}, то есть такіе члены, которые ниже низшаго въ данномъ многочленѣ. Слѣдовательно, корень изъ даннаго многочлена не извлекается.

б) Извлеченіе квадратнаго корня изъ опредѣленныхъ чиселъ.

§ 148. **Раціональные корни изъ однозначныхъ и двузначныхъ чиселъ.** Если мы возвысимъ въ квадратъ всѣ существующія однозначныя абсолютныя цѣлыя числа, то получаемъ:

$1^2=1$	$6^2=36$
$2^2=4$	$7^2=49$
$3^2=9$	$8^2=64$
$4^2=16$	$9^2=81$.
$5^2=25$	

Изъ этого слѣдуетъ, что существуетъ только три однозначныхъ (1, 4, 9) и шесть двузначныхъ абсолютныхъ цѣлыхъ чиселъ (16, 25, 36, 49, 64 и 81), изъ которыхъ извлекается квадратный корень, другими словами, квадратные корни изъ которыхъ суть числа раціональныя.

§ 149. **Планъ рѣшенія задачи.** Какъ уже указано было прежде (въ §§ 141 и 85), каждое многозначное число, написанное по десятичной системѣ, можетъ быть разсматриваемо какъ многочленъ, расположенный по нисходящимъ степенямъ числа 10.

Слѣдовательно, извлеченіе квадратнаго корня изъ многозначнаго числа можетъ быть произведено по правиламъ, по которымъ онъ извлекается изъ многочлена, но съ нѣкоторыми незначительными измѣненіями, необходимость въ которыхъ лучше всего выяснится, если мы образецъ извлеченія квадратнаго корня изъ опредѣленнаго числа составимъ такимъ же способомъ, какимъ мы его составили для извлеченія корня изъ многочлена, т. е. возвысивъ предварительно многозначное число въ квадратъ и изслѣдовавъ затѣмъ, какимъ способомъ оно можетъ быть возстановлено по полученному результату.

Но выполненіе этой задачи необходимо облегчить нѣкоторыми подготовительными разсужденіями.

§ 150. **Число цыфръ въ квадратѣ даннаго числа и въ корнѣ изъ даннаго числа.**

Теорема. Квадратъ всякаго цѣлаго числа имѣетъ или вдвое больше цыфръ, чѣмъ это число, или вдвое больше безъ одной.

Док. Наименьшее (значащее) цѣлое однозначное число есть 1 или 10^0, наименьшее двузначное число есть 10 или 10^1. Слѣдовательно, относительно всякаго однозначнаго числа a можно сказать, что

$$10^1 > a \geqq 10^0$$

Наименьшее трехзначное цѣлое число есть 100 или 10^2. Каждое же двузначное цѣлое число меньше 100 и больше 10, и кромѣ того еще 10 есть

двузначное число. Слѣдовательно, относительно каждаго двузначнаго числа b можно сказать, что

$$10^2 > b > 10^1.$$

Продолжая разсуждать такъ же, мы видимъ, что вообще относительно каждаго цѣлаго числа z объ n цыфрахъ можно сказать, что

$$10^n > z \geqq 10^{n-1}.$$

Отсюда же мы чрезъ возвышеніе въ квадратъ, по теор. VII и по 1-й изъ теоремъ, доказанныхъ въ § 130, заключаемъ, что

$$10^{2n} > z^2 \geqq 10^{2n-2}.$$

Но 10^{2n-2} есть число, пишущееся чрезъ цыфру 1 и $(2n-2)$ нулей послѣ нея, и есть наименьшее цѣлое число о $(2n-1)$ цыфрахъ. Число же 10^{2n} есть наименьшее цѣлое число о $(2n+1)$ цыфрахъ. Слѣдовательно, число z^n должно состоять изъ $2n$ или $(2n-1)$ цыфръ, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Раціональный квадратный корень изъ цѣлаго числа объ n цыфрахъ состоитъ изъ $\frac{n}{2}$ цыфръ, если n четное число, и изъ $\frac{n+1}{2}$ цыфръ, если n нечетное число.

§ 151. **Первая цыфра квадратнаго корня изъ даннаго цѣлаго числа.** Квадраты чиселъ 1, 2 и 3 суть числа однозначныя, квадраты же остальныхъ однозначныхъ чиселъ суть числа двузначныя. Квадраты двузначныхъ чиселъ, начинающихся съ цыфръ 1 и 2, суть числа трехзначныя, квадраты двузначныхъ чиселъ, начинающихся съ цыфры 3, отчасти числа трехзначныя, отчасти четырехзначныя, квадраты же всѣхъ остальныхъ двузначныхъ чиселъ суть числа четырехзначныя. Вообще квадраты всѣхъ чиселъ, начинающихся съ цыфры 4, суть числа съ четнымъ числомъ цыфръ, квадраты всѣхъ чиселъ, начинающихся съ цыфръ 1 и 2, суть числа съ нечетнымъ числомъ цыфръ, квадраты же чиселъ, начинающихся съ цыфры 3, могутъ имѣть и четное число цыфръ и на одну цыфру меньшее нечетное (это нечетное число цыфръ получается только, если въ числѣ, возвышаемомъ въ квадратъ, цыфра, слѣдующая за цыфрою 3, не больше 1).

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для опредѣленія первой цыфры корня изъ даннаго числа необходимо отсчитать, начиная справа, такое четное число цыфръ, чтобы остались еще двѣ или одна цыфра. Это достигается наиудобнѣйшимъ образомъ, если *разбить данное число, начиная справа, на грани по двѣ цыфры въ каждой.*

Число граней есть число цыфръ корня; а первою цыфрою корня должна быть цыфра, выражающая наибольшее цѣлое число, квадратъ котораго не больше числа, выражаемаго цыфрами въ первой лѣвой грани.

Справедливость же послѣдняго утвержденія явствуетъ изъ слѣдующаго. Число объ n цыфрахъ, начинающееся съ цыфры a, ($1 \leq a \leq 9$), не меньше $a \cdot 10^{n-1}$ и меньше $(a+1) \cdot 10^{n-1}$ (напр., 75182 больше $7 \cdot 10^4$ и меньше $8 \cdot 10^4$). Квадратъ же этого числа не меньше $a^2 \cdot 10^{2n-2}$ и меньше $(a+1)^2 \cdot 10^{2n-2}$. Слѣдовательно, въ первой лѣвой грани этого числа стоитъ число, которое не меньше a^2 и меньше $(a+1)^2$. По отношенію къ нему a и имѣетъ указанное выше свойство.

§ 152. **Возвышеніе многозначнаго числа въ квадратъ.** Положимъ, что въ квадратъ возвышается четырехзначное число, цыфры котораго суть a, b, c и d. Это число будетъ

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d,$$

квадратъ же его будетъ, по правилу на стр. 155 и 156,

$$(a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d)^2 = a^2 \cdot 10^6 + 2 \cdot a \cdot 10^3 \cdot b \cdot 10^2 + b^2 \cdot 10^4 + 2(a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2) \cdot c \cdot 10 + c^2 \cdot 10^2 + 2(a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10)d + d^2 = a^2 \cdot 10^6 + 2ab \cdot 10^5 + b^2 \cdot 10^4 + 2(a \cdot 10 + b) \cdot c \cdot 10^3 + c^2 \cdot 10^2 + 2(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)d \cdot 10 + d^2.$$

Изъ полученнаго выраженія видно, что при возвышеніи указаннымъ способомъ въ квадратъ четырехзначнаго числа получающіеся отдѣльные члены должны оканчиваться: первый 6-ю нулями, второй 5-ю, третій 4-мя, четвертый 3-мя и т. д. Такимъ же образомъ легко убѣдиться, что при возвышеніи этимъ способомъ въ квадратъ числа объ n цыфрахъ получающіяся отдѣльныя слагаемыя должны оканчиваться: первое $(2n-2)$ нулями, второе $(2n-3)$ нулями, третье $(2n-4)$ нулями и т. д., предпослѣднее однимъ нулемъ. То есть, въ этихъ слагаемыхъ число нулей на концѣ должно послѣдовательно все на одинъ нуль уменьшаться, пока, наконецъ, не получится послѣднее слагаемое безъ нулей на концѣ (при условіи, конечно, что въ числѣ, возвышаемомъ въ квадратъ, послѣдняя цыфра значащая).

Если мы теперь, пользуясь сдѣланными только-что указаніями, возвысимъ въ квадратъ опредѣленное число, напр. 2317, такъ же, какъ возвышенъ былъ въ квадратъ многочленъ

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d,$$

и при этомъ обозначимъ для большаго удобства $a \cdot 10^3$ буквою α, $b \cdot 10^2$ буквою β, $c \cdot 10$ буквою γ и еще замѣнимъ ради единообразія букву d буквою δ, то получаемъ:

$$2317^2 = (2000 + 300 + 10 + 7)^2 = (2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7)^2 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2,$$

и, опуская въ вычисляемыхъ слагаемыхъ нули и указывая мѣста ихъ точками:

$$\begin{array}{r@{\;=\;}ccccccc}
\alpha^2 & 4 & . & . & . & . & . & . \\
2\alpha\beta & 1 & 2 & . & . & . & . & . \\
\beta^2 & & & 9 & . & . & & \\
2(\alpha+\beta)\gamma & & & 4 & 6 & & . & \\
\gamma^2 & & & & & 1 & . & \\
2(\alpha+\beta+\gamma)\,\delta & & & 3 & 2 & 3 & 4 & . \\
\delta^2 & & & & & & 4 & 9 \\
\hline
(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 & 5 & 3 & 6 & 8 & 4 & 8 & 9
\end{array}$$

и послѣ сложенія $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = 5368489 = 2317^2$.

Замѣтимъ еще, что на практикѣ не нужно ставить и точекъ, которыя должны были обозначать опущенные нули, какъ ни нулей, ни точекъ не пишутъ при умноженіи многозначныхъ чиселъ другъ на друга, а оставляютъ просто мѣста ихъ пустыми.

Примѣры.

1) 35751^2 вычисляемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r@{\;=\;}cccccccccc}
\alpha^2 & 9 & & & & & & & & & \\
2\alpha\beta & 3 & 0 & & & & & & & & \\
\beta^2 & & 2 & 5 & & & & & & & \\
2(\alpha+\beta)\gamma & & 4 & 9 & 0 & & & & & & \\
\gamma^2 & & & & 4 & 9 & & & & & \\
2(\alpha+\beta+\gamma)\delta & & & & 3 & 5 & 7 & 0 & & & \\
\delta^2 & & & & & & 2 & 5 & & & \\
2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\varepsilon & & & & & & 7 & 1 & 5 & 0 & \\
\varepsilon^2 & & & & & & & & & & 1 \\
\hline
35751^2 & 1 & 2 & 7 & 8 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1.
\end{array}$$

Примѣчаніе.

По достиженіи достаточнаго навыка примѣненіе буквъ дѣлается излишнимъ.

2) 406007^2 вычисляемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r@{\;}cccccccccccc}
 & 1 & 6 & & & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & & & & \\
 & & & 4 & 8 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & 3 & 6 & & & & & & \\
 & & & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & 5 & 6 & 8 & 4 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & & & & & 4 & 9 \\
\hline
406007^2 = & 1 & 6 & 4 & 8 & 4 & 1 & 6 & 8 & 4 & 0 & 4 & 9;
\end{array}$$

или удобнѣе такъ:

$$
\begin{array}{r}
1600 \\
480 \\
360000 \\
568400 \\
49 \\
\hline
406007^2=164841684049.
\end{array}
$$

Примѣчаніе.

Изъ послѣдняго примѣра мы выводимъ правило, что при возвышеніи вторымъ способомъ въ квадратъ даннаго числа каждый нуль среди цыфръ его требуетъ приписки двухъ нулей въ строкахъ, содержащихъ квадраты.

§ 153. **Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлаго числа.** Способъ, которымъ мы предполагали составить образецъ такого вычисленія, намѣченъ былъ нами въ § 149. Слѣдуя указаннымъ тамъ путемъ, возстановимъ число, котораго квадратъ мы вычислили въ предыдущемъ параграфѣ, предполагая этотъ квадратъ даннымъ. Это возстановленіе и будетъ извлеченіе квадратнаго корня изъ 5368489, другими словами, выполненіе дѣйствія, указываемаго символомъ

$$\sqrt{5368489}.$$

Разбивъ подкоренное число на грани, какъ это указано было въ § 151, мы получаемъ:

$$\sqrt{5|36|84|89}$$

и узнаемъ вмѣстѣ съ этимъ, что искомый корень, если онъ раціоналенъ, есть цѣлое число, состоящее изъ четырехъ цыфръ, изъ которыхъ первая 2, такъ какъ 2 есть наибольшее число, котораго квадратъ меньше 5.

Обозначимъ цыфры искомаго корня буквами a, b, c и d. Какъ мы уже видѣли

$$a=2.$$

Чтобы найти b, отнимемъ $(a.10^3)^2=4000000$ отъ даннаго числа. Въ остаткѣ

$$1368489$$

высшій членъ есть удвоенное произведеніе числа тысячъ на число сотенъ, другими словами $2ab$ сотенъ тысячъ. Разсматривая только сотни тысячъ, мы видимъ, что $2ab$ должно быть не больше 13, а такъ какъ $2a=4$, то b не больше $\frac{13}{4}$, т. е., b, будучи цѣлымъ числомъ, не можетъ быть больше 3. Если $b=3$, то $2ab=12$, а $b^2=9$.

Если мы отъ полученнаго выше остатка отнимемъ $2 \,.\, a \,.\, 10^3 \,.\, b \,.\, 10^2 = 1200000$ и затѣмъ еще $b^2 \,.\, 10^4 = 90000$, то въ новомъ остаткѣ

$$78489$$

высшій членъ будетъ $2(a\,.\,10^3 + b\,.\,10^2)\,c\,.\,10 = 2.23.1000.\,c$, т. е. $46c$ тысячъ. Разсматривая однѣ только тысячи, мы видимъ, что $46c$ должно быть не больше 78, слѣдовательно, c не больше $\frac{78}{46}$, т. е. 1.

Если же $c=1$, то

$$2(a\,.\,10^3 + b\,.\,10^2)\,c\,.\,10 = 46000$$

и

$$c^2.\,10^2 = 100.$$

Если мы отъ послѣдняго остатка отнимемъ одно, а затѣмъ и другое изъ этихъ чиселъ, то получится остатокъ

$$32389.$$

Въ немъ высшій членъ

$$2(a\,.\,10^3 + b\,.\,10^2 + c\,.\,10)d = 2\,.\,231\,.\,10\,.\,d.$$

Разсматривая одни только десятки, мы видимъ, что $462d$ должно быть не больше 3238, слѣдовательно, d не больше $\frac{3238}{462}$, т. е. 7.

Если же $d=7$, то

$$2(a\,.\,10^3 + b\,.\,10^2 + c\,.\,10).\ d = 32340$$

и

$$d^2 = 49.$$

Если мы отъ послѣдняго остатка отнимемъ одно, а затѣмъ и другое изъ этихъ чиселъ, то получится остатокъ 0. Слѣдовательно, искомый корень есть 2317.

Изложеннымъ способомъ слѣдовало бы продолжать дѣйствіе извлеченія квадратнаго корня изъ даннаго опредѣленнаго числа, если бы оно состояло изъ большаго числа цыфръ.

Если мы для большаго удобства обозначимъ $a\,.\,10^3$ буквою α, $b\,.\,10^2$ буквою β, $c\,.\,10$ буквою γ, и ради единообразія d замѣнимъ буквою δ, затѣмъ не только въ удвоенныхъ произведеніяхъ и квадратахъ, но и передъ вертикальными чертами отпустимъ еще въ числахъ нули на концѣ, и, наконецъ, въ остаткахъ будемъ писать не всѣ цыфры полностью, а будемъ сносить

изъ даннаго числа цыфры по одной, то все только-что произведенное и описанное дѣйствіе можно изобразить въ слѣдующемъ видѣ:

$$
\begin{array}{lll}
 & \sqrt{5\,36|84\,89} = \overset{\alpha}{2}\;\overset{\beta}{3}\;\overset{\gamma}{1}\;\overset{\delta}{7} & (\alpha+\beta+\gamma+\delta) \\
 & \underline{4 = \alpha^2} & \\
2\alpha = 4 & 13 & \\
 & \underline{12 = 2\alpha\beta} & \\
 & 16 & \\
 & \underline{9 = \beta^2} & \\
2(\alpha+\beta) = 46 & 78 & \\
 & \underline{46 = 2(\alpha+\beta)\gamma} & \\
 & 324 & \\
 & \underline{1 = \gamma^2} & \\
2(\alpha+\beta+\gamma) = 462 & 3238 & \\
 & \underline{3234 = 2(\alpha+\beta+\gamma)\delta} & \\
 & 49 & \\
 & \underline{49 = \delta^2} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

§ 154. **Окончательный образецъ извлеченія.** Извлеченіе квадратнаго корня изъ числа пріобрѣтаетъ еще болѣе полное сходство со способомъ извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена, который указанъ былъ въ § 144, если мы вмѣсто того, чтобы вычитать удвоенныя произведенія и квадраты отдѣльно, будемъ ихъ вычитать заразъ.

Такъ какъ

$$2\alpha\beta+\beta^2=(2\alpha+\beta)\beta,$$

то, приписавъ въ примѣрѣ, разсмотрѣнномъ въ предыдущемъ параграфѣ къ дѣлителю 4 цыфру 3 и умноживъ 43 на 3, мы и получимъ $2\alpha\beta+\beta^2$.

Ясно, что нужно при вычитаніи произведенія 129 предварительно снести также цыфру 6, соотвѣтствующую β^2.

Такъ же и $2(\alpha+\beta)\gamma$ и γ^2 можно вычесть заразъ. Такъ какъ

$$2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=[2(\alpha+\beta)+\gamma]\cdot\gamma,$$

то приписавъ къ дѣлителю 46 цыфру 1 и умноживъ 461 на 1, мы и получимъ $2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$. И тутъ при вычитаніи произведенія 461 нужно предварительно снести цыфру, соотвѣтствующую γ^2, т. е. 4.

Такимъ же образомъ слѣдуетъ продолжать и дальше.

Съ изложенными упрощеніями **расположеніе дѣйствія извлеченія квадратнаго корня** будетъ слѣдующее:

$$\sqrt{5\,36|84\,89} = \overset{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2\quad 3\quad 1\quad 7}$$

4 $= \alpha^2$

$2\alpha + \beta =$ 43|136

.3|129 $= 2\alpha\beta + \beta^2$ [1]

$2(\alpha + \beta) + \gamma =$ 461 784

.1|461 $2(\alpha + \beta)\gamma + \gamma^2$ [2]

$2(\alpha + \beta + \gamma) + \delta =$ 4627|32389

.7|32389 $= 2(\alpha + \beta + \gamma)\delta + \delta^2$ [3]

0

П р и м ѣ ч а н і е.

По достиженіи достаточнаго навыка примѣненіе буквъ дѣлается излишнимъ.

Примѣры.

1) $\sqrt{14|84\,25\,26\,76} = 38526$

	9
68	584 [4]
.8	544
765	4025
.5	3825
7702	20026
.2	15404
77046	462276
.6	462276
	0

---

1) Букву β и цыфру 3 налѣво отъ вертикальной черты пишемъ и цыфру 6 сносимъ уже по опредѣленія второй цыфры корня.

2) Буква γ и цыфра 1 приписываются и цыфра 4 сносится уже по опредѣленіи третьей цыфры корня.

3) Буква δ и цыфра 7 приписываются и цыфра 9 сносится уже по опредѣленіи четвертой цыфры корня.

4) Удвоенная первая цыфра 6 въ 58 содержится 9 разъ. Но приписавъ къ 6 цыфру 9 и умноживъ 69 на 9, мы получаемъ число 621, котораго отъ 584 отнять нельзя. Потому второю цыфрою искомаго корня должно взять не 9, а только 8.

2) $\sqrt{16|18|41|68|40|49}=406007$

```
      16
 806 | 4841 ¹)
  .6 | 4836
 812007 | 5684049 ²)
     .7 | 5684049
                0
```

Примѣчаніе.

Помѣщаемыя слѣва отъ вертикальныхъ черть удвоенныя числа, выражаемыя полученными уже цыфрами корня, могутъ быть вычисляемы безъ умноженія на 2; достаточно для полученія ихъ прибавлять къ каждому такому удвоенному числу стоящаго подъ нимъ множителя. Такъ, напр., въ 1-мъ примѣрѣ 76 есть 68+8, 770=765+5 и 7704=7702+2.

§ 155. **Смыслъ остатка.** Вернемся къ примѣру извлеченія квадратнаго корня, разсмотрѣнному въ §§ 153 и 154, и изслѣдуемъ, какъ измѣнится результатъ извлеченія, если подкоренное число увеличится на нѣкоторое цѣлое число, напр., на 1, на 2, на 3 и т. д. Ясно, что если оно увеличится на 2 . 2317 . 1+1=4635, то результатомъ извлеченія должно будетъ получиться число 2318, такъ какъ $2318^2=(2317+1)^2=2317^2+2\,.\,2317\,.\,1+1$, и что если оно увеличится менѣе чѣмъ на 4635, напр., на 3267, то при извлеченіи корня изъ 5368489+3267=5372756 получится этотъ избытокъ 3267 надъ 5368489 остаткомъ.

Такъ какъ

$$5368489+4635=5373124,$$

то изъ изложеннаго мы заключаемъ, что квадратные корни изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, которые больше 5368489, но меньше 5373124, ирраціональны. Примѣненіе же къ каждому изъ нихъ правилъ, установленныхъ для извлеченія квадратнаго корня изъ цѣлыхъ чиселъ, даетъ возможность представить каждое такое число какъ сумму квадрата и другого числа. Напр., при упомянутомъ выше остаткѣ, получающемся при извлеченіи квадратнаго корня изъ 5372756, мы имѣемъ:

$$5372756=2317^2+3267.$$

---

1) Получивъ остаткомъ въ первой грани 0 и снеся цыфру 4, мы видимъ, что это число меньше удвоенной первой цыфры 8. Слѣдовательно, вторая цыфра искомаго корня 0. Потому, снеся еще двѣ цыфры и приписавъ 0 къ упомянутой цыфрѣ 8, мы чрезъ дѣленіе 484 на 80 опредѣляемъ третью цыфру искомаго корня.

2) 812 больше 56. Слѣдовательно, четвертая цыфра корня 0. Снеся слѣдующія двѣ цыфры 8 и 4 и приписавъ 0 къ 812, мы убѣждаемся, что и 8120 еще больше 5684, что, слѣдовательно, и пятая цыфра корня 0. Потому мы сносимъ еще двѣ цыфры и приписываемъ къ 8120 еще 0. Затѣмъ уже обычнымъ образомъ получается послѣдняя цыфра корня 7.

Вообще, если нѣкоторое цѣлое число A заключено между a^2 и $(a+1)^2$, гдѣ a тоже цѣлое число, то $\sqrt{A}$ должно быть ирраціональное число, такъ какъ, согласно теоремѣ въ § 134, $\sqrt{A}$ дробью быть не можетъ, между a и $a+1$ цѣлыхъ чиселъ нѣтъ, а всякое число, которое меньше a, будучи возвышено въ квадратъ, дастъ меньше a^2, всякое же число, которое больше $a+1$, будучи возвышено въ квадратъ, дастъ больше $(a+1)^2$. Слѣдовательно, при извлеченіи квадратнаго корня изъ A по установленнымъ выше правиламъ долженъ получиться нѣкоторый остатокъ r; и полученіе остатка есть признакъ, что A есть число ирраціональное.

Названный остатокъ r равенъ $A-a^2$, изъ чего слѣдуетъ, что

$$A=a^2+r.$$

Отнявъ по a^2 отъ обѣихъ частей неравенства

$$A<(a+1)^2$$

или, что то же самое, отъ неравенства

$$A<a^2+2a+1,$$

мы по первой изъ теоремъ, доказанныхъ въ § 50, узнаемъ, что

$$A-a^2<2a+1$$

или

$$r<2a+1,$$

т. е., что упомянутый остатокъ (онъ вѣдь цѣлое число) не можетъ быть больше удвоеннаго числа, получающагося результатомъ извлеченія.

Послѣдняя истина допускаетъ примѣненіе, совершенно аналогичное извѣстному ариѳметическому правилу, что остатокъ, получающійся при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ другъ на друга, не можетъ быть больше дѣлителя.

Положимъ, напр., что единицъ n-аго разряда (напр., сотенъ) при извлеченіи слѣдовало взять a (считая раздробленными на таковыя и высшіе разряды). Это произойдетъ въ томъ случаѣ, когда подкоренное число содержитъ единицъ $2n$-аго разряда (десятковъ тысячъ) больше a^2 и меньше $(a+1)^2$, слѣдовательно, если само подкоренное число больше $a^2 \cdot 10^{2n}$ и меньше $(a+1)^2 \cdot 10^{2n}$. Назвавъ подкоренное число N и заключающееся въ немъ число единицъ $2n$-аго разряда A, мы имѣемъ:

$$a^2 \cdot 10^{2n}<N<(a+1)^2 \cdot 10^{2n}$$

и

$$a^2<A<(a+1)^2.$$

А изъ послѣдняго неравенства мы, какъ выше, заключаемъ, что по опредѣленіи a остатокъ не можетъ быть больше $2a$, другими словами, *остатокъ не можетъ быть больше удвоеннаго числа, выражаемаго полученными уже цыфрами.*

Примѣненіе этого правила пояснимъ на примѣрѣ, приведенномъ на страницѣ 169. Встрѣчающееся тамъ число 1484, выражаемое цыфрами въ первыхъ двухъ граняхъ, указываетъ, сколько въ подкоренномъ числѣ милліоновъ, корень же изъ числа 1484, составляющій первыя двѣ цыфры въ искомомъ корнѣ, выражаетъ, сколько въ немъ тысячъ Если бы мы вмѣсто 8 вторую изъ этихъ цыфръ взяли 7, то изъ 584 пришлось бы вычесть 67 . 7 = =469, причемъ въ остаткѣ получилось бы 115, число большее, чѣмъ 2 . 37 . А это составило бы указаніе на то, что вторая цыфра искомаго корня должна быть больше 7.

§ 156. **Возвышеніе въ квадратъ десятичной дроби и извлеченіе изъ таковой квадратнаго корня.** Чтобы изобразить въ общемъ видѣ десятичную дробь съ n цыфрами послѣ запятой, назовемъ буквою a цѣлое число, которое получится, если мы въ этой дроби опустимъ запятую. Значеніе такой дроби будетъ $\frac{a}{10^n}$. Квадратъ же ея будетъ $\frac{a^2}{10^{2n}}$.

Это выраженіе содержитъ такое **правило возвышенія десятичной дроби въ квадратъ:**

Опустивъ запятую, нужно возвысить въ квадратъ получившееся цѣлое число и въ этомъ квадратѣ отдѣлить запятою вдвое больше цыфръ, чѣмъ ихъ есть въ данной дроби.

Изъ правила же этого слѣдуетъ, что только десятичныя дроби, имѣющія послѣ запятой четное число цыфръ, изъ которыхъ послѣдняя значащая, могутъ быть квадратами (притомъ только квадратами дробей, согласно теоремѣ въ § 135) [1]), и что, слѣдовательно, только корни изъ десятичныхъ дробей съ четнымъ числомъ цыфръ (съ послѣднею значащею цыфрою) послѣ запятой могутъ быть раціональными.

Такъ какъ десятичныя дроби суть числа, написанныя совершенно такъ же по десятичной системѣ, какъ цѣлыя числа, то и извлеченіе изъ нихъ корня должно производиться такъ же, какъ и изъ цѣлыхъ чиселъ. Дойдя при выполненіи такого дѣйствія до запятой, т. е. до единицъ, мы, дѣля остатокъ со снесенною цыфрою, означающею десятыя, на удвоенное уже полученное число, найдемъ десятыя искомаго корня. Слѣдовательно, и въ немъ должна быть для указанія этого поставлена запятая, послѣ которой, если корень раціоналенъ, должна послѣдовать еще половина того числа цыфръ, которое стоитъ послѣ запятой въ данномъ подкоренномъ числѣ.

Относительно же разбивки на грани изъ сказаннаго слѣдуетъ, что въ десятичныхъ дробяхъ ее должно производить, начиная отъ запятой и отсчитывая отъ нея какъ влѣво, такъ и вправо по двѣ цыфры.

---

[1]) О квадратахъ ирраціональныхъ чиселъ не можетъ быть рѣчи, пока не введены и не опредѣлены дѣйствія надъ ирраціональными числами.

Примѣръ.

```
√8|01,03|15|06|25 = 28,3025
 4
48|401
. 8|384
563|17,03
 . 3|16,89
56602 |141506
    . 2 |113204
566045 |2830225
     . 5 |2830225
              0
```

Изложенные въ предыдущихъ параграфахъ пріемы, составляющіе **извлеченіе квадратнаго корня изъ даннаго опредѣленнаго числа** могутъ быть кратко резюмированы слѣдующимъ образомъ:

§ 157. **Правило.** *Чтобы извлечь квадратный корень изъ даннаго числа, послѣднее разбиваютъ, начиная отъ запятой* [1]*, на грани по двѣ цыфры въ каждой.*

Цыфра, выражающая наибольшее число, котораго квадратъ не больше числа въ первой лѣвой грани, есть первая цыфра искомаго корня.

Каждая слѣдующая цыфра его отыскивается однимъ и тѣмъ же способомъ, а именно:

Удвоенное число, выражаемое полученными уже цыфрами корня, пишется передъ вертикальною чертою слѣва отъ остатка, къ которому приписывается первая цыфра изъ слѣдующей грани. Частное отъ дѣленія числа, получившагося послѣ упомянутаго сноса цыфры, на число передъ чертою, есть слѣдующая цыфра корня. Ее приписываютъ къ числу передъ чертою и умножаютъ образовавшееся такимъ образомъ число на нее же [2]*. Произведеніе вычитаютъ изъ стоящаго вправо отъ черты остатка, приписавъ къ послѣднему предварительно и вторую цыфру грани.*

Если дойдя до послѣдней цыфры подкоренного числа, мы не получили остатка 0, то корень изъ даннаго числа не извлекается, другими словами, корень изъ даннаго числа ни цѣлое число, ни дробь, а число ирраціональное.

§ 158 **Признаки ирраціональности квадратныхъ корней.** Квадраты какъ цѣлыхъ чиселъ, такъ и десятичныхъ дробей, которыхъ послѣдняя цыфра

---

[1] У цѣлаго числа запятая подразумѣвается послѣ послѣдней цыфры.

[2] Выражаясь точнѣе: на выражаемое ею же число.

есть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, суть числа, оканчивающіяся соотвѣтственно цыфрами 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4 и 1. Такъ мы видимъ, что какова бы ни была послѣдняя цыфра числа, квадратъ его никогда не можетъ оканчиваться цыфрами 2, 3, 7 и 8.

При возвышенiи въ квадратъ цѣлаго числа, оканчивающагося нулями, получается число съ четнымъ числомъ нулей на концѣ.

Изъ изложеннаго здѣсь, изъ сказаннаго о десятичныхъ дробяхъ въ § 156 и изъ опредѣленія квадратнаго корня слѣдуетъ, что ***квадратный корень ирраціоналенъ***, *слѣдовательно, не извлекается безъ остатка*,

1) *если число оканчивается цыфрами 2, 3, 7 или 8*,

2) *если число, будучи цѣлымъ, оканчивается нечетнымъ числомъ нулей*,

3) *если число, будучи десятичною дробью, имѣетъ послѣ запятой нечетное число цыфръ при значащей послѣдней цыфрѣ*,

4) *если при разложеніи числа на простыхъ сомножителей который-либо изъ нихъ окажется встрѣчающимся въ нечетномъ количествѣ.*

Примѣчаніе.

Изъ послѣдняго признака слѣдуетъ, что ирраціональны квадратные корни изъ чиселъ, у которыхъ сумма цыфръ дѣлится на 3, но не дѣлится на 9, или у которыхъ послѣдняя цыфра дѣлится на 2 или на 5, но двѣ послѣднія цыфры выражаютъ число, не дѣлящееся на 4 или соотвѣтственно на 25, или у которыхъ три послѣднія цыфры выражаютъ число, дѣлящееся на 8 или на 125, но четыре послѣднія цыфры—число, не дѣлящееся на 16 или соотвѣтственно на 625, и т. д.

§ 159. **Приближенныя значенія квадратнаго корня.** Такъ какъ величина десятичной дроби не измѣняется, если послѣ послѣдней цыфры ея будутъ приписываться нули, то процессъ извлеченія квадратнаго корня изъ десятичной дроби могъ бы быть продолженъ и послѣ полученія остатка, указывающаго на ирраціональность корня.

И ко всякому цѣлому числу мы, поставивъ запятую послѣ послѣдней цыфры, можемъ приписать, не измѣняя этимъ его величины, произвольное количество нулей. Поэтому и въ случаѣ ирраціональности корня изъ цѣлаго числа мы дѣйствіе извлеченія могли бы все-таки продолжать, не останавливаясь, какъ прежде, на остаткѣ.

Покажемъ возможность такого рода извлеченія и изслѣдуемъ, какой въ получающемся при этомъ результатѣ заключается смыслъ, произведя такимъ образомъ для примѣра извлеченіе квадратнаго корня изъ 2.

$$\sqrt{2,00|00|00|0\ldots} = 1,4142135\ .$$

	1
24	1,00
4	96
281	400
1	281
2824	11900
4	11296
28282	60400
2	56564
282841	383600
1	282841
2828423	10075900
3	8485269
2828426	15906310
	и т д.

Продолжая это извлеченіе, мы остатка 0 никогда получить не можемъ, такъ какъ такой остатокъ означалъ бы, что существуетъ дробь, квадратъ которой равенъ цѣлому числу 2, а это противорѣчитъ теоремѣ, доказанной въ § 134. Слѣдовательно, это извлеченіе можетъ быть продолжено безъ конца, другими словами, получающаяся десятичная дробь имѣетъ безконечно большое число цыфръ. Но въ то же время она періодическою быть не можетъ, ибо періодическая дробь можетъ быть обращена въ простую, допустивъ же возможность періода, мы вмѣстѣ съ тѣмъ сдѣлали бы невозможное допущеніе, что существуетъ дробь, которой квадратъ равенъ цѣлому числу 2.

Каковъ же смыслъ получающагося результата?

Смыслъ всякаго извлеченія квадратнаго корня состоитъ въ отысканіи числа, квадратъ котораго равнялся бы числу, изъ котораго извлекается корень. Такъ какъ въ нашемъ результатѣ безконечно большое число цыфръ, то возвысить его въ квадратъ мы не можемъ. Но этотъ результатъ больше 1, и меньше 2, больше 1, 4, но меньше 1, 5, больше 1, 41, но меньше 1, 42 и т. д. И вотъ, возвышая въ квадратъ тѣ числа, между которыми заключенъ результатъ, мы узнаемъ слѣдующее:

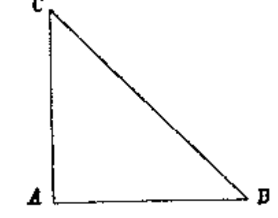
$$1^2 < 2 < 2^2$$
$$1,4^2 < 2 < 1,5^2$$
$$1,41^2 < 2 < 1,42^2$$
$$1,414^2 < 2 < 1,415^2$$
$$1,4142^2 < 2 < 1,4143^2$$
$$1,41421^2 < 2 < 1,41422^2$$

и т. д.

Въ этомъ рядѣ неравенствъ мы видимъ нѣкоторый рядъ чиселъ (лѣвый), все увеличивающихся, которыхъ квадраты меньше 2, но все болѣе и болѣе приближаются къ 2, и второй рядъ чиселъ (правый), все уменьшающихся, которыхъ квадраты больше 2, но такъ же все болѣе и болѣе приближаются къ 2.

Числа, между квадратами которыхъ остается заключеннымъ 2, съ каждою новою строкою все болѣе и болѣе приближаются другъ къ другу: въ первой строкѣ разность между ними 1, во второй 0,1, въ третьей 0,01, въ четвертой 0,001 и т. д. И такъ какъ произведенное выше извлеченіе корня изъ 2 можетъ быть продолжено безъ конца, то можетъ быть достигнуто такое приближеніе другъ къ другу тѣхъ двухъ чиселъ, между квадратами которыхъ заключается 2, которое намъ будетъ желательно. Если бы потребовалось, напр., чтобы разность между такими двумя числами составила всего только $\frac{1}{10^{20}}$, то нужно было бы продолжить извлеченіе корня до двадцатой цыфры послѣ запятой. Получившаяся при этомъ дробь и дробь съ повышенною на 1 послѣднею цыфрою удовлетворили бы требованію.

Какъ уже указано было въ § 138, точно выразить въ какой-либо линейной мѣрѣ длину гипотенузы равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, съ катетами, равными 1 такой мѣрѣ каждый, можно только, говоря, что она равна $\sqrt{2}$ такимъ мѣрамъ.



X O N_1 N_2 I M_2 M_1 Y

Если мы построимъ такой равнобедренный прямоугольный треугольникъ ABC и на прямой XY отложимъ отъ точки O вправо отрѣзокъ $OI=BC$, а затѣмъ отъ той же точки O отрѣзки

$OM_1=2$ упомянутымъ мѣрамъ,
$ON_1=1$ такой мѣрѣ,
$OM_2=1,5$ этой мѣры,
$ON_2=1,4$ » »
$OM_3=1,42$ » »
$ON_3=1,41$ » »
$OM_4=1,415$ » »
$ON_4=1,414$ » » и т. д.,

вообще отрѣзки, содержащіе число этихъ мѣръ, равное дробямъ въ приведенныхъ выше неравенствахъ, то мы видимъ, что точки M_2 и N_2 ближе къ I, чѣмъ M_1 и N_1, M_3 и N_3 къ I еще ближе и т. д., что вообще точки M и N все болѣе и болѣе приближаются къ I; что хотя онѣ никогда точки I достигнуть, т. е. съ нею точно совпасть, не могутъ, но что онѣ могутъ быть приближены другъ къ другу, слѣдовательно, и къ I на сколько угодно. Мысленно это приближеніе можно продолжить безъ конца. Выполняя же его при помощи инструментовъ, мы вскорѣ обнаружимъ какъ несовершенство ихъ, такъ и

несовершенство нашего зрѣнія и дѣйствія нашихъ рукъ. Въ концѣ концовъ отличать точки M и N другъ отъ друга и отъ I дѣлается невозможнымъ. Потому на практикѣ ирраціональное число $\sqrt{2}$ можетъ быть замѣнено дробью. Показанное выше извлеченіе квадратнаго корня изъ 2 и есть способъ найти дробь, которая можетъ замѣнить ирраціональное число $\sqrt{2}$ съ такимъ хорошимъ приближеніемъ, какое только будетъ желательно.

То, что показано было на примѣрѣ $\sqrt{2}$, относится ко всякому ирраціональному корню, т. е., *для каждаго ирраціональнаго корня можно найти раціональную дробь, которая съ такимъ хорошимъ приближеніемъ можетъ замѣнить его, какое только будетъ желательно*

§ 160. **Разграничительная точка.** Послѣдній чертежъ даетъ наглядную картину того, какъ постепенно приближаются къ значенію ирраціональнаго корня приближенныя значенія его. Дроби, выражающія разстоянія точекъ M отъ O, называются *приближенными значеніями* $\sqrt{2}$ *съ избыткомъ*; дроби, выражающія разстоянія точекъ N отъ O называются *приближенными значеніями* $\sqrt{2}$ *съ недостаткомъ.*

Какъ разстоянія точекъ M отъ O больше, чѣмъ разстояніе точки I отъ O, и разстоянія точекъ N отъ O меньше разстоянія отъ O точки I, такъ и приближенныя значенія $\sqrt{2}$ съ избыткомъ естественно считать больше $\sqrt{2}$ и равнымъ образомъ приближенныя значенія $\sqrt{2}$ съ недостаткомъ нельзя не считать меньше $\sqrt{2}$. Этимъ разсужденіемъ указывается необходимость введенія сравненія значеній ирраціональныхъ чиселъ съ раціональными и притомъ въ такомъ смыслѣ, чтобы изъ ряда неравенствъ, приведеннаго въ предыдущемъ параграфѣ вытекалъ слѣдующій новый для абсолютнаго (или положительнаго) значенія $\sqrt{2}$·

$$1<\sqrt{2}<2$$
$$1,4<\sqrt{2}<1,5$$
$$1,41<\sqrt{2}<1,42$$
$$1,414<\sqrt{2}<1,415$$
$$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$$
$$1,41421<\sqrt{2}<1,41422$$

и т. д.

Естественно, что и всѣ раціональныя числа, находящіяся между приближенными значеніями $\sqrt{2}$ въ лѣвомъ столбцѣ этихъ неравенствъ, и, конечно, всѣ раціональныя числа, которыя меньше ихъ, должно считать меньше $\sqrt{2}$, и что равнымъ обрзаомъ всѣ раціональныя числа, которыя находятся между приведенными значеніями $\sqrt{2}$ съ избыткомъ и которыя больше ихъ, должно считать больше $\sqrt{2}$. Все это будетъ достигнуто, если мы будемъ считать больше $\sqrt{2}$ всякое положительное раціональное число, котораго

квадратъ больше 2,—и меньше $\sqrt{2}$ всякое положительное раціональное число, котораго квадратъ меньше 2, нуль и всѣ отрицательныя числа

Какъ точка I разсѣкаетъ прямую на двѣ части,— правую, которой точки отстоятъ дальше отъ O, чѣмъ I, и разстоянія точекъ которой отъ O выражаются числами большими, чѣмъ $\sqrt{2}$, и лѣвую, разстоянія точекъ которой отъ O выражаются числами меньшими, чѣмъ $\sqrt{2}$ (включая сюда и O и точки, лежащія влѣво отъ O, которыхъ разстоянія отъ O должны выражаться отрицательными числами), такъ $\sqrt{2}$ дѣлитъ всѣ раціональныя числа на два класса, на классъ чиселъ большихъ, чѣмъ $\sqrt{2}$, и на классъ чиселъ меньшихъ, чѣмъ $\sqrt{2}$.

Точка I, наглядно указывающая мѣсто числа $\sqrt{2}$ среди чиселъ раціональныхъ, называется *разграничительною точкою* [1])

Относительно же упомянутаго выше раздѣленія всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса важно указать уже теперь на слѣдующее:

Такое раздѣленіе называется **сѣченіемъ въ области раціональныхъ чиселъ** и могло бы быть произведено и раціональнымъ числомъ, напр., цѣлымъ числомъ 7. Но въ такомъ случаѣ не содержали бы числа 7 ни классъ чиселъ большихъ 7, ни классъ чиселъ меньшихъ 7, слѣдовательно, раздѣлены были бы на два класса *не всѣ* раціональныя числа, а оставалось бы еще число 7, которое въ совокупности всѣхъ раціональныхъ чиселъ заняло бы такимъ образомъ особое мѣсто. Такъ сѣченіемъ, произведеннымъ этимъ раціональнымъ числомъ, вся совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ оказывается раздѣленною на три класса: на само число 7 и на классы чиселъ большихъ, чѣмъ 7, и меньшихъ, чѣмъ 7. И подобнымъ образомъ при всякомъ сѣченіи, производимомъ раціональнымъ числомъ, совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ дѣлится на три класса, тогда какъ при сѣченіи, производимомъ ирраціональнымъ числомъ она дѣлится только на два класса [Подробнѣе объ этомъ говорится въ §§ 196, 197, 198].

§ 161. **Обобщеніе смысла равенства $(\sqrt{a})^2=a$.** Тѣмъ же способомъ, какъ для $\sqrt{2}$, можетъ быть указано точное мѣсто среди раціональныхъ чиселъ и каждому другому ирраціональному квадратному корню. Послѣ же этого мы имѣемъ право при всякомъ положительномъ значеніи a опредѣлить $\sqrt{a}$ какъ число, котораго квадратъ равенъ a, безразлично, означаетъ ли $\sqrt{a}$ раціональное или ирраціональное число. Слѣдовательно, для всякаго положительнаго значенія a мы имѣемъ право писать какъ опредѣленіе:

$$(\sqrt{a})^2=a$$

§ 162. **Примѣненіе понятій «больше» и «меньше» къ ирраціональнымъ квадратнымъ корнямъ.** Разсужденіями предыдущихъ параграфовъ

[1]) «Разграничительная точка» есть переводъ французскаго термина point de demarcation, введеннаго математикомъ Бертраномъ (Bertrand).

фовъ указывается, что мы не получимъ противорѣчій съ дѣйствительностью только при слѣдующемъ примѣненіи понятій «больше» и «меньше» къ абсолютнымъ ирраціональнымъ квадратнымъ корнямъ

Опредѣленіе. $\sqrt{a}$ *должно считать больше всякаго раціональнаго числа, котораго квадратъ меньше a, и меньше всякаго раціональнаго числа, котораго квадратъ больше a; и изъ двухъ ирраціональныхъ квадратныхъ корней должно считать тотъ больше, котораго подкоренное число больше.*

На основаніи этого опредѣленія дѣлаются примѣнимыми изложенныя въ § 34 правила сравненія между собою относительныхъ чиселъ [26] и къ относительнымъ ирраціональнымъ квадратнымъ корнямъ.

§ 163. **Извлеченіе квадратнаго корня съ указанной точностью.** Въ рядѣ неравенствъ, приведенныхъ въ § 160, мы имѣемъ рядъ приближенныхъ значеній $\sqrt{2}$. Въ первой строкѣ эти значенія 1 и 2. Они отличаются другъ отъ друга на 1. Слѣдовательно, $\sqrt{2}$, будучи больше 1, но меньше 2, долженъ отличаться отъ обоихъ этихъ приближенныхъ значеній меньше, чѣмъ на 1. Это выражаютъ, говоря, что 1 и 2 суть приближенныя значенія $\sqrt{2}$ съ точностью до 1, присовокупляя еще, какъ мы это уже дѣлали въ § 160, что 1 есть приближеніе съ недостаткомъ, а 2 приближеніе съ избыткомъ.

Такимъ же образомъ про остальныя приближенія, приведенныя тамъ же, говорятъ, что 1,4 и 1,5 суть приближенныя значенія $\sqrt{2}$ съ точностью до $\frac{1}{10}$, 1,41 и 1,42 суть приближенныя значенія этого корня съ точностью до $\frac{1}{100}$, 1,414 и 1,415—приближенныя его значенія съ точностью до $\frac{1}{1000}$ и т. д., указывая этимъ, что $\sqrt{2}$ отличается отъ приближеній въ первомъ случаѣ меньше, чѣмъ на 0,1, во второмъ меньше, чѣмъ на 0,01, въ третьемъ меньше, чѣмъ на 0,001 и т. д. Вообще же, когда рѣчь идетъ о приближенныхъ значеніяхъ ирраціональнаго квадратнаго корня, то степень приближенія обыкновенно характеризуютъ такимъ образомъ:

Опредѣленіе 1. Приближенными значеніями $\sqrt{a}$ съ точностью до 1 называютъ оба ближайшія другъ къ другу цѣлыя числа, между которыми заключается $\sqrt{a}$, значитъ, между квадратами которыхъ заключается a [§ *130, теор. 1*]

Опредѣленіе 2. *Приближенными значеніями $\sqrt{a}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$ называются обѣ дроби, отличающіяся другъ отъ друга на $\frac{1}{n}$, между которыми заключается $\sqrt{a}$, значитъ, между квадратами которыхъ заключается a.*

Изъ неравенства

$$p^2 < a < (p+1)^2$$

мы видимъ, что приближенныя значенія квадратныхъ корней, съ точностью до 1, изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ и дробей, заключенныхъ между p^2 и $(p+1)^2$ суть одни и тѣ же, а именно p и $p+1$. А изъ этого слѣдуетъ, что приближенныя значенія квадратнаго корня изъ дроби съ точностью до 1 суть тѣ же, что и приближенныя значенія квадратнаго корня изъ цѣлой части ея.

Такъ, напр.,

$$8<\sqrt{73}<9$$

и

$$8<\sqrt{73,835}<9.$$

Для того же, чтобы найти приближенное съ недостаткомъ значеніе квадратнаго корня изъ какого-либо числа съ точностью до 1, достаточно произвести указаннымъ въ § 157 способомъ извлеченіе, ограничиваясь цѣлой частью числа.

§ 164. Приближенныя значенія квадратнаго корня съ точностью до $\frac{1}{n}$. Если требуется найти $\sqrt{a}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, то это значитъ, что нужно найти двѣ дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ такого свойства, чтобы было:

$$\frac{m}{n}<\sqrt{a}<\frac{m+1}{n},$$

значитъ и

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2<a<\left(\frac{m+1}{n}\right)^2.$$

Преобразовавъ по теоремѣ **92** въ этомъ неравенствѣ квадраты, мы имѣемъ:

$$\frac{m^2}{n^2}<a<\frac{(m+1)^2}{n^2}.$$

Умноживъ же это неравенство на n^2, мы по теоремѣ **1** въ § **63** получаемъ:

$$m^2<an^2<(m+1)^2.$$

Тутъ m и $m+1$ суть два отличающихся другъ отъ друга на 1 цѣлыхъ числа, и между квадратами ихъ заключено число an^2. Слѣдовательно, m и $m+1$ суть приближенныя значенія $\sqrt{an^2}$ съ точностью до 1. Такимъ образомъ мы узнаемъ, какъ найти числителей искомыхъ дробей

$$\frac{m}{n} \text{ и } \frac{m+1}{n},$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ и самыя дроби, такъ какъ знаменатель ихъ n данъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

Правило. Чтобы найти приближенныя значенія $\sqrt{a}$ съ недостаткомъ **и съ избыткомъ** съ точностью до $\frac{1}{n}$, нужно отыскать приближенныя значенія $\sqrt{an^2}$ **съ** точностью до 1 и раздѣлить каждое изъ нихъ на n.

Примѣръ

Чтобы вычислить $\sqrt{19}$ съ точностью до $\frac{1}{31}$, нужно произвести слѣдующее извлеченіе:

$$\sqrt{19 \cdot 31^2} = \sqrt{19 \cdot 961} =$$

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{1\,82'59} \quad 135 \\ & 1 \\ 23 & 82 \\ 3 & 69 \\ 265 & 1359 \\ 5 & 1325 \\ & 34 \end{array}$$

Такъ мы узнаемъ, что приближенныя значенія $\sqrt{19}$ съ точностью до $\frac{1}{31}$ суть $\frac{135}{31}$ и $\frac{136}{31}$ или $4\frac{11}{31}$ и $4\frac{12}{31}$, такъ что

$$4\frac{11}{31} < \sqrt{19} < 4\frac{12}{31}.$$

Каждое изъ полученныхъ приближеній отличается отъ $\sqrt{19}$ менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{31}$.

§ 165. **Извлеченіе квадратнаго корня изъ обыкновенныхъ дробей.** Предполагая пока $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ раціональными, мы имѣемъ:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$$

То есть, мы узнаемъ, что $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ есть число, котораго квадратъ равенъ $\frac{a}{b}$. Но такое число пишется $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Слѣдовательно, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Это равенство выражаетъ правило, что если корни изъ числителя и знаменателя дроби раціональны, то извлеченіе изъ нея корня можно произвести, извлекая его изъ числителя и изъ знаменателя.

Напр.,

$$\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}}=\frac{5}{12}.$$

Если имѣется какой-либо признакъ ирраціональности корня изъ знаменателя сокращенной уже дроби, то удобнѣе извлекать корень изъ такой дроби, обративъ ее предварительно въ десятичную.

Но въ случаѣ ирраціональности корня изъ знаменателя дроби извлеченіе изъ нея корня можетъ быть произведено также по предварительномъ такомъ расширеніи ея, послѣ котораго корень изъ знаменателя станетъ раціональнымъ.

Напр.,

$$\sqrt{\frac{17}{120}}=\sqrt{\frac{17}{2^3 . 3 . 5}}=\sqrt{\frac{17 . 2 . 3 . 5}{2^4 . 3^2 . 5^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{510}{(2^2.3.5)^2}}=\frac{\sqrt{510}}{60}=\frac{22,5831796\ldots}{60}=0,37638632\ldots$$

Само собою разумѣется, что извлеченіе при этомъ можетъ быть произведено съ тою степенью точности, которая будетъ желательна.

§ 166. **Упрощенное нахожденіе послѣднихъ цыфръ приближеннаго значенія корня.** Оно основывается на слѣдующемъ предложеніи:

Теорема. Когда найдено болѣе половины всѣхъ цыфръ корня, которыя требовалось вычислить, то остальныя можно получить чрезъ дѣленіе остатка на удвоенную полученную часть корня.

Док. Если требуется найти квадратный корень изъ нѣкотораго числа съ точностью до $\frac{1}{10^z}$, то можно приписать послѣ послѣдней цыфры столько нулей, чтобы послѣ запятой оказалось $2z$ цыфръ, отбросить запятую, извлечь изъ получившагося такимъ образомъ цѣлаго числа корень съ точностью до 1 и въ полученномъ результатѣ отдѣлить запятою z десятичныхъ знаковъ. Такъ отысканіе опредѣленнаго числа цыфръ корня сводится къ извлеченію корня изъ цѣлаго числа, съ точностью до 1.

Обозначивъ такое цѣлое число буквою N, положимъ, что при извлеченіи изъ него корня найдено уже болѣе половины требуемаго числа цыфръ, а именно n цыфръ, и что, слѣдовательно, осталось ихъ найти еще не болѣе $n-1$, напр., $n-m$. Число, выражаемое упомянутыми n цыфрами и столькими нулями послѣ нихъ, сколько еще осталось опредѣлить цыфръ, назовемъ a, число же, выражаемое этими послѣдними $(n-m)$ цыфрами, назовемъ x, полагая при этомъ, что послѣдняя изъ нихъ или берется съ недостаткомъ или точна.

Тогда или точно или съ точностью до 1 будетъ

$$\sqrt{N}=a+x,$$

слѣд.,

$$N=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2,$$

а остатокъ, получающійся послѣ опредѣленія первыхъ n цыфръ корня, $N-a^2$.

Отнявъ отъ обѣихъ частей равенства

$$N=a^2+2ax+x^2$$

по a^2, мы по теоремѣ VII получаемъ:

$$N-a^2=2ax+x^2$$

Раздѣливъ же еще послѣднее равенство на $2a$, мы находимъ:

$$\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}.$$

Этимъ равенствомъ указывается, что, раздѣливъ остатокъ $N-a^2$ на удвоенную уже полученную часть корня $2a$, мы вмѣсто x получаемъ $x+\frac{x^2}{2a}$, т. е. на $\frac{x^2}{2a}$ больше, чѣмъ бы слѣдовало. Но дробь $\frac{x^2}{2a}$ меньше $\frac{1}{2}$. Ибо число x, будучи цѣлымъ числомъ объ $(n-m)$ цыфрахъ, должно быть меньше 10^{n-m}, слѣдовательно, x^2 меньше 10^{2n-2m}, число же a, будучи числомъ объ $(n+n-m)$, т. е. $(2n-m)$ цыфрахъ, должно быть больше 10^{2n-m-1}.

Изъ неравенствъ же

$$x^2<10^{2n-2m}$$

и

$$a>10^{2n-m-1}$$

слѣдуетъ, по теоремѣ 3 въ § 79, что

$$\frac{x^2}{a}<10^{-m+1},$$

т. е.,

$$\frac{x^2}{a}<\frac{1}{10^{m-1}}.$$

При наименьшемъ возможномъ значеніи m, то есть при $m=1$, получается наименьшее значеніе знаменателя дроби $\frac{1}{10^{m-1}}$, равное 1, слѣдовательно, наибольшее значеніе самой этой дроби, **также равное 1.**

Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2}$$

А такъ какъ $a+x$ обозначаетъ $\sqrt{N}$ съ точностью до 1 съ недостаткомъ или точное значеніе этого корня, то изъ послѣдняго неравенства слѣдуетъ, что способомъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, $\sqrt{N}$ извлекается съ точностью лучшею, чѣмъ до 1.

Это и даетъ право опредѣлять послѣднія цыфры корня способомъ, указаннымъ въ теоремѣ, которую мы доказывали.

Примѣры.

1) Если мы по опредѣленіи четырехъ цыфръ продолжимъ извлеченіе $\sqrt{2}$ изложеннымъ здѣсь способомъ, то получаемъ:

```
     √2,—1,4142135
        1
 24    100
  4     96
 281 |  400
   1 |  281
 2824 | 11900
    4 | 11296
 2828    |6040
          5656
           3840
           2828
          10120
            8484
           16360
           14140
             2220
```

Такъ мы видимъ, что при примѣненіи этого способа мы и восьмую цыфру искомаго приближеннаго значенія корня получили правильную, и получили бы девятою 7 вмѣсто 6, хотя по доказанной теоремѣ ручаться можно было бы напередъ только за правильность пятой, шестой и седьмой цыфръ его.

При производствѣ и дѣленія сокращеннымъ способомъ вычисленіе послѣднихъ цыфръ еще бы болѣе упростилось.

2) Продолживъ извлеченіе $\sqrt{3}$ изложеннымъ способомъ, начиная съ четвертой цыфры, мы, какъ оказывается, получаемъ не только пятую, но и шестую цыфру правильную.

```
√3 = 1,73205
 1
─────
27 | 200
 7   189
─────────
343 | 1100
  3 | 1029
─────
346    710
       692
       ────
       1800
```

3) Примѣнимъ этотъ способъ еще къ слѣдующему извлеченію:

```
√4 23 26 73,30 43,60 59|24 = 2057,34618
 4
405 | 2326
  5 | 2025
─────────────
4107 | 30173
   7 | 28749
─────────────
41143 | 142430
    3 | 123429
──────────────
41146 | 190014
      | 164584  }
        ──────
         25430
         24688
         ─────
           742
           411
           331
           329
           ───
```

Дѣленіе произведено сокращеннымъ способомъ, такъ какъ съ момента продолженія извлеченія сокращеннымъ способомъ нѣтъ смысла сносить цыфры.

Послѣдній корень раціоналенъ. Но сокращенный способъ извлеченія, будучи лишь приближеннымъ, этого обнаружить не можетъ.

ГЛАВА XXII.

Извлеченіе кубичнаго корня.

а) Извлеченіе кубичнаго корня изъ многочленовъ.

§ 167. **Возвышеніе многочлена въ кубъ.** Правила для извлеченія квадратныхъ корней мы нашли, установивъ предварительно правило для возвышенія многочлена въ квадратъ [§ 142]. Аналогичнымъ образомъ мы пра-

вила для извлеченія кубичныхъ корней найдемъ, установивъ предварительно правило для возвышенія многочлена въ кубъ.

Кубъ суммы двухъ чиселъ выражается слѣдующимъ образомъ [§ 62].

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Примѣняя выражаемое этимъ равенствомъ правило, мы для куба трехчлена получаемъ:

$$(a+b+c)^3=[(a+b)+c]^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3;$$

и вообще для куба многочлена:

$$(a+b+c+d+\ldots+k+l)^3=$$
$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+$$
$$d^3+\ldots+3(a+b+c+d+\ldots+k)^2l+3(a+b+c+d+\ldots+k)l^2+l^3.$$

Выражаемое этимъ равенствомъ общее правило возвышенія многочлена въ кубъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Кубъ многочлена равенъ кубу перваго члена, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй членъ, плюсъ утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго члена, плюсъ кубъ второго члена, плюсъ утроенное произведеніе квадрата суммы первыхъ двухъ членовъ на третій членъ, плюсъ утроенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на квадратъ третьяго, плюсъ кубъ третьяго члена, плюсъ утроенное произведеніе квадрата суммы первыхъ трехъ членовъ на четвертый членъ и. т. д.

§ 168. **Кубъ расположеннаго многочлена.** Если мы по этой теоремѣ возвысимъ въ кубъ какой-либо расположенный многочленъ, напр. $\frac{1}{2}p^2-pq^2-5q^4$, то получаемъ:

$$\left(\frac{1}{2}p^2-pq^2-5q^4\right)^3=\left(\frac{1}{2}p^2\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}p^2\right)^2pq^2+3\cdot\frac{1}{2}p^2\cdot(-pq^2)^2-(pq^2)^3-$$
$$3\left(\frac{1}{2}p^2-pq^2\right)^2\cdot 5q^4+3\left(\frac{1}{2}p^2-pq^2\right)(-5q^4)^2+(-5q^4)^3=$$
$$\frac{1}{8}p^6-\frac{3}{4}p^5q^2+\frac{3}{2}p^4q^2-p^3q^6$$
$$-\frac{15}{4}p^4q^4+15p^3q^6-15p^2q^8$$
$$+\frac{75}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{12}$$
$$=\frac{1}{8}p^6-\frac{3}{4}p^5q^2-\frac{9}{4}p^4q^4+14p^3q^6+\frac{45}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{12}.$$

Полученный результатъ оказывается расположеннымъ по нисходящимъ степенямъ буквы p и по восходящимъ степенямъ буквы q, слѣдовательно, такъ же, какъ и многочленъ, который мы возвысили въ кубъ, при чемъ, какъ и въ этомъ многочленѣ, въ результатѣ первымъ является членъ наивысшій относительно буквы p и въ то же время самый низшій относительно буквы q, послѣднимъ же членъ самый низшій относительно буквы p и наивысшій относительно буквы q. И легко убѣдиться [ср. § 143], что если мы, примѣняя приведенное правило, въ получающемся кубѣ приведеніе подобныхъ членовъ будемъ производить, удерживая всегда мѣсто перваго изъ такихъ членовъ, то *вообще при возвышеніи по послѣдней теоремѣ въ кубъ даннаго расположеннаго многочлена всегда получится многочленъ, расположенный совершенно въ такомъ же порядкѣ, какъ и данный.*

§ 169. **Составленіе образца извлеченія кубичнаго корня.** Мы получимъ такой образецъ тѣмъ же способомъ, какимъ получили въ § 144 образецъ извлеченія квадратнаго корня, т. е. возстановивъ данный многочленъ по его кубу. Для этого воспользуемся тѣмъ возвышеніемъ въ кубъ, которое мы произвели въ предыдущемъ параграфѣ и при которомъ мы получили въ результатѣ многочленъ

$$\frac{1}{8}p^6-\frac{3}{4}p^5q^2-\frac{9}{4}p^4q^4+14p^3q^6+\frac{45}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{12}.$$

Предположивъ кубичный корень изъ него такъ же, какъ и онъ, расположеннымъ по убывающимъ степенямъ буквы p, обозначимъ высшій членъ его буквою α, второй буквою β, третій буквою γ и т. д. Первый членъ искомаго многочлена по приведенной въ § 167 теоремѣ должно быть выраженіе, котораго кубъ составитъ высшій членъ многочлена, изъ котораго мы извлекаемъ корень, т. е. $\frac{1}{8}p^6$. Слѣдовательно,

$$\alpha=\sqrt[3]{\frac{1}{8}p^6}=\frac{1}{2}p^2.$$

Чтобы найти слѣдующій членъ искомаго многочлена, отнимемъ отъ подкоренной величины $\alpha^3=\left(\frac{1}{2}p^2\right)^3=\frac{1}{8}p^6$. Въ получающемся остаткѣ

$$-\frac{3}{4}p^5q^2-\frac{9}{4}p^4q^4+14p^3q^6+\frac{45}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{10}$$

высшій членъ $-\frac{3}{4}p^5q^2$ долженъ быть утроеннымъ произведеніемъ квадрата перваго члена искомаго многочлена на второй, другими словами $3\alpha^2\beta$. А такъ какъ $\alpha=\frac{1}{2}p^2$, слѣдовательно, $3\alpha^2=\frac{[illegible]}{4}p^4$, то β будетъ число, которое,

будучи умножено на $\frac{3}{4}p^4$, дасть $-\frac{3}{4}p^5q^2$, то есть,

$$\beta=\frac{-\frac{3}{4}p^5q^2}{\frac{3}{4}p^4}=-pq^2$$

Если мы отъ полученнаго выше остатка отнимемъ $3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ $=(3\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)\beta=\left[3\left(\frac{1}{2}p^2\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}p^2\cdot(-pq^2)+(-pq^2)^2\right](-pq^2)=$ $-\frac{3}{4}p^5q^2+\frac{3}{2}p^4q^4-p^3q^6$, то въ новомъ остаткѣ

$$-\frac{15}{4}p^4q^4+15p^3q^6+\frac{45}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{12}$$

высшій членъ долженъ быть высшій членъ утроеннаго произведенія квадрата суммы первыхъ двухъ членовъ искомаго многочлена на третій членъ, другими словами, высшій членъ выраженія $3(\alpha+\beta)^2\gamma$, то есть $3\alpha^2\gamma$. А такъ какъ

$$3\alpha^2=\frac{3}{4}p^4,$$

то γ будетъ число, которое, будучи умножено на $\frac{3}{4}p^4$, дастъ $-\frac{15}{4}p^4q^4$, то есть,

$$\gamma=\frac{-\frac{15}{4}p^4q^4}{\frac{3}{4}p^4}=-5q^4.$$

Слѣдовательно:

$3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3=[3(\alpha+\beta)^2+3(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2]\gamma=$
$\left[3\left(\frac{1}{2}p^2-pq^2\right)^2+3\left(\frac{1}{2}p^2-pq^2\right)(-5q^4)+(-5q^4)^2\right]\cdot(-5q^4)=$
$\left[\frac{3}{4}p^4-3p^3q^2+3p^2q^4-\frac{15}{2}p^2q^4+15pq^6+25q^8\right]\cdot(-5q^4)=$

$$-\frac{15}{4}p^4q^4+15p^3q^6-15p^2q^8+\frac{75}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{12}=$$

$$-\frac{15}{4}p^4q^4+15p^3q^6+\frac{45}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{12},$$

то есть, $3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3$ составляетъ какъ разъ послѣдній остатокъ. Слѣдовательно, искомый многочленъ есть

$$\frac{1}{2}p^2-pq^2-5q^4$$

и извлеченіе корня оканчивается безъ остатка.

Изложеннымъ въ достаточной степени выяснено, какъ бы слѣдовало продолжать дѣйствіе извлеченія кубичнаго корня изъ даннаго многочлена, если бы этотъ корень состоялъ изъ большаго числа членовъ.

Чтобы отчетливѣе былъ виденъ порядокъ производства дѣйствія, повторимъ, опуская объясненія, то же извлеченіе корня, которое мы только что произвели, въ томъ видѣ, въ какомъ мы считаемъ наиболѣе удобнымъ располагать извлеченіе кубичнаго корня:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}p^6-\frac{3}{4}p^5q^2-\frac{9}{4}p^4q^4+14p^3q^6+\frac{45}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{12}}=\overset{\alpha}{\frac{1}{2}p^2}\overset{+\beta}{-pq^2}\overset{+\gamma}{-5q^4}$$

$$\frac{1}{8}p^6=\alpha^3$$

$$3\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2=\frac{3}{4}p^4-\frac{3}{2}p^3q^2+p^2q^4 \quad \Big| \quad » -\frac{3}{4}p^5q^2-\frac{9}{4}p^4q^4+14p^3q^6$$

$$\beta= \quad -pq^2 \quad \Big| \quad -\frac{3}{4}p^5q^2+\frac{3}{2}p^4q^4-p^3q^6=3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$3(\alpha+\beta)^2=\frac{3}{4}p^4-3p^3q^2+3p^2q^4 \quad \Big| \quad » -\frac{15}{4}p^4q^4+15p^3q^6+\frac{45}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{12}$$

$$3(\alpha+\beta)\gamma= \quad -\frac{15}{2}p^2q^4+15pq^6$$

$$\gamma^2= \quad +25q^8$$

$$3(\alpha+\beta)^2+3(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=\frac{3}{4}p^4-3p^3q^2-\frac{9}{2}p^2q^4+15pq^6+25q^8$$

$$\gamma= \quad -5q^4 \quad \Big| \quad -\frac{15}{4}p^4q^4+15p^3q^6+\frac{45}{2}p^2q^8-75pq^{10}-125q^{12}=3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3$$

$$0$$

Въ поясненіе приведеннаго образца замѣтимъ еще слѣдующее:

Въ остаткахъ нѣтъ надобности писать всѣ члены ихъ, а можно писать сначала только наивысшій (или низшій, если

дѣйствіе располагается по низшей степени главной буквы), а затѣмъ достаточно сносить члены подобные тѣмъ, которые приходится вычитать.

Налѣво отъ вертикальныхъ чертъ нужно сначала писать умноженный на 3 квадратъ суммы полученныхъ уже членовъ искомаго корня, и только раздѣливъ на первый членъ этого утроеннаго квадрата первый членъ остатка и получивъ такимъ образомъ слѣдующій членъ искомаго корня, слѣдуетъ къ утроенному квадрату прибавлять утроенное произведеніе суммы прежнихъ членовъ корня на новый и квадратъ новаго члена. Этотъ послѣдній членъ можетъ быть предъ вертикальною чертою еще разъ повторенъ въ особой строкѣ какъ множитель.

Греческими буквами наглядно указывается планъ произведеннаго дѣйствія, а также и то, что извлеченіе кубичнаго корня изъ даннаго многочлена состоитъ въ постепенномъ возвышеніи въ кубъ искомаго многочлена.

Какъ при извлеченіи квадратнаго корня изъ многочлена, такъ и при извлеченіи изъ многочлена корня кубичнаго должно непремѣнно соблюдаться правило, чтобы дѣйствіе располагалось или только по высшей или только по низшей степени которой-либо изъ буквъ, встрѣчающихся въ членахъ многочлена.

Все изложенное резюмируемъ въ краткой формѣ для запоминанія слѣдующимъ образомъ:

§ 170. **Правило извлеченія кубичнаго корня изъ многочлена.** Многочленъ, изъ котораго требуется извлечь кубичный корень, располагается по убывающимъ или по возрастающимъ степенямъ буквы, избираемой за главную.

Первый членъ искомаго корня есть кубичный корень изъ перваго члена подкоренной величины.

Каждый же слѣдующій членъ искомаго корня отыскивается однимъ и тѣмъ же способомъ, а именно:

Утроенный квадратъ полученной уже части искомаго многочлена пишется предъ вертикальною чертою слѣва отъ остатка.

Частное отъ дѣленія высшаго (или соотвѣтственно низшаго) члена остатка на высшій (или соотвѣтственно низшій) членъ упомянутаго утроеннаго квадрата есть слѣдующій членъ искомаго многочлена.

Къ выраженію слѣва отъ вертикальной черты прибавляется утроенное произведеніе прежней части корня на новый членъ его и еще квадратъ этого члена, и вся эта алгебраическая сумма умножается на этотъ членъ Произведеніе же вычитается изъ послѣдняго остатка.

Такъ дѣйствіе продолжается, пока не получится остатокъ 0 или не обнаружится невозможность извлеченія корня.

§ 171. **Признаки невозможнаго извлеченія** На основаніи теоремы въ § 167 могутъ быть установлены слѣдующіе признаки такого рода:

Кубичный корень изъ даннаго многочлена не извлекается,

1) если онъ двучленъ или трехчленъ;

2) если, при отсутствіи въ немъ ирраціональныхъ коэффиціентовъ, высшій и низшій члены его (оба или одинъ) не представляютъ кубовъ;

3) если, при отсутствіи въ немъ дробныхъ членовъ, появляется дробный членъ въ вычисляемомъ корнѣ;

4) если въ остаткѣ появляется членъ, который выше, чѣмъ высшій, или ниже, чѣмъ низшій въ данномъ многочленѣ.

§ 172. **Объ остаткѣ.** Изъ разсужденій въ § 169 слѣдуетъ, что алгебраическая сумма всѣхъ членовъ, которые при извлеченіи кубичнаго корня изъ даннаго многочлена были постепенно вычтены изъ послѣдняго, составляютъ всегда кубъ выраженія, состоящаго изъ полученныхъ уже членовъ корня. Потому, прервавъ на любомъ остаткѣ извлеченіе кубичнаго корня изъ даннаго многочлена, мы можемъ послѣдній представить въ видѣ суммы куба названнаго выраженія и остатка.

б) Извлеченіе кубичнаго корня изъ опредѣленныхъ чиселъ.

§ 173. **Раціональные корни изъ однозначныхъ, двузначныхъ и трехзначныхъ чиселъ.** Если мы возвысимъ въ кубъ всѣ существующія однозначныя абсолютныя цѣлыя числа, то получимъ:

$1^3 = 1$	$6^3 = 216$
$2^3 = 8$	$7^3 = 343$
$3^3 = 27$	$8^3 = 512$
$4^3 = 64$	$9^3 = 729.$
$5^3 = 125$	

Изъ этого слѣдуетъ, что существуетъ только два однозначныхъ (1 и 8), два двузначныхъ (27 и 64) и пять трехзначныхъ (125, 216, 343, 512 и 729) абсолютныхъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ извлекается кубичный корень, другими словами, кубичные корни изъ которыхъ суть числа раціональныя.

§ 174. **Число цыфръ въ кубѣ даннаго числа и въ кубичномъ корнѣ изъ даннаго числа.**

Теорема. Кубъ всякаго цѣлаго числа имѣетъ или ровно втрое больше цыфръ, чѣмъ это число, или на одну или на двѣ цыфры меньше.

Док. При доказательствѣ теоремы въ § 150 было разъяснено, что для каждаго цѣлаго числа z объ n цыфрахъ мы имѣемъ:

$$10^n > z \geqslant 10^{n-1}.$$

Отсюда же мы чрезъ возвышеніе въ кубъ, по теоремѣ VII и по теоремѣ 1 въ § 130, заключаемъ, что

$$10^{3n} > z^3 \geqslant 10^{3n-3}.$$

Но 10^{3n-3} есть число, пишущееся чрезъ цыфру 1 и $(3n-3)$ нулей послѣ нея, и есть наименьшее цѣлое число о $(3n-2)$ цыфрахъ. Число же 10^{3n} есть наименьшее цѣлое число о $(3n+1)$ цыфрахъ. Слѣдовательно, число z^3 должно состоять изъ $3n$ или $(3n-1)$ или $(3n-2)$ цыфръ, что и требовалось доказать

Слѣдствіе. Раціональный кубичный корень изъ цѣлаго числа состоитъ изъ столькихъ цыфръ, на сколько граней по три цыфры въ каждой (при чемъ въ крайней лѣвой грани можетъ оказаться и 3, и 2, и 1 цыфра) его можно разбить.

§ 175. **Первая цыфра кубичнаго корня изъ даннаго цѣлаго числа.** Изъ послѣдняго слѣдствія и на основаніи разсужденій, аналогичныхъ разсужденіямъ въ § 151, мы заключаемъ, что если цѣлое число, изъ котораго требуется извлечь кубичный корень, разбить, начиная справа, на грани по три цыфры въ каждой, то первою цыфрою корня должна быть цыфра, выражающая наибольшее цѣлое число, кубъ котораго не больше числа, выражаемаго цыфрами въ первой лѣвой грани.

§ 176. **Возвышеніе многозначнаго числа въ кубъ.** Какъ мы правило извлеченія квадратнаго корня изъ опредѣленныхъ чиселъ получили, возстановивъ число по данному квадрату его, такъ можетъ быть найдено и правило извлеченія корня кубичнаго изъ опредѣленныхъ чиселъ чрезъ возстановленіе числа по его кубу. Но для выполненія этого плана необходимо предварительно установить правило возвышенія чиселъ въ кубъ.

Положимъ, что въ кубъ возвышается трехзначное число, цыфры котораго суть a, b и c, слѣдовательно, число

$$a\,.\,10^2+b\,.\,10+c.$$

По правилу въ § 167 кубъ его будетъ

$$(a\,.\,10^2+b\,.\,10+c)^3=a^3\,.\,10^6+3\,.\,a^2\,.\,10^4\,.\,b\,.\,10+3\,.\,a\,.\,10^2\,.\,b^2\,.\,10^2+$$
$$b^3\,.\,10^3+3\,.\,(a\,.\,10^2+b\,.\,10)^2\,.\,c+3(a\,.\,10^2+b\,.\,10)c^2+c^3=$$
$$a^3\,.\,10^6+3a^2b\,.\,10^5+3ab^2\,.\,10^4+b^3\,.\,10^3+3(a\,.\,10+b)^2c\,.\,10^2+$$
$$3(a\,.\,10+b)c^2\,.\,10+c^3.$$

Изъ полученнаго выраженія видно, что при возвышеніи указаннымъ способомъ въ кубъ трехзначнаго числа получающеся отдѣльные члены должны оканчиваться: первый 6-ю нулями, второй 5-ю, третій 4-мя, четвертый 3-мя, пятый 2-мя, шестой однимъ и, наконецъ, послѣдній значащею цыфрою (конечно, если значащею цыфрою оканчивалось число, которое возвышалось въ кубъ). Такимъ же образомъ легко убѣдиться, что при возвышеніи этимъ способомъ въ кубъ числа объ n цыфрахъ получающіяся отдѣльныя слагаемыя должны оканчиваться: первое $(3n-3)$ нулями, второе $(3n-4)$ нулями, третье $(3n-5)$ нулями и т. д., наконецъ, предпослѣднее однимъ нулемъ. То есть, въ этихъ слагаемыхъ число нулей на концѣ должно послѣдовательно все на одинъ нуль уменьшаться, пока, наконецъ, не получится послѣднее слагаемое безъ нулей на концѣ (при указанномъ выше условіи).

Если мы теперь, пользуясь сдѣланными только-что указаніями, возвысимъ въ кубъ какое-либо опредѣленное число, напр. 4251, и при этомъ обозначимъ $4 \cdot 10^3$ буквою α, $2 \cdot 10^2$ буквою β, $5 \cdot 10$ буквою γ и 1 буквою δ, то получаемъ:

$$4251^3=(4000+200+50+1)^3$$
$$=(4 \cdot 10^3+2 \cdot 10^2+5 \cdot 10+1)^3$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3,$$

и, опуская въ вычисляемыхъ слагаемыхъ нули и указывая мѣста ихъ точками:

$\alpha^3=$	6 4 . . . .
$3\alpha^2\beta=$	9 6 . . . .
$3\alpha\beta^2=$	4 8 . . . .
$\beta^3=$	8 . . . . . .
$3(\alpha+\beta)^2\gamma=$	2 6 4 6 0 . . . . .
$3(\alpha+\beta)\gamma^2=$	3 1 5 0 . . . .
$\gamma^3=$	1 2 5 . . .
$3(\alpha+\beta+\gamma)^2\delta=$	5 4 1 8 7 5 . .
$3(\alpha+\beta+\gamma)\delta^2=$	1 2 7 5 .
$\delta^3=$	1
$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3=$	7 6 8 1 9 8 2 5 2 5 1 $=4251^3$

Подобно тому, какъ при возвышеніи числа въ квадратъ нѣтъ надобности ставить точки на мѣстахъ опущенныхъ нулей, такъ и при возвышеніи этимъ способомъ числа въ кубъ мѣста нулей могутъ быть оставляемы пустыми.

Примѣръ.

302004^3 вычисляемъ слѣдующимъ образомъ:

2 7
0
0
0
5 4 0 0
3 6 0
8
0
0
0
0
0
0
1 0 9 4 4 4 8 0 0 0 0
1 4 4 9 6 0 0
6 4

$302004^3=$2 7.5 4 4 7.0 2 4 6.2.4 9 6.0.6 4;

или удобнѣе такъ:

```
     27000
       5400
         3608000000
         1094448000 0
              1449600
                    64
-------------------------------
302004³=2754470246249606 4
```

Примѣчаніе.

Изъ разсмотрѣннаго примѣра видно, что при возвышеніи этимъ способомъ въ кубъ даннаго числа каждый нуль среди цыфръ его требуетъ приписки трехъ нулей въ строкахъ, содержащихъ кубы.

§ 177. **Извлеченіе кубичнаго корня изъ цѣлаго числа.** Чтобы составить образецъ такого извлеченія, возстановимъ число, которое мы въ § 176 получили чрезъ возвышеніе въ кубъ, по этому кубу 76819825251, другими словами, выполнимъ дѣйствіе, указываемое символомъ

$$\sqrt[3]{76819825251}.$$

Разбивъ подкоренное число на грани по три цыфры въ каждой, мы получаемъ:

$$\sqrt[3]{76\,819{,}825|251}$$

и узнаемъ вмѣстѣ съ этимъ, что искомый корень, если онъ раціоналенъ, есть цѣлое число, состоящее изъ четырехъ цыфръ, изъ которыхъ первая 4, такъ какъ 4 есть наибольшее число, котораго кубъ меньше 76.

Обозначивъ цыфры искомаго корня буквами a, b, c и d, мы имѣемъ

$$a=4,$$

и чтобы найти b, мы должны отнять $(a\,.\,10^3)^3=64\,000\,000\,000$ отъ даннаго числа. Въ остаткѣ

$$12819825251$$

высшій членъ есть утроенное произведеніе квадрата числа тысячъ на число сотенъ, другими словами, $3a^2b$ сотенъ милліоновъ. Разсматривая только сотни милліоновъ, мы видимъ, что $3a^2b$ должно быть не больше 128, а такъ какъ $3a^2=48$, то b не больше $\frac{128}{48}$, т. е., b, будучи цѣлымъ числомъ, не можетъ быть больше 2. Если же $b=2$, то $3a^2b=96$, $3ab^2=48$ и $b^3=8$.

Если мы отъ полученнаго выше остатка отнимемъ $3 . (a . 10^3)^2 . b . 10^2 = 9600000000$, затѣмъ $3 . (a . 10^3) . (b . 10^2)^2 = 480000000$ и затѣмъ еще $(b . 10^2)^3 = 8000000$, то въ новомъ остаткѣ

$$2731825251$$

высшій членъ будетъ

$$3(a . 10^3 + b . 10^2)^2 c . 10 = 3 . 1764 . 100000 . c,$$

т. е. 5292 сотенъ тысячъ.

Разсматривая однѣ только сотни тысячъ, мы видимъ, что $5292c$ должно быть не больше 27318, слѣдовательно c не больше $\frac{27318}{5292}$, т. е. 5.

Если же $c = 5$, то $3(a . 10^3 + b . 10^2)^2 c . 10 = 2646000000$, $3(a . 10^3 + b . 10^2) . c^2 . 10^2 = 31500000$ и $c^3 . 10^3 = 125000$. Если мы отъ послѣдняго остатка отнимемъ одно за другимъ эти числа, то получимъ остатокъ

$$54200251.$$

Въ немъ высшій членъ

$$3(a . 10^3 + b . 10^2 + c . 10)^2 d = 3 . 180625 . 10^2 . d.$$

Разсматривая однѣ только сотни, мы видимъ, что $541875d$ должно быть не больше 542002, слѣдовательно, d не больше $\frac{542002}{541875}$, т. е. 1.

Если же $d = 1$, то

$$3(a . 10^3 + b . 10^2 + c . 10)^2 . d = 54187500$$
$$3(a . 10^3 + b . 10^2 + c . 10) . d^2 = 12750$$
$$\text{и } d^3 = 1.$$

Если мы отъ послѣдняго остатка отнимемъ одно за другимъ эти числа, то получится остатокъ 0.

Слѣдовательно, искомый корень есть 4251.

Если мы для большаго удобства обозначимъ $a . 10^3$ буквою α, $b . 10^2$ буквою β, $c . 10$ буквою γ, и ради единообразія d замѣнимъ буквою δ, затѣмъ не только въ утроенныхъ произведеніяхъ и кубахъ, но и передъ вертикальными чертами опустимъ еще въ числахъ нули на концѣ, и, наконецъ, въ остаткахъ будемъ писать не всѣ цыфры полностью, а будемъ сно-

сить изъ даннаго числа цыфры по одной, то все только-что произведенное и описанное дѣйствіе можно изобразить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sqrt[3]{76|819|825|251} = \overset{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4\ \ 2\ \ 5\ \ 1}$$

$$64 = \alpha^3$$

$$3\alpha^2 = 48 \mid 128$$

$$96 = 3\alpha^2\beta$$

$$321$$

$$48 = 3\alpha\beta^2$$

$$2739$$

$$8 = \beta^3$$

$$3(\alpha+\beta)^2 = 5292 \mid 27318$$

$$26460 = 3(\alpha+\beta)^2\gamma$$

$$8582$$

$$3150 = 3(\alpha+\beta)\gamma^2$$

$$54325$$

$$125 = \gamma^3$$

$$3(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 541875 \mid 542002$$

$$541875 = 3(\alpha+\beta+\gamma)^2\delta$$

$$1275$$

$$1275 = 3(\alpha+\beta+\gamma)\delta^2$$

$$1$$

$$1 = \delta^3$$

$$0$$

Изложеннымъ способомъ слѣдовало бы продолжать дѣйствіе извлеченія кубичнаго корня изъ даннаго опредѣленнаго числа, если бы оно состояло изъ большаго числа цыфръ.

§ 178. Болѣе упрощенный образецъ извлеченія кубичнаго корня. Какъ при извлеченіи квадратнаго корня можно было заразъ вычитать удвоенное произведеніе и квадратъ [§ 154], такъ и извлеченіе кубичнаго корня можетъ быть нѣсколько упрощено, если производить заразъ вычитаніе утроенныхъ произведеній и куба. Измѣнимъ въ этомъ смыслѣ образецъ, данный въ предыдущемъ параграфѣ.

Такъ какъ

$$3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (3\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2)\beta,$$

то, прибавивъ къ дѣлителю 48 передъ вертикальною чертою $3\alpha\beta$ и β^2 слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{rr} 3\alpha^2 = & 4\,8\ \ \\ 3\alpha\beta = & 2\,4\ \\ \beta^2 = & 4 \\ \hline & 5\,0\,4\,4 \end{array},$$

и умноживъ сумму 5044 на 2, мы получаемъ:

$$3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=10088.$$

Ясно, что нужно при вычитаніи этого числа предварительно снести также цыфры 1 и 9, соотвѣтствующія $3\alpha\beta^2$ и β^3.

Такъ же и $3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3$ можно вычесть заразъ. Такъ какъ

$$3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3=[3(\alpha+\beta)^2+3(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2]\gamma,$$

то, прибавивъ къ дѣлителю 5292 передъ вертикальною чертою $3(\alpha+\beta)\gamma$ и γ^2 слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{lr} 3(\alpha+\beta)^2= & 5\;2\;9\;2 \\ 3(\alpha+\beta)\gamma & 6\;3\;0 \\ \gamma^2= & 2\;5 \\ \hline & 5\;3\;5\;5\;2\;5, \end{array}$$

и умноживъ эту сумму на 5, мы получаемъ:

$$3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3=2677625.$$

И тутъ, при вычитаніи этого числа, нужно предварительно снести цыфры, соотвѣтствующія $3(\alpha+\beta)\gamma^2$ и γ^3.

Такимъ же образомъ слѣдуетъ продолжать и дальше.

Съ изложенными упрощеніями **расположеніе дѣйствія извлеченія кубичнаго корня** будетъ слѣдующее:

$$\sqrt[3]{76|819\,825|251}=\overset{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4\;\;2\;\;5\;\;1}$$

$$\begin{array}{lr|l} & & 64=\alpha^3 \\ 3\alpha^2= & 48 & 12819 \\ 3\alpha\beta= & 24 & \\ \beta^2= & 4 & \\ \hline & 5044 & 10088=3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \\ 3(\alpha+\beta)^2= & 5292 & 2731825 \\ 3(\alpha+\beta)\gamma= & 630 & \\ \gamma^2= & 25 & \\ \hline & 535525 & 2677625=3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3 \\ 3(\alpha+\beta+\gamma)^2= & 541875 & 54200251 \\ 3(\alpha+\beta+\gamma)\delta= & 1275 & \\ \delta^2= & 1 & \\ \hline & 54200251 & 54200251=3(\alpha+\beta+\gamma)^2\delta+3(\alpha+\beta+\gamma)\delta^2+\delta^3 \\ & & \quad 0 \end{array}$$

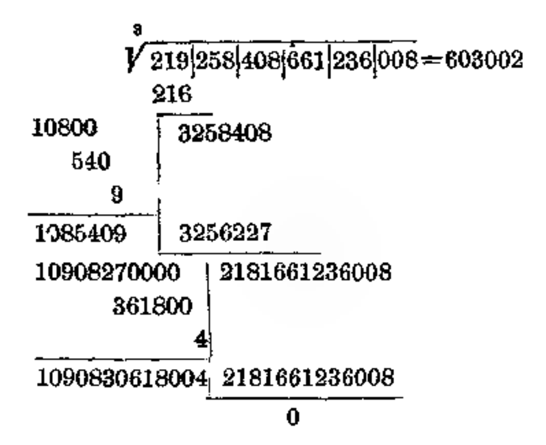
Примѣчаніе 1.

Вторыя и третьи строки предъ вертикальными чертами пишутся и вторыя и третьи цыфры изъ граней сносятся уже по опредѣленіи слѣдующей цыфры корня.

Примѣчаніе 2.

По достиженіи достаточнаго навыка примѣненіе буквъ дѣлается излишнимъ.

Примѣръ.



$$\sqrt[3]{219|258|408|661|236|008}=603002$$

```
 216
10800        | 3258408
  540        |
    9        |
1085409      | 3256227
10908270000  | 2181661236008
     361800  |
          4  |
1090830618004| 2181661236008
                   0
```

Объясненія къ приведенному примѣру.

Получивъ остаткомъ въ первой грани 3 и снеся цыфру 2, мы видимъ, что число 32 меньше утроеннаго квадрата 108 числа, выражаемаго первой цыфрой корня.

Слѣдовательно, вторая цыфра искомаго корня 0. Поэтому, снеся еще три цыфры и приписавъ два нуля къ утроенному квадрату 108, мы чрезъ дѣленіе 32584 на 10800 опредѣляемъ третью цыфру искомаго корня.

Слѣдующій остатокъ со снесенною первою цыфрою слѣдующей грани составляетъ 21816. Это число меньше утроеннаго квадрата 1090827 числа, выражаемаго первыми тремя цыфрами корня. Слѣдовательно, четвертая цыфра корня 0. Снеся слѣдующія три цыфры 6, 1 и 2 и приписавъ два нуля къ упомянутому утроенному квадрату, мы убѣждаемся, что и 109082700 еще меньше 21816612, и что, слѣдовательно, и пятая цыфра корня есть 0. Поэтому мы сносимъ еще три цыфры и приписываемъ къ утроенному квадрату еще два нуля. Затѣмъ дѣленіе остатка на утроенный квадратъ числа, выражаемаго полученными уже цыфрами корня, дѣлается возможнымъ, и получается послѣдняя цыфра корня 2.

§ 179. **Возвышеніе въ кубъ десятичной дроби и извлеченіе изъ таковой кубичнаго корня.** Какъ въ § 156, изобразимъ въ общемъ видѣ десятичную дробь съ n цыфрами послѣ запятой выраженіемъ $\frac{a}{10^n}$, называя при этомъ буквою a цѣлое число, которое получится, если въ этой дроби опустимъ запятую. Возвысивъ это выраженіе въ кубъ, мы получаемъ $\frac{a^3}{10^{3n}}$

и заключаемъ изъ вида этого куба, что **правило возвышенія въ кубъ десятичной дроби** должно гласить:

Опустивъ запятую, нужно возвысить въ кубъ получившееся цѣлое число и въ этомъ кубѣ отдѣлить запятою втрое больше цыфръ, чѣмъ ихъ есть въ данной дроби.

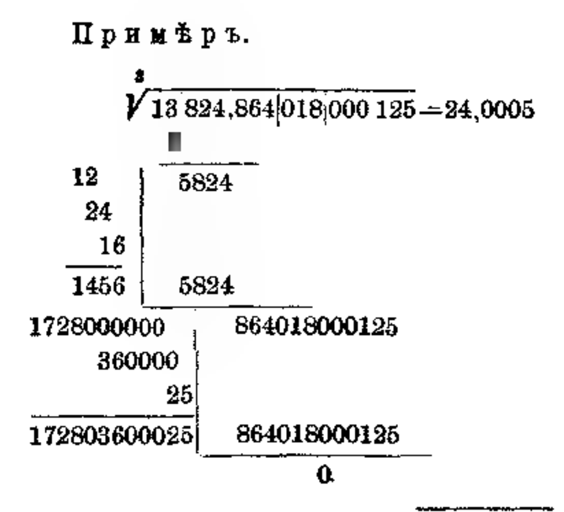
Изъ этого слѣдуетъ, что кубами (притомъ кубами дробей, согласно теоремѣ въ § 135) [1]) могутъ быть только такія десятичныя дроби со значащею послѣднею цыфрою, у которыхъ послѣ запятой имѣется число цыфръ кратное 3-хъ. А изъ этой истины слѣдуетъ, что раціональными могутъ быть кубичные корни только изъ такихъ десятичныхъ дробей со значащею послѣднею цыфрою, у которыхъ послѣ запятой имѣется число цыфръ кратное 3-хъ.

Какъ квадратные корни, такъ и кубичные должны извлекаться изъ десятичныхъ дробей такъ же, какъ и изъ цѣлыхъ чисехъ по причинѣ, указанной въ § 156.

Дойдя при выполненіи такого дѣйствія до запятой, т. е. до единицъ, мы, дѣля остатокъ со снесенною цыфрою, означающею десятыя, на утроенный квадратъ уже полученной части искомаго числа, найдемъ десятыя искомаго корня. Слѣдовательно, и въ немъ, чтобы указать это, должна быть поставлена запятая, послѣ которой, если корень раціоналенъ, послѣдуетъ еще одна треть того числа цыфръ, которое имѣется послѣ запятой въ данномъ подкоренномъ числѣ.

Относительно же разбивки на грани изъ сказаннаго слѣдуетъ, что въ десятичныхъ дробяхъ ее должно производить, начиная отъ запятой и отсчитывая отъ нея, какъ влѣво, такъ и вправо, по три цыфры для каждой грани.

Примѣръ.



[1]) О кубахъ ирраціональныхъ чиселъ не можетъ быть рѣчи, пока не введены и не опредѣлены дѣйствія надъ ирраціональными числами.

Изложенные въ предыдущихъ параграфахъ пріемы, составляющіе **извлеченіе кубичнаго корня изъ опредѣленныхъ чиселъ** могутъ быть кратко резюмированы слѣдующимъ образомъ:

§ 180. **Правило.** *Чтобы извлечь кубичный корень изъ даннаго числа, его разбиваютъ, начиная отъ запятой* [1]*, на грани по три цыфры въ каждой.*

Цыфра, выражающая наибольшее число, котораго кубъ не больше числа въ первой лѣвой грани, есть первая цыфра искомаго корня.

Каждая слѣдующая цыфра его отыскивается однимъ и тѣмъ же способомъ, а именно:

Утроенный квадратъ числа, выражаемаго полученными уже цыфрами корня, пишется передъ вертикальною чертою слѣва отъ остатка, къ которому приписывается первая цыфра изъ слѣдующей грани. Частное отъ дѣленія числа, получившагося послѣ упомянутаго сноса цыфры, на число передъ чертою, есть слѣдующая цыфра корня. Произведеніе ея [2] *на утроенное число, выражаемое прежними полученными уже цыфрами корня, и квадратъ ея* [2] *пишутъ передъ вертикальною чертою подъ утроеннымъ квадратомъ, выступая каждый разъ вправо на одну цыфру. Сумму трехъ чиселъ передъ чертою умножаютъ на новую цыфру* [3] *корня и произведеніе вычитаютъ изъ стоящаго вправо отъ черты остатка, приписавъ къ послѣднему предварительно вторую и третью цыфры грани.*

Если, дойдя до послѣдней цыфры подкоренного числа, мы не получили остатка 0, то корень изъ даннаго числа не извлекается, другими словами, корень изъ даннаго числа ни цѣлое число, ни дробь, а число ирраціональное.

§ 181. **Признаки ирраціональности кубичныхъ корней.** На основаніи разсужденій, аналогичныхъ разсужденіямъ въ § 158, слѣдуетъ:

Кубичный корень ирраціоналенъ, *слѣдовательно не извлекается безъ остатка,*

1) *если число, будучи цѣлымъ, оканчивается числомъ нулей не кратнымъ 3-хъ,*

2) *если число, будучи десятичною дробью со значащей послѣдней цыфрой, имѣетъ послѣ запятой число цыфръ не кратное 3-хъ,*

3) *если при разложеніи числа на простыхъ сомножителей который-либо изъ нихъ окажется встрѣчающимся въ степени не третьей или не кратной 3-хъ.*

§ 182. **Приближенныя значенія кубичнаго корня.** Въ § 159 было разъяснено, что производя, не останавливаясь на остаткѣ, дѣйствие извлеченія квадратнаго корня изъ числа въ томъ случаѣ, если этотъ корень ирраціоналенъ, мы получаемъ приближенныя значенія этого ирраціональнаго числа. Точно такъ же могутъ быть вычисляемы приближенныя значенія всякаго ирраціональнаго кубичнаго корня.

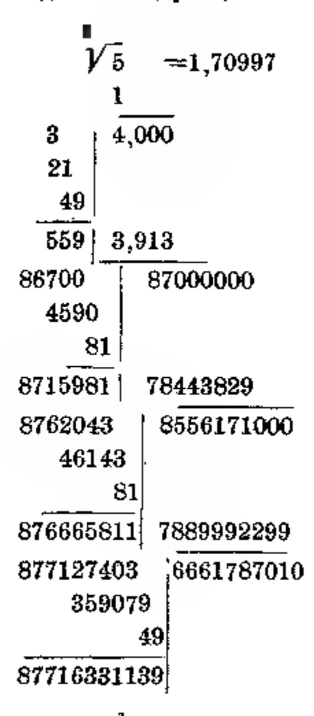
---

[1]) У цѣлаго числа запятая подразумѣвается послѣ послѣдней цыфры.

[2]) Выражаясь точнѣе: выражаемаго ею числа.

[3]) Точнѣе: на число выражаемое новою цыфрою корня.

Для примѣра произведемъ слѣдующее извлеченіе:



Повторяя по отношенію къ $\sqrt[3]{5}$ тѣ же разсужденія, которыя въ § 159 насъ убѣдили, что при извлеченіи $\sqrt{2}$ получается безконечная непеpioдическая десятичная дробь, имѣющая смыслъ тѣмъ лучшаго приближенія къ $\sqrt{2}$, чѣмъ больше въ ней вычислено десятичныхъ знаковъ, мы здѣсь убѣждаемся, что и получающаяся при извлеченіи $\sqrt[3]{5}$ десятичная дробь безконечна, не можетъ быть періодическою и заключена между двумя приближающимися все болѣе и болѣе другъ къ другу послѣдовательностями конечныхъ дробей, которыхъ свойства могутъ быть выражены слѣдующими неравенствами:

$$1^3 < 5 < 2^3$$
$$1{,}7^3 < 5 < 1{,}8^3$$
$$1{,}70^3 < 5 < 1{,}71^3$$
$$1{,}709^3 < 5 < 1{,}710^3$$
$$1{,}7099^3 < 5 < 1{,}7100^3$$
$$1{,}70997^3 < 5 < 1{,}70998^3$$

и т. д.

Этими неравенствами можетъ быть указано съ какою угодно точностью мѣсто ирраціональнаго числа $\sqrt[3]{5}$ среди раціональныхъ чиселъ точно тамъ же, какъ въ § 160 показана была возможность указанія среди нихъ мѣста ирраціональному числу $\sqrt{2}$. И какъ послѣднее число дѣлило всѣ

раціональныя числа на два класса, такъ и $\sqrt[3]{5}$ дѣлитъ всѣ раціональныя числа на два класса: на классъ чиселъ, которыхъ кубы больше 5, и на классъ чиселъ, которыхъ кубы меньше 5.

Въ слѣдующей главѣ мы увидимъ, что описанное сѣченіе можетъ служить также опредѣленіемъ ирраціональнаго числа, обозначаемаго символомъ $\sqrt[3]{5}$.

§ 183. **Обобщеніе смысла равенства** $(\sqrt[3]{a})^3=a$. Тѣмъ же способомъ, какъ ирраціональному $\sqrt[3]{5}$, можетъ быть указано точное мѣсто среди раціональныхъ чиселъ и каждому другому ирраціональному кубичному корню.

Послѣ этого мы имѣемъ право при всякомъ значеніи a опредѣлить $\sqrt[3]{a}$ какъ число, котораго кубъ равенъ a, безразлично, означаетъ ли $\sqrt[3]{a}$ раціональное или ирраціональное число. Слѣдовательно, для всѣхъ вещественныхъ значеній $\sqrt[3]{a}$ мы имѣемъ право писать какъ опредѣленіе:

$$(\sqrt[3]{a})^3=a.$$

§ 184. **Примѣненіе понятій «больше» и «меньше» къ ирраціональнымъ кубичнымъ корнямъ.** Разсужденіями предыдущихъ параграфовъ и разсужденіями, аналогичными тѣмъ, которыя привели къ установленію понятій «больше» и «меньше» по отношенію къ ирраціональнымъ квадратнымъ корнямъ, указывается, что мы не получимъ противорѣчій съ дѣйствительностью при слѣдующемъ примѣненіи этихъ понятій къ ирраціональнымъ кубичнымъ корнямъ.

Опредѣленіе. $\sqrt[3]{a}$ *должно считать больше всякаго раціональнаго числа, котораго кубъ меньше a, и меньше всякаго раціональнаго числа, котораго кубъ больше a; и изъ двухъ ирраціональныхъ кубичныхъ корней должно считать тотъ больше, котораго подкоренное число больше.*

На основаніи этого опредѣленія дѣлаются примѣнимыми изложенныя въ § 34 правила сравненія относительныхъ чиселъ [26] и къ относительнымъ ирраціональнымъ кубичнымъ корнямъ.

§ 185. **Извлеченіе кубичнаго корня съ указанной точностью.**

Опредѣленіе 1. *Приближенными значеніями $\sqrt[3]{a}$ съ точностью до 1 называютъ оба ближайшія другъ къ другу цѣлыя числа, между которыми заключается $\sqrt[3]{a}$, значитъ, между кубами которыхъ заключается a* [§ 130, теорема 1].

Опредѣленіе 2. *Приближенными значеніями $\sqrt[3]{a}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$ называютъ обѣ дроби, отличающіяся другъ отъ друга на $\frac{1}{n}$, между которыми заключается $\sqrt[3]{a}$, значитъ, между кубами которыхъ заключается a.*

Изъ неравенства

$$p^3 < a < (p+1)^3$$

мы видимъ, что приближенныя значенія кубичныхъ корней съ точностью до 1 изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ и дробей, заключенныхъ между p^3 и $(p+1)^3$, суть одни и тѣ же, а именно p и $p+1$. А изъ этого слѣдуетъ, что приближенныя значенія кубичнаго корня изъ дроби съ точностью до 1 суть тѣ же, что и приближенныя значенія кубичнаго корня изъ цѣлой части ея.

Для того же, чтобы найти приближенное съ недостаткомъ значеніе кубичнаго корня изъ какого-либо числа съ точностью до 1, достаточно произвести способомъ, указаннымъ въ § 180, извлеченіе, ограничиваясь цѣлой частью числа.

§ 186. **Приближенныя значенія кубичнаго корня съ точностью до $\frac{1}{n}$.**

Если требуется найти $\sqrt[3]{a}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, то это значитъ, что нужно найти двѣ дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ такого свойства, чтобы было:

$$\frac{m}{n} < \sqrt[3]{a} < \frac{m+1}{n},$$

значитъ и

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 < a < \left(\frac{m+1}{n}\right)^3.$$

Преобразовавъ по теоремѣ 92 въ этомъ неравенствѣ кубы, мы имѣемъ:

$$\frac{m^3}{n^3} < a < \frac{(m+1)^3}{n^3}.$$

Умноживъ же это неравенство на n^3, мы по теоремѣ 1 въ § 63 получаемъ:

$$m^3 < an^3 < (m+1)^3.$$

Тутъ m и $m+1$ суть два отличающихся другъ отъ друга на 1 цѣлыхъ числа, между кубами которыхъ заключено число an^3. Слѣдовательно, m и $m+1$ суть приближенныя значенія $\sqrt[3]{an^3}$ съ точностью до 1.

Такимъ образомъ мы узнаемъ, какъ найти числителей искомыхъ дробей, вмѣстѣ съ тѣмъ и самыя дроби, такъ какъ знаменатель ихъ n данъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

Правило. Чтобы найти приближенныя значенія $\sqrt[3]{a}$ съ недостаткомъ и съ избыткомъ съ точностью до $\frac{1}{n}$, нужно отыскать приближенныя значенія $\sqrt[3]{an^3}$ съ точностью до 1 и раздѣлить каждое изъ нихъ на n.

Примѣръ.

Чтобы вычислить $\sqrt[3]{43}$ съ точностью до $\frac{1}{25}$, нужно произвести слѣдующее извлеченіе:

$$\sqrt[3]{43 \cdot 25^3} = \sqrt[3]{43 \cdot 15625} =$$

$$\sqrt[3]{671|875} = 83$$

```
          671|875 — 83
          512|
192          |59875
  72         |
    9        |
19929        |59787
             ------
                 88
```

Такъ мы узнаемъ, что приближенныя значенія $\sqrt[3]{43}$ съ точностью до $\frac{1}{25}$ суть $\frac{83}{25}$ и $\frac{84}{25}$ или $3\frac{8}{25}$ и $3\frac{9}{25}$, такъ что

$$3\frac{8}{25} < \sqrt[3]{43} < 3\frac{9}{25}.$$

Каждое изъ полученныхъ приближеній отличается отъ $\sqrt[3]{43}$ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{25}$.

§ 187. **Извлеченіе кубичнаго корня изъ обыкновенныхъ дробей.** Предполагая пока $\sqrt[3]{a}$ и $\sqrt[3]{b}$ раціональными, мы имѣемъ:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3} = \frac{a}{b}.$$

То есть, мы узнаемъ, что $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ **есть число, котораго кубъ равенъ** $\frac{a}{b}$.

Но такое чисно, по опредѣленію корня [96], пишется $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Слѣдовательно,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Это равенство выражаетъ правило, что если кубичные корни изъ числителя и знаменателя дроби раціональны, то извлеченіе изъ нея корня можно произвести, извлекая его изъ числителя и изъ знаменателя.

Напр.,

$$\sqrt[3]{4\frac{12}{125}}=\sqrt[3]{\frac{512}{125}}=\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{8}{5}=1\tfrac{3}{5}.$$

Если кубичный корень изъ знаменателя дроби ирраціоналенъ, то удобно производить изъ нея извлеченіе, обративъ ее предварительно въ десятичную. Но можно въ такомъ случаѣ произвести извлеченіе изъ нея кубичнаго корня и иначе: можно ее предварительно такъ расширить, чтобы корень этой степени изъ знаменателя сталъ раціональнымъ. Изъ $\frac{41}{45}$ можно, напр., извлечь кубичный корень такъ:

$$\sqrt[3]{\frac{41}{45}}=\sqrt[3]{\frac{41}{3^2.5}}=\sqrt[3]{\frac{41\ .\ 3\ .\ 5^2}{3^3\ .\ 5^3}}=\sqrt[3]{\frac{3075}{(3\ .\ 5)^3}}=$$

$$\frac{\sqrt[3]{3075}}{15}=\frac{14{,}541696\ldots}{15}=0{,}969446\ldots$$

Обоими способами можетъ быть достигнута та степень точности, которая будетъ желательна.

§ 188. Упрощенное нахожденіе послѣднихъ цыфръ приближеннаго значенія кубичнаго корня.

Теорема. Когда найдено болѣе половины всѣхъ цыфръ кубичнаго корня, которыя требовалось вычислить, то остальныя можно получить чрезъ дѣленіе остатка на утроенный квадратъ полученной части корня.

Док. Если требуется найти кубичный корень изъ нѣкотораго числа съ точностью до $\frac{1}{10^z}$, то можно приписать послѣ послѣдней цыфры столько нулей, чтобы послѣ запятой оказалось $3z$ цыфръ, отбросить запятую, извлечь изъ получившагося такимъ образомъ цѣлаго числа корень съ точностью до 1 и въ полученномъ результатѣ отдѣлить запятою z десятичныхъ знаковъ. Такъ отысканіе опредѣленнаго числа цыфръ корня сводится къ извлеченію корня изъ цѣлаго числа съ точностью до 1.

Обозначивъ такое цѣлое число буквою N, положимъ, что при извлеченіи изъ него корня найдено уже болѣе половины требуемаго числа цыфръ, а именно n цыфръ, и что, слѣдовательно, осталось ихъ найти еще не болѣе

$n-1$, напр. $n-m$. Число, выражаемое упомянутыми n цыфрами и столькими нулями послѣ нихъ, сколько еще осталось вычислить цыфръ, назовемъ a, число же, выражаемое этими послѣдними $(n-m)$ цыфрами, назовемъ x, полагая при этомъ, что послѣдняя изъ нихъ или берется съ недостаткомъ или точна.

Тогда или точно или съ точностью до 1 съ недостаткомъ будетъ

$$\sqrt[3]{N}=a+x,$$

слѣдовательно,

$$N=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3,$$

а остатокъ, получающійся послѣ опредѣленія первыхъ n цыфръ корня $N-a^3$.

Отнявъ отъ обѣихъ частей равенства

$$N=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

по a^3, мы, по теоремѣ VII, получаемъ:

$$N-a^3=3a^2x+3ax^2+x^3.$$

Раздѣливъ же еще послѣднее равенство на $3a^2$, мы находимъ:

$$\frac{N-a^3}{3a^2}=x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}.$$

Этимъ равенствомъ указывается, что, раздѣливъ остатокъ $N-a^3$ на $3a^2$, т. е. на утроенный квадратъ полученной уже части корня, мы вмѣсто x получаемъ $x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}$, т. е. на $\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}$ больше, чѣмъ бы слѣдовало. Но значеніе послѣдняго выраженія меньше $1\frac{1}{30}$, какъ видно изъ слѣдующаго разсужденія.

Число x, будучи цѣлымъ числомъ объ $(n-m)$ цыфрахъ, должно быть меньше 10^{n-m}, слѣдовательно, x^2 меньше 10^{2n-2m} и x^3 меньше 10^{3n-3m}, число же a, будучи числомъ объ $(n+n-m)$ или $(2n-m)$ цыфрахъ, должно быть больше 10^{2n-m-1}, слѣдовательно, $3a^2$ больше $3 \,.\, 10^{4n-2m-2}$. Изъ неравенствъ же

$$x^2<10^{2n-2m}$$

и

$$a>10^{2n-m-1}$$

слѣдуетъ, по теоремѣ 3 въ § 79, что

$$\frac{x^2}{a}<\frac{1}{10^{m-1}},$$

аизъ неравенствъ

$$x^3 < 10^{3n-3m}$$
$$3a^2 > 3 \cdot 10^{4n-2m-2}$$

по той же теоремѣ, что

$$\frac{x^3}{3a^2} < \frac{1}{3 \cdot 10^{n+m-2}}.$$

А сложивъ послѣднее неравенство съ неравенствомъ

$$\frac{x^2}{a} < \frac{1}{10^{m-1}},$$

мы по теоремѣ 2 въ § 49, узнаемъ, что

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < \frac{1}{10^{m-1}} + \frac{1}{3 \cdot 10^{n+m-2}}.$$

При наименьшемъ значеніи m, то есть при $m=1$, получается наименьшее значеніе знаменателя дроби $\frac{1}{10^{m-1}}$ равное 1, слѣдовательно, наибольшее значеніе самой этой дроби также равное 1. А такъ какъ n не можетъ быть меньше 2, то дробь $\frac{1}{3 \cdot 10^{n+m-2}}$ не больше $\frac{1}{30}$. Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < 1\frac{1}{30}.$$

А такъ какъ $a+x$ обозначаетъ $\sqrt[3]{N}$ съ точностью до 1 съ недостаткомъ или точное значеніе этого корня, то изъ послѣдняго неравенства слѣдуетъ, что способомъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, $\sqrt[3]{N}$ извлекается съ точностью лучшею, чѣмъ до $1\frac{1}{30}$.

Если же $m=2$, слѣдовательно n не меньше 3, то

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < \frac{1}{10} + \frac{1}{3000},$$

а при бо́льшихъ значеніяхъ m и n сумма $\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}$ еще меньше.

Это и даетъ право опредѣлять послѣднія цыфры кубичнаго корня способомъ, указаннымъ въ теоремѣ, которую мы доказывали.

Примѣры.

1) Если мы по вычисленіи четырехъ цыфръ продолжимъ извлеченіе $\sqrt[3]{7}$ способомъ, указаннымъ послѣднею теоремою, то получаемъ:

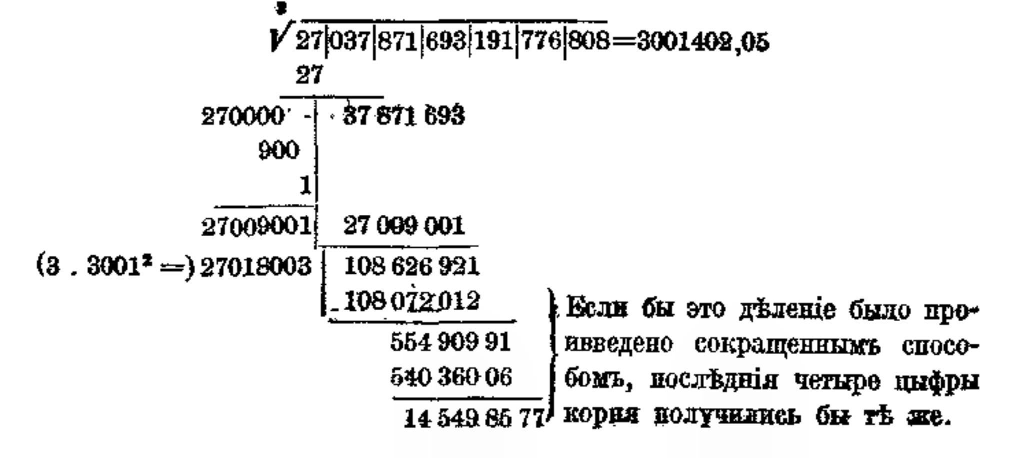
$\sqrt[3]{7}=1,912931$

```
                    1
          3      |6000
         27      |
         81      |
        651      |5859
       1083       |141000
         57       |
          1       |
     108871       |108871
     109443        32129000
       1146        |
          4        |
   10955764        |21911528
(3 . 1912²=)10967232   |102174720
                       |98705088
                         3469632
                         3290170
                          179462
                          109672
                           69790
```

Дѣленіе произведено сокращеннымъ способомъ.

Опредѣленныя этимъ способомъ послѣднія три цыфры совершенно правильны. Только слѣдующая за ними цыфра была бы не точна.

2) Примѣнимъ изложенный способъ еще къ слѣдующему извлеченію:



Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ корень раціоналенъ и равенъ 3001402. Но сокращенный способъ извлеченія, будучи лишь приближеннымъ, этого обнаружить не можетъ.

§ 189. **Извлеченіе корней высшихъ степеней.** Совершенно такимъ же образомъ, какимъ мы нашли правила для извлеченія квадратныхъ и кубичныхъ корней, могутъ быть найдены также правила для извлеченія корней высшихъ степеней. Для этого должны быть предварительно устанавливаемы правила возвышенія многочлена въ такія высшія степени. Такъ, напр., извлеченіе корня 5-й степени изъ многочлена или числа должно быть основано на формулѣ

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$

которая можетъ быть обобщена для возвышенія въ 5-ю степень многочлена такъ же, какъ мы въ §§ 142 и 167 нашли правила возвышенія многочлена въ квадратъ и кубъ.

При выводѣ такихъ правилъ извлеченія, между прочимъ, окажется, что при извлеченіи корня 4-й, 5-й, 6-й и т. д. степени изъ даннаго числа, его нужно будетъ разбивать, начиная отъ запятой, на грани соотвѣтственно по 4, по 5, по 6 и т. д. цыфръ въ каждой.

Но такъ какъ извлеченіе дѣлается тѣмъ сложнѣе, чѣмъ больше показатель корня, то въ тѣхъ случаяхъ, когда этотъ показатель число составное, удобнѣе замѣнять одно извлеченіе корня нѣсколькими послѣдовательными извлеченіями на основаніи имѣющей позднѣе (въ § 264) быть доказанною теоремы **105**. Такъ, напр., вмѣсто того, чтобы произвести извлеченіе $\sqrt[6]{a}$, можно извлечь $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$; извлеченіе $\sqrt[4]{n}$ можно замѣнить извлеченіями $\sqrt{\sqrt{n}}$; извлеченіе $\sqrt[12]{N}$ можно замѣнить извлеченіями $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{N}}}$ и т. д.

ГЛАВА XXIII.

Ирраціональныя числа.

§ 190. **Поводы, ведущіе къ расширенію понятія о числѣ.** Дѣйствіе, обратное сложенію, состоящее въ отысканіи слагаемаго по даннымъ суммѣ и другому слагаемому, другими словами, *вычитаніе*, становится выполнимымъ во всѣхъ случаяхъ только по введеніи *отрицательныхъ чиселъ и числа 0*.

Дѣйствіе, обратное умноженію, состоящее въ отысканіи сомножителя по даннымъ произведенію и другому сомножителю, другими словами, *дѣленіе*, становится выполнимымъ во всѣхъ случаяхъ только по введеніи *дробныхъ чиселъ*.

Съ аналогичнымъ явленіемъ мы встрѣчаемся и при обращеніи дѣйствія возвышенія въ степень. Пока весь нашъ запасъ чиселъ ограничивается раціональными числами [см. § 138], т. е., относительными (въ случаѣ же

надобности и абсолютными) цѣлыми и дробными числами, дѣйствіе обратное возвышенію въ степень, состоящее въ отысканіи основанія по даннымъ показателю и значенію степени, другими словами, *извлеченіе корня*, выполнимо только въ очень немногихъ исключительныхъ случаяхъ [ср. § 137]. Равнымъ образомъ при томъ же запасѣ чиселъ выполнимо только въ исключительныхъ случаяхъ другое обращеніе возвышенія въ степень, состоящее въ отысканіи показателя степени по даннымъ основанію и ея значенію, другими словами, такъ называемое *логариѳмированіе*, суть котораго пояснимъ слѣдующимъ примѣромъ:

Отысканіе показателя степени по ея основанію 2 и ея значенію 8 есть логариѳмированіе числа 8 по основанію 2. Эту задачу выражаютъ символомъ

$$\log_2 8,$$

и рѣшеніе ея должно писать такъ:

$$\log_2 8=3,$$

такъ какъ

$$2^3 = 8.$$

Вообще задача, состоящая въ отысканіи показателя степени по даннымъ основанію ея a и ея значенію b, выражается символомъ

$$\log_a b,$$

и не трудно убѣдиться, въ сколь немногихъ случаяхъ это выраженіе, называемое логариѳмомъ, будетъ равняться какому-либо раціональному числу (сказанное дѣлается понятнымъ во всей своей полнотѣ по введеніи степеней съ дробными показателями [§§ 240 и 269]).

Чтобы сдѣлать и оба дѣйствія обратныя возвышенію въ степень всегда выполнимыми, необходимо поступить вновь такъ же, какъ была достигнута безпрепятственная выполнимость вычитанія и дѣленія, а именно, вновь расширяется понятіе о числѣ, вводятся новыя числа, *числа ирраціональныя и мнимыя*.

О мнимыхъ числахъ будетъ рѣчь позднѣе. Что же касается ирраціональныхъ чиселъ, то для ирраціональныхъ корней [§ 138] могла бы быть развита вполнѣ послѣдовательная теорія ихъ, совершенно аналогичная изложеннымъ нами ученіямъ о числахъ отрицательныхъ и дробныхъ. Избравъ, однако, такой путь, не отличающійся притомъ краткостью и простотою, мы должны были бы потомъ особо развить ученіе объ ирраціональныхъ логариѳмахъ и всякій разъ особо разсматривать ирраціональныя числа, получающіяся еще иными способами, чѣмъ тѣ, о которыхъ была рѣчь до сихъ поръ.

Но такъ какъ существуетъ возможность развитія *общаго ученія* объ ирраціональныхъ числахъ, то его мы и предпошлемъ въ этой главѣ ученію о корняхъ и логариѳмахъ, которые, какъ только-что было указано, только въ исключительныхъ случаяхъ могутъ быть раціональными.

§ 191. Нѣкоторыя свойства раціональныхъ чиселъ. При построеніи теоріи ирраціональныхъ чиселъ намъ часто придется ссылаться на слѣдующія свойства раціональныхъ чиселъ:

1. Какъ бы мало ни было по абсолютной величинѣ своей нѣкоторое данное число, есть безконечное количество чиселъ меньшихъ по абсолютной величинѣ, чѣмъ оно.

Если, напр., дано число ε, то меньше его числа $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{3}, \dots, \frac{\varepsilon}{n}$, при чемъ, какъ бы велико ни было n, есть всегда еще число $n+1$, которое больше n, такъ что

$$\frac{\varepsilon}{n+1} < \frac{\varepsilon}{n}.$$

2. Какое бы число ни было дано, всегда есть числа, которыя больше его, и числа, которыя меньше его, притомъ и такія, которыя отъ даннаго числа отличаются менѣе, чѣмъ на любое заданное число, какъ бы мало оно ни было.

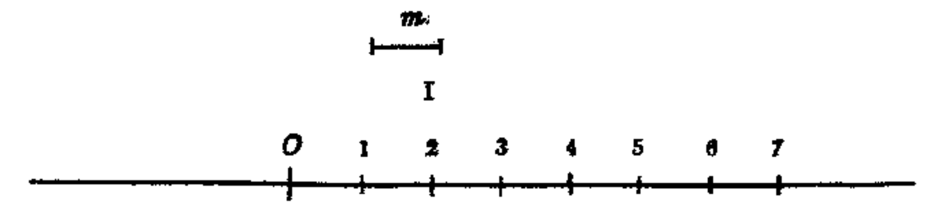
Если, напр., a данное число, и α абсолютное число, то числа вида $a+\alpha$ будутъ больше его, а числа вида $a-\alpha$ меньше его, при чемъ α можетъ быть сдѣлано меньше всякаго заданнаго числа ε, какъ бы мало оно ни было по абсолютной величинѣ своей.

3. Есть безконечное количество такихъ чиселъ, заключающихъ между собою нѣкоторое данное число, разность между которыми меньше любого заданнаго числа, какъ бы мало оно ни было по своей абсолютной величинѣ.

4. Между каждыми двумя раціональными числами существуетъ безконечное количество раціональныхъ же чиселъ.

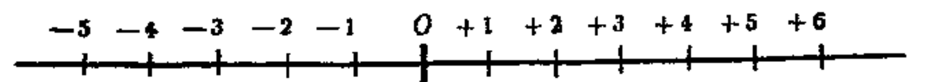
Если, напр., даны раціональныя числа a и b и $a > b$, то всякій разъ, когда мы прибавимъ къ b число, которое меньше $a-b$, напр., $\frac{a-b}{2}$, $\frac{a-b}{3}$, $\frac{2}{3}(a-b)$; ..., $\frac{a-b}{n}$, гдѣ $n > 1$, мы получимъ число, которое заключается между a и b, какъ бы мало ни отличались другъ отъ друга a и b

§ 192. **Прямая чиселъ.** Въ какой степени съ каждымъ новымъ расширеніемъ понятія о числѣ увеличивается запасъ чиселъ, это можетъ быть наглядно изображено слѣдующимъ образомъ.



Взявъ произвольную линейную мѣру m, будемъ откладывать ее на неограниченной прямой I отъ нѣкоторой точки O. Такъ мы получимъ точки, разстоянія которыхъ отъ O будутъ равны 1, 2, 3 и т. д. такимъ мѣрамъ. Назвавъ эти точки тѣми же числами 1, 2, 3 и т. д., будемъ называть ихъ точками, соотвѣтствующими этимъ числамъ. На прямой I мы только ихъ разстоянія отъ O и будемъ въ состояніи выразить при помощи избранной мѣры m, пока мы обладаемъ только запасомъ абсолютныхъ цѣлыхъ чиселъ. Разстоянія же остальныхъ точекъ прямой I мы этими средствами выразить не можемъ.

II



Если же мы отложимъ мѣру *m* одинъ и второй и третій разъ и т. д. по прямой II, начиная отъ *O*, и въ противоположную сторону, то, для указанія длины получающихся при этомъ линій, мы можемъ концы отрѣзковъ, откладываемыхъ въ одну сторону, напр., вправо, обозначить числами +1, +2, +3 и т. д., а концы отрѣзковъ, откладываемыхъ въ другую сторону, числами —1, —2, —3, —4 и т. д. Эти концы и будемъ называть точками, соотвѣтствующими упомянутымъ положительнымъ и отрицательнымъ числамъ. При сравненіи прямыхъ I и II видно, что число точекъ, разстоянія которыхъ отъ *O* могутъ быть выражены при помощи мѣры *m*, удваивается по введеніи отрицательныхъ чиселъ (и по сопряженной съ этимъ замѣнѣ абсолютныхъ чиселъ положительными). Прямая II показываетъ при этомъ, какъ рѣдко и по введеніи отрицательныхъ чиселъ размѣщены на ней тѣ точки, разстоянія которыхъ отъ *O* могутъ быть выражены всею совокупностью относительныхъ чиселъ. Между каждыми двумя изъ этихъ точекъ есть еще безчисленное множество такихъ, которыхъ разстоянія отъ *O* указанными средствами опредѣлены быть не могутъ.

Послѣ введенія дробей положительныхъ и отрицательныхъ количество точекъ на прямой, разстоянія которыхъ отъ *O* могутъ быть выражены при помощи мѣры *m* и всего запаса чиселъ, состоящаго изъ всей совокупности этихъ новыхъ чиселъ (дробныхъ) вмѣстѣ съ прежними (цѣлыми), увеличивается въ безконечное число разъ. И для надобностей обыденной жизни этого запаса чиселъ оказывается вполнѣ достаточнымъ: на столько *густо* оказывается теперь прямая усѣянною такими точками, разстоянія которыхъ отъ *O* могутъ быть выражены при помощи избранной произвольной мѣры и упомянутаго запаса чиселъ, что на первый взглядъ можетъ показаться, что теперь всякой точкѣ прямой соотвѣтствуетъ которое-либо изъ чиселъ всего запаса чиселъ относительныхъ, цѣлыхъ и дробныхъ, другими словами, которое-либо изъ чиселъ *системы или совокупности всѣхъ раціональныхъ чиселъ*, которую для краткости будемъ называть системою *R*.

Построивъ, однако, какъ въ § 138, равнобедренный прямоугольный треугольникъ съ катетами равными мѣрѣ *m*, мы получимъ въ немъ гипотенузу, длина которой мѣрою *m* при помощи какого бы то ни было раціональнаго числа выражена быть не можетъ. Отложивъ эту гипотенузу на нашей прямой отъ точки *O* вправо или влѣво, мы въ каждомъ изъ этихъ случаевъ получимъ по точкѣ, которой разстояніе отъ *O* при помощи мѣры *m* также ни однимъ изъ чиселъ системы *R* выражено быть не можетъ.

И какъ указано было въ § 138, геометрія учитъ строить на прямой безчисленное множество точекъ такого же свойства, т. е. такихъ, для выраженія разстояній которыхъ отъ *O* при помощи одной и той же мѣры, про-

извольно разъ избранной, совокупности всѣхъ раціональныхъ чиселъ недостаточно.

Прямая съ изображеніемъ на ней запаса (вещественныхъ [§ 139]) чиселъ, все увеличивающагося съ каждымъ новымъ расширеніемъ понятія о числѣ, называется прямою чиселъ.

§ 193. **Непрерывность и ирраціональныя числа.** Движеніе точки, а вмѣстѣ съ тѣмъ и путь, который она описываетъ (или оставляемый ею слѣдъ, который мы себѣ мысленно представляемъ), мы не можемъ себѣ представить иначе, какъ непрерывными. Поэтому, если мы предположимъ, что по разсмотрѣнной въ предыдущемъ параграфѣ прямой движется въ какомъ-либо направленіи, напр., слѣва вправо, точка, то, пройдя какое-либо разстояніе, она должна будетъ перебывать въ каждой изъ точекъ, находящихся на этомъ разстояніи, слѣдовательно, и въ такихъ, разстоянія которыхъ отъ *0* выражаются раціональными числами, и въ такихъ, разстоянія которыхъ отъ *0* могутъ быть выражены только ирраціональными числами.

Слѣдовательно, для того, чтобы имѣть запасъ чиселъ, соотвѣтствующій непрерывности прямой и дающій возможность точно выразить разстояніе каждыхъ двухъ точекъ ея другъ отъ друга (такъ какъ каждая точка прямой можетъ быть избрана точкаю *0*), необходимо дополнить систему чиселъ раціональныхъ еще числами ирраціональными, другими словами расширить ее до *системы чиселъ вещественныхъ*, которая состоитъ изъ всѣхъ раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ вмѣстѣ, и которую для краткости будемъ обозначать греческою буквою P.

Созданіемъ системы чиселъ вещественныхъ запасъ чиселъ доводится до той полноты и до того совершенства, что дѣлается возможнымъ точное выраженіе въ числахъ каждой сплошной [§ 1] величины (напр., при равноускоренномъ движеніи времени по даннымъ пути и ускоренію или площади правильнаго треугольника по данной сторонѣ и т. д.).

§ 194. **Исходная точка общей теоріи ирраціональныхъ чиселъ.** Всякая прямая можетъ быть раздѣлена на двѣ части въ каждой изъ ея точекъ, слѣдовательно и прямая чиселъ — какъ въ точкѣ, соотвѣтствующей раціональному числу, такъ и въ точкѣ, соотвѣтствующей ирраціональному числу. Послѣ такого раздѣленія прямой всѣ точки ея, слѣдовательно, и точки, соотвѣтствующія *раціональнымъ* числамъ, окажутся раздѣленными на два класса, на классъ точекъ, лежащихъ влѣво отъ точки дѣленія, и на классъ точекъ, лежащихъ вправо отъ точки дѣленія. При этомъ каждая точка I класса лежитъ лѣвѣе каждой изъ точекъ II класса, такъ что разстояніе каждой точки I класса отъ *0* выражается числомъ меньшимъ, чѣмъ разстояніе отъ *0* каждой точки II класса.

Раздѣленіе системы раціональныхъ чиселъ на два класса, соотвѣтствующее раздѣленію на двѣ части прямой въ *любой* изъ точекъ ея, послужило однимъ изъ способовъ введенія и опредѣленія въ общемъ видѣ ирраціональныхъ чиселъ *), который мы ниже и излагаемъ

§ 195. **Понятіе о сѣченіи.**

Опредѣленіе. **Раздѣленіе всей совокупности раціональныхъ чиселъ на такія двѣ части или такіе два класса A и A', что каждое число области A (которую назовемъ нижней) меньше каждаго изъ чиселъ области A' (которую назовемъ верхней), называется сѣченіемъ въ области раціональныхъ чиселъ.**

Для обозначенія же такого сѣченія примѣняется символъ A/A'.

На такія двѣ части можно область раціональныхъ чиселъ или систему R подраздѣлить любымъ раціональнымъ числомъ, напр., какъ въ § 160, числомъ 7. Въ такомъ случаѣ къ первому классу—нижней области нужно будетъ отнести всѣ раціональныя числа, которыя меньше 7, и ко второму классу верхней области всѣ раціональныя числа, которыя больше 7. Число же 7 можетъ или занять особое положеніе и составить одно само по себѣ третій классъ или же быть отнесеннымъ къ I классу, какъ наибольшее изъ чиселъ этой нижней области, или ко II классу, какъ наименьшее изъ чиселъ этой верхней области.

Въ первомъ случаѣ не будетъ ни въ нижней области наибольшаго числа ни въ верхней наименьшаго, ибо, какъ бы мало ни отличалось отъ 7 какое-либо число перваго класса, между нимъ и числомъ 7 есть все-таки всегда еще числа [см. п. 4 въ § 191], такъ же какъ между 7 и всякимъ числомъ второго класса, какъ бы мало ни отличалось отъ 7 и это послѣднее.

Если же сѣченіе произвести подраздѣленіемъ всѣхъ раціональныхъ чиселъ только на два класса, то во второмъ классѣ не будетъ наименьшаго числа въ томъ случаѣ, когда число 7 будетъ отнесено къ первому классу, и въ первомъ классѣ не будетъ наибольшаго числа въ томъ случаѣ, когда число 7 будетъ отнесено ко второму классу.

Послѣ этого примѣра будетъ понятно введеніе слѣдующихъ оборотовъ рѣчи и обозначеній:

Опредѣленіе. **Про раціональное число, дѣлящее всѣ остальныя раціональныя числа на нижнюю и верхнюю области** (т. е. такое, которое само больше каждаго числа нижней области и меньше каждаго числа верхней области, или та-

*) Этотъ способъ обоснованія общаго ученія объ ирраціональныхъ числахъ придуманъ Рихардомъ Дедекиндомъ (1872 г.).

кое, которое является наибольшимъ числомъ нижней области или наименьшимъ числомъ верхней области), говорятъ, что имъ произведено сѣченіе, или что оно производитъ сѣченіе, или что оно соотвѣтствуетъ произведенному сѣченію *).

Опредѣленіе. Для обозначенія числа, которымъ произведено раздѣленіе совокупности раціональныхъ чиселъ на нижнюю и верхнюю области A и A', служитъ символъ (A, A').

Такъ равенствомъ

$$7=(A, A')$$

указывается, какія раціональныя числа принадлежатъ къ классу A и какія къ классу A'.

Равенствомъ

$$0=(N, P)$$

указывается, что сѣченіе произведено числомъ 0, и что, слѣдовательно, N означаетъ совокупность всѣхъ отрицательныхъ раціональныхъ чиселъ и P совокупность всѣхъ положительныхъ раціональныхъ чиселъ (Въ случаѣ раздѣленія системы R на два только класса 0 могъ бы быть отнесенъ какъ къ классу N, такъ и къ классу P).

Случается иногда, что сѣченіе производится только въ области абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ.

При такомъ условіи равенство

$$1=(Q, Q')$$

имѣло бы тотъ смыслъ, что сѣченіе произведено абсолютнымъ числомъ 1, и что Q есть совокупность всѣхъ абсолютныхъ правильныхъ дробей, а Q' совокупность всѣхъ абсолютныхъ неправильныхъ дробей (Тутъ, въ случаѣ отдачи предпочтенія раздѣленію совокупности раціональныхъ чиселъ только на два класса, число 1 могло бы быть отнесено какъ къ нижней области Q, такъ и къ верхней области Q').

§ 196. **Существованіе сѣченій, которымъ не соотвѣтствуетъ ни одно изъ раціональныхъ чиселъ.** Не трудно убѣдиться, что возможно безконечное количество и такихъ сѣченій, которыя не могутъ быть произведены раціональными числами.

Если мы, напр., всю совокупность раціональныхъ чиселъ раздѣлимъ на два класса такъ, что въ верхней области окажутся всѣ положительныя числа, которыхъ квадраты больше 2, въ нижней же всѣ остальныя числа, то такое подраздѣленіе составитъ сѣченіе. Дѣйствительно упомянутымъ условіемъ каждому раціональному числу указано мѣсто или въ нижней

---

*) Вмѣсто «сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ» мы будемъ часто говорить просто «сѣченіе».

области или въ верхней: въ нижней всѣмъ отрицательнымъ числамъ, нулю и всѣмъ тѣмъ положительнымъ числамъ, которыхъ квадраты меньше 2, въ верхней всѣмъ тѣмъ положительнымъ числамъ, которыхъ квадраты больше 2, при чемъ размѣщены будутъ по этимъ областямъ *всѣ* положительныя раціональныя числа, такъ какъ квадратъ каждаго такого числа непремѣнно будетъ или больше 2 или меньше 2.

Но упомянутое сѣченіе не можетъ быть произведено раціональнымъ числомъ, ибо, какъ мы уже видѣли въ § 138, нѣтъ такого раціональнаго числа, котораго квадратъ равенъ 2, слѣдовательно, и нѣтъ раціональнаго числа, которое одно само по себѣ образовало бы третій классъ въ области раціональныхъ чиселъ, будучи числомъ, которое меньше каждаго числа верхней области и больше каждаго числа нижней области.

Что разсмотрѣнное сѣченіе не производится раціональнымъ числомъ, можетъ быть доказано еще и такъ:

При сѣченіи, производимомъ раціональнымъ числомъ, это послѣднее можетъ быть отнесено или наибольшимъ къ нижней области или наименьшимъ къ верхней. Допустимъ, что въ разсмотрѣнномъ сѣченіи въ нижней области есть такое наибольшее число, и назовемъ его a. Такъ какъ къ этой области должны принадлежать и числа положительныя, но такія, которыхъ квадраты меньше 2, то и a должно быть положительнымъ числомъ и относительно его должно оставаться справедливымъ условіе:

$$a^2<2,$$

которое можетъ быть выражено также въ формѣ

$$a^2+\varepsilon=2,$$

гдѣ ε должно обозначать нѣкоторое положительное число [§ 48].

Если мы къ этому числу a прибавимъ $\frac{1}{n}$ и сумму $a+\frac{1}{n}$ возвысимъ въ квадратъ, то получимъ

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Какъ бы мало ни было ε, всегда можно число n выбрать такимъ большимъ, что $\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}$ будетъ меньше ε, слѣдовательно, $a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}$ или, что то же самое, $\left(a+\frac{1}{n}\right)^2$ меньше 2.

Такъ оказывается, что и число $a+\frac{1}{n}$, хотя оно и больше a, принадлежитъ къ нижней области, и что, слѣдовательно, допущеніе, что есть нѣкоторое наибольшее число a среди чиселъ этой области, невозможно.

Допустимъ теперь, что въ разсмотрѣнномъ сѣченіи въ верхней области есть наименьшее число, и назовемъ его a'. Относительно его, какъ и относи-

тельно каждаго другого числа, принадлежащаго къ этой области должно оставаться справедливымъ условіе:

$$a'^2 > 2,$$

которое можетъ быть выражено также въ формѣ

$$a'^2 = 2 + \eta$$

или въ формѣ

$$a'^2 - \eta = 2,$$

означающихъ какъ та, такъ и другая, что a'^2 на η больше 2 [§ 48].

Возвысивъ въ квадратъ разность $a' - \frac{1}{m}$, гдѣ $m > 0$, мы получаемъ

$$a'^2 - \frac{2a'}{m} + \frac{1}{m^2} = a'^2 - \frac{1}{m}\left(2a' - \frac{1}{m}\right).$$

Какъ бы мало ни было положительное число η, всегда можно число m выбрать такимъ большимъ, что разность $2a' - \frac{1}{m}$ будетъ положительною и произведеніе $\frac{1}{m}\left(2a' - \frac{1}{m}\right)$ меньше η, слѣдовательно,

$$\left(a' - \frac{1}{m}\right)^2 > 2\ ^*).$$

Такъ оказывается, что и число $a' - \frac{1}{m}$ принадлежитъ къ верхней области, хотя оно и меньше a', и что, слѣдовательно, допущеніе, что есть нѣкоторое наименьшее число a' среди чиселъ этой области, также невозможно.

Итакъ, нѣтъ раціональнаго числа, соотвѣтствующаго разсмотрѣнному сѣченію, т. е. такого, которымъ бы можно было считать произведеннымъ это сѣченіе.

И такихъ примѣровъ, какъ разсмотрѣнный, можно привести, сколько угодно.

---

*) Если мы изъ неравенства

$$a'^2 = 2 + \eta \quad \text{вычтемъ}$$

неравенство

$$\frac{1}{m}\left(2a' - \frac{1}{m}\right) < \eta,$$

$$a'^2 - \frac{1}{m}\left(2a' - \frac{1}{m}\right) > 2$$

то, по теор. 2 въ § 50, получаемъ:

или

$$\left(a' - \frac{1}{m}\right)^2 > 2.$$

§ 197. **Введеніе ирраціональныхъ чиселъ посредствомъ сѣченій.** Тѣмъ, что существуютъ сѣченія которыя не могутъ быть произведены раціональными числами, вновь подтверждается несовершенство системы R раціональныхъ чиселъ, требующее дополненія ея ирраціональными числами и созданія этимъ способомъ системы P вещественныхъ чиселъ.

Только послѣдняя можетъ быть названа *непрерывною*, такъ какъ обладаетъ тѣмъ совершенствомъ и тою полнотою, которыя необходимы для возможности выраженія въ числахъ каждой сплошной величины [§ 193].

Общій же **способъ введенія ирраціональныхъ чиселъ** соотоитъ въ слѣдующемъ:

Всякій разъ, когда предъ нами окажется такое сѣченіе, которому ни одно изъ раціональныхъ чиселъ не соотвѣтствуетъ, мы создаемъ новое, ирраціональное число, которое считаемъ вполнѣ опредѣленнымъ посредствомъ этого сѣченія.

Такъ въ примѣрѣ, разсмотрѣнномъ въ предыдущемъ параграфѣ, мы вводимъ ирраціональное число, которое считаемъ опредѣленнымъ посредствомъ произведеннаго тамъ сѣченія и которое мы можемъ обозначить символомъ $\sqrt{2}$ по той причинѣ, что квадратъ его равняется 2, какъ это видно на основаніи теоремы доказываемой въ § 239.

Опредѣленія. Сѣченіе, произведенное раціональнымъ числомъ, и само называется раціональнымъ.

Если же нѣтъ раціональнаго числа, соотвѣтствующаго произведенному сѣченію, то сѣченіе называется ирраціональнымъ.

§ 198 **Отличительные признаки раціональнаго и ирраціональнаго сѣченія.**

А. Если, производя сѣченіе, подраздѣлять всѣ раціональныя числа во всѣхъ случаяхъ только на два класса, то различіе между раціональнымъ и ирраціональнымъ сѣченіемъ будетъ состоять въ слѣдующемъ:

Сѣченіе раціонально, если въ нижней области есть наибольшее число или въ верхней наименьшее.

Сѣченіе ирраціонально, если въ нижней области нѣтъ наибольшаго числа и въ то же время въ верхней области нѣтъ наименьшаго.

Разсмотрѣнные въ §§ 160 и 182 ряды приближенныхъ значеній ирраціональныхъ корней наглядно поясняютъ упомянутое только-что свойство ирраціональнаго сѣченія. Представляя себѣ эти корни опредѣленными посредствомъ сѣченій, мы видимъ слѣдующее:

1) Въ этихъ рядахъ приближенныя съ недостаткомъ значенія всѣ принадлежатъ къ нижней области сѣченія, приближенныя же съ избыткомъ значенія всѣ принадлежатъ къ верхней его области.

2) Значенія перваго ряда все увеличиваются, но такимъ образомъ, что среди нихъ никогда не оказывается наибольшаго (такъ какъ за каждымъ полученнымъ значеніемъ всегда слѣдуетъ еще одно, которое больше его или равно ему), значенія же второго ряда все уменьшаются, но такимъ образомъ, что среди нихъ никогда не оказывается наименьшаго (такъ какъ за каждымъ полученнымъ такимъ значеніемъ слѣдуетъ всегда еще одно, которое меньше его или равно ему).

3) При этомъ важно обратить вниманіе на то, что числа этихъ рядовъ въ концѣ концовъ такъ другъ къ другу приближаются, что всегда можетъ быть найдено по такому числу въ каждомъ изъ рядовъ, что разность между ними будетъ меньше всякаго заданнаго числа ε, какъ бы мало оно ни было по абсолютной величинѣ своей.

Б. Если же при образованіи сѣченія допускать подраздѣленіе всѣхъ раціональныхъ чиселъ и на три класса, то возможность полученія всѣхъ трехъ классовъ есть признакъ раціональнаго сѣченія, возможность же полученія только двухъ—признакъ сѣченія ирраціональнаго.

§ 199. Важное свойство всякаго сѣченія.

Теорема. Въ нижней и верхней областяхъ сѣченія всегда можно найти по такому числу, что разность между ними будетъ меньше всякаго заданного числа ε, какъ бы мало оно ни было по абсолютной величинѣ своей.

Утверждаемая истина должна быть справедлива потому, что она есть непосредственное слѣдствіе изъ свойствъ раціональныхъ чиселъ, упомянутыхъ въ п.п. 3 и 4 § 191.

Но доказательство теоремы можетъ состоять также въ указаніи способа, какъ можно найти такія числа a и a' въ классахъ A и A' сѣченія A/A', чтобы было

$$a' - a < \varepsilon.$$

Для этого достаточно поступить такъ:

вычесть любое число a_x нижней области изъ любого числа a_x' верхней области, разность $a_x' - a_x$ раздѣлить на такое большое число n, чтобы част-

ное $\frac{a_x' - a_x}{n}$, которое назовемъ δ, было меньше ε, образовать рядъ чиселъ чрезъ прибавленіе къ a_x чиселъ $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots, (n-1)\delta$ и, наконецъ, распредѣлить числа этого ряда по классамъ A и A'.

Тогда должны оказаться изъ этихъ чиселъ два смежныхъ, напр., $a_x + k\delta$ и $a_x + (k+1)\delta$, такого свойства, что одно будетъ принадлежать къ классу A, другое къ классу A'. Назвавъ ихъ a и a', мы и будемъ имѣть дѣйствительно:

$$a' - a = \delta$$
$$\delta < \varepsilon$$

слѣдовательно:
$$a' - a < \varepsilon.$$

§ 200. **Опредѣленіе посредствомъ сѣченія всякаго вещественнаго числа.** Во всѣхъ случаяхъ, которые мы разсматривали до сихъ поръ, раціональное сѣченіе производилось *даннымъ* числомъ. Но можетъ и, наоборотъ, раціональное число быть опредѣляемо сѣченіемъ.

Поянимъ это наипростѣйшимъ примѣромъ.

Раздѣлимъ всѣ раціональныя числа на два класса слѣдующимъ образомъ: въ одномъ помѣстимъ всѣ числа, которыхъ произведеніе на 3 будетъ больше 15, въ другомъ всѣ остальныя. Такое подраздѣленіе составляетъ сѣченіе, такъ какъ упомянутымъ условіемъ каждому раціональному числу указано мѣсто или въ нижней области, или въ верхней. Переходя по порядку (слѣва вправо по прямой чиселъ) отъ одного раціональнаго числа къ другому и представляя себѣ каждое изъ нихъ умноженнымъ на 3, мы получимъ сначала всѣ отрицательныя числа, затѣмъ 0 (такъ какъ $0 \cdot 3 = 0$) и затѣмъ положительныя числа, сначала такія, которыхъ произведенія на 3 меньше 15, и наконецъ, число, котораго произведеніе на 3 равно 15, т. е. число 5. Имъ закончатся числа I класса, нижней области. А затѣмъ уже будутъ получаться числа бо̀льшія, чѣмъ 5, которыхъ произведенія на 3 будутъ больше 15 и которыя поэтому нужно будетъ помѣстить во II классѣ, верхней области.

Изъ произведеннаго обзора видно, что въ I классѣ оказалось нѣкоторое наибольшее число, а именно 5. При иномъ же порядкѣ обзора (справа влѣво по прямой чиселъ) оно могло бы быть также получено наименьшимъ въ верхней области, и еще при иномъ—также какъ число, образующее одно само по себѣ третій классъ.

Слѣдовательно, 5 есть число, соотвѣтствующее произведенному сѣченію. И можно также сказать, что *этимъ сѣченіемъ опредѣлено число 5.*

Сопоставляя опредѣленіе сѣченіемъ раціональнаго числа съ опредѣленіемъ такимъ же образомъ числа ирраціональнаго, мы ихъ можемъ охарактеризовать такъ:

Опредѣленіе. Если сѣченіе произведено и оказывается, что есть раціональное число, соотвѣтствующее ему, то говорятъ, что этимъ сѣченіемъ опредѣляется это раціональное число.

Способъ введенія ирраціональныхъ чиселъ. Если сѣченіе произведено и оказывается, что нѣтъ раціональнаго числа, соотвѣтствующаго ему, то сѣченіемъ опредѣляется ирраціональное число.

Слѣдствіе. Всякимъ сѣченіемъ опредѣляется какое-либо вещественное число.

§ 201. **Отрицательныя ирраціональныя числа.** Если въ нижней области сѣченія имѣются положительныя числа, то верхняя должна состоять исключительно изъ положительныхъ чиселъ, и потому сѣченіе такого рода можно было бы назвать находящимся среди положительныхъ чиселъ. Если же въ верхней области сѣченія имѣются отрицательныя числа, то нижняя должна состоять исключительно изъ отрицательныхъ чиселъ, и такое сѣченіе можно было бы назвать находящимся среди отрицательныхъ чиселъ. Сѣченіемъ перваго рода можетъ быть опредѣлено только положительное число, сѣченіемъ же послѣдняго рода только отрицательное число, если сѣченія раціональны. Но и въ томъ случаѣ, когда сѣченіемъ опредѣляется ирраціональное число, естественно это число въ первомъ случаѣ считать положительнымъ, въ послѣднемъ отрицательнымъ, такъ какъ иначе получились бы противорѣчія и несообразности.

Въ послѣдующемъ будетъ постепенно выясняться, что вводимыя такимъ образомъ отрицательныя ирраціональныя числа обладаютъ всѣми отличительными свойствами отрицательныхъ чиселъ раціональныхъ.

Вводя же отрицательныя ирраціональныя числа, мы теперь поступаемъ такимъ же образомъ, какъ мы поступали и прежде нѣсколько разъ и какъ мы въ аналогичныхъ случаяхъ будемъ поступать и впредь, а именно, мы придаемъ, поскольку это возможно, вновь вводимымъ числамъ качества, какими обладаютъ числа, существовавшія до этого, и достигаемъ этого тѣмъ, что принимаемъ извѣстныя теоремы, выражающія основныя качества имѣвшихся уже чиселъ, за опредѣленія для новыхъ чиселъ. Такъ мы, формулируя теперь признакъ того, положительно ли или отрицательно вещественное число, одновременно этимъ выразимъ нѣкоторую теорему (которая есть слѣдствіе изъ предыдущихъ опредѣленій и теоремъ) для раціональныхъ чиселъ и соотвѣтствующее опредѣленіе для ирраціональныхъ чиселъ.

Опредѣленіе (для ирраціональныхъ чиселъ) и **слѣдствіе** (для раціональныхъ чиселъ). Вещественное число, опредѣляемое сѣченіемъ, положительно, если 0 принадлежитъ къ его нижней области, и отрицательно, если 0 принадлежитъ къ его верхней области.

§ 202. **Общее опредѣленіе ирраціональнаго числа.** При помощи понятія о сѣченіи можетъ быть дано опредѣленіе ирраціональнаго числа въ самомъ общемъ видѣ, одинаково относящееся ко всякому ирраціональному числу, какого бы происхожденія оно ни было.

Опредѣленіе. Ирраціональнымъ называется число, опредѣляемое такимъ сѣченіемъ, которому не соотвѣтствуетъ ни одно изъ раціональныхъ чиселъ.

§ 203. **Введеніе нѣкоторыхъ обозначеній.** Для удобства предпошлемъ предстоящимъ разсужденіямъ небольшой обзоръ обозначеній, которыми мы будемъ пользоваться и нѣкоторыми изъ которыхъ мы уже пользовались.

При обозначеніи символомъ A/A' сѣченія въ области раціональныхъ чиселъ предъ чертою всегда ставится буква, обозначающая нижнюю область, послѣ черты буква, обозначающая верхнюю область.

Нижняя область называется также I классомъ, верхняя II классомъ.

Опредѣляемое сѣченіемъ A/A' число, которое мы уже условились обозначать символомъ (A, A'), мы будемъ называть малою греческою буквою, соотвѣтствующею латинской въ этомъ символѣ, если для обозначенія областей будетъ примѣняться одна и та же буква. Такъ, мы будемъ буквами α, β, μ обозначать числа, опредѣляемыя сѣченіями A/A', B/B', M/M' и сообразно съ этимъ писать:

$$\alpha = (A, A')$$
$$\beta = (B, B')$$
$$\mu = (M, M')$$

и т. п.

Числа, принадлежащія къ нижней или верхней области сѣченія, мы будемъ обозначать малыми латинскими буквами одноименными съ тѣми, которыми обозначаются области, снабжая букву черточкою на верху для обозначенія верхней области въ отличіе отъ нижней. Такъ, буквы a, b, m должны будутъ обозначать произвольныя числа классовъ A, B, M, знаки же a', b', m'—произвольныя числа классовъ A', B', M'. Если понадобятся обозначенія для нѣсколькихъ чиселъ одного и того же класса, то мы будемъ тѣ же буквы снабжать указателями. Такъ, напр., b_1, b_2, ..., b_n будутъ различныя числа класса B, m_1', m_2', ..., m_k'—различныя числа класса M'.

§ 204. **Распространеніе на ирраціональныя числа понятій о равенствѣ и неравенствѣ.** При введеніи ирраціональныхъ чиселъ путемъ сѣченій каждому изъ нихъ вмѣстѣ съ тѣмъ указывается мѣсто среди раціональныхъ чиселъ. Потому естественно ввести понятіе о сравненіи ихъ съ раціональными числами слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленіе 1. Ирраціональное число, опредѣляемое сѣченіемъ A/A', должно считать больше каждаго числа класса A и меньше каждаго числа класса A'.

Слѣдовательно, неравенство

$$a < \alpha < a'$$

остается въ силѣ для всякаго числа a класса A и для всякаго числа a' класса A', какое бы *вещественное* число α ни опредѣлялось сѣченіемъ A/A'.

Далѣе ясно, что равенство двухъ ирраціональныхъ чиселъ должно понимать слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленіе 2. Два ирраціональныхъ числа равны, если они опредѣляются тождественными сѣченіями.

Если, напр., произведены сѣченія A/A' и B/B', опредѣляющія числа α и β, и всѣ числа класса A тѣ же, что и числа класса B, и всѣ числа класса A' тѣ же, что и числа класса B', то

$$\alpha = \beta.$$

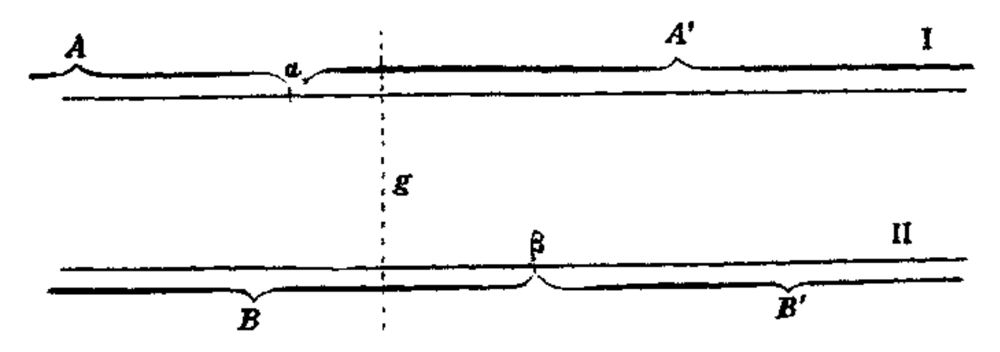
При этомъ важно замѣтить, что если окажутся тождественными классы A и B, то должны быть тождественными также классы A' и B', такъ какъ A и A' вмѣстѣ составляютъ всю совокупность раціональныхъ чиселъ и B и B' также. Равнымъ образомъ, если обѣ верхнія области A' и B' окажутся тождественными, то должны быть тождественными также и нижнія области A и B.

Слѣдствіе. Раціональное и ирраціональное число не могутъ быть равными другъ другу.

Примѣчаніе.

Вообще новыя числа, вводимыя послѣ всякаго новаго расширенія понятія о числѣ, не могутъ быть равными прежнимъ: отрицательное число никогда не можетъ равняться положительному, дробное никогда цѣлому, ирраціональное никогда раціональному, мнимое (какъ мы это особо еще разсмотримъ впослѣдствіи) никогда вещественному.

Помѣщеннымъ здѣсь чертежемъ наглядно поясняется, въ какомъ смыслѣ силою вещей указывается называть одно ирраціональное число больше или меньше другого. Прямыя I и II изображаютъ повторенную прямую чиселъ. Пересѣкающая ихъ вертикальная прямая, проведенная пунктиромъ, служитъ для указанія точки, изображающей на обѣихъ прямыхъ одно и то же раціональное число g. Наконецъ, на прямой I изобра-



жена точка, соотвѣтствующая ирраціональному (или же и раціональному) числу α, опредѣленному сѣченіемъ A/A', а на прямой II точка, соотвѣтствующая ирраціональному (или же и раціональному) числу β, опредѣленному сѣченіемъ B/B'.

Опредѣленіе 3. Изъ двухъ ирраціональныхъ чиселъ, опредѣленныхъ сѣченіями, то меньше, въ верхней области котораго есть раціональное число, встрѣчающееся также въ нижней области другого.

Слѣдствіе. Изъ двухъ ирраціональныхъ чиселъ, опредѣленныхъ сѣченіями, то больше, въ нижней области котораго есть раціональное число, встрѣчающееся также въ верхней области другого.

Суть дѣла, заключающаяся въ этомъ опредѣленіи и слѣдствіи изъ него, можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ въ знакахъ:

$$\begin{array}{c} \alpha < g \\ \underline{g < \beta} \\ \alpha < \beta \end{array}$$

и

$$\begin{array}{c} \beta > g \\ \underline{g > \alpha} \\ \beta > \alpha \end{array}\text{*)}.$$

Примѣчаніе. Если сравниваются между собою два числа, опредѣленныя сѣченіями, и окажется, что нѣтъ ни одного раціональнаго числа, принадлежащаго къ нижней области одного изъ нихъ и одновременно къ верхней области другого, то сѣченія должны быть тождественны и потому опредѣленныя ими числа равны. Если же окажется, что наименьшее изъ чиселъ верхней области перваго есть какъ разъ наибольшее изъ чиселъ нижней области второго, то въ такомъ случаѣ, на основаніи свойствъ ра-

---

*) Передъ этими неравенствами и между ними должно подразумѣвать слѣдующія слова:

Мы опредѣляемъ и впредь на основаніи этого опредѣленія будемъ заключать такъ:

$$\begin{array}{ll} \text{если} & \alpha < g \\ \text{и} & \underline{g < \beta} \\ \text{то} & \alpha < \beta \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ll} \text{если} & \beta > g \\ \text{и} & \underline{g > \alpha} \\ \text{то} & \beta > \alpha. \end{array}$$

ціональнаго сѣченія, также слѣдуетъ, что оба сѣченія тождественны и опредѣляютъ одно и то же раціональное число (сказанное наглядно поясняется перенесеніемъ точки α вправо или точки β влѣво въ послѣднемъ чертежѣ).

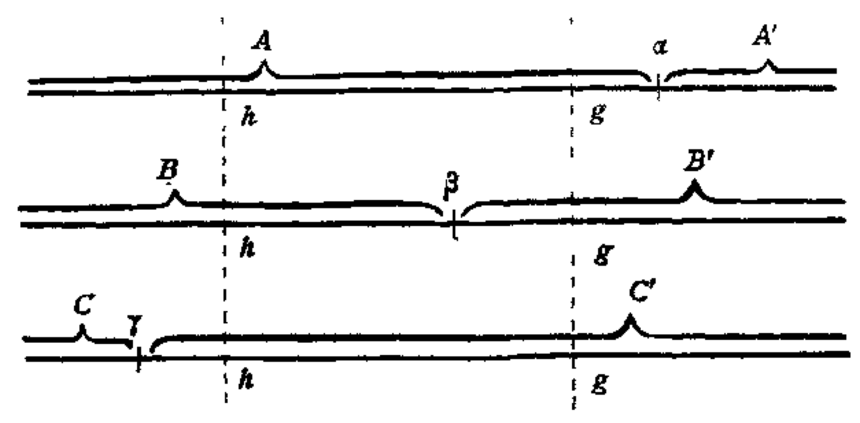
§ 205. **Теорема**. Если α, β и γ ирраціональныя числа и

$$\alpha > \beta$$
$$\beta > \gamma,$$

то

$$\alpha > \gamma$$

Док.



(Чтобы придать доказательству бо́льшую наглядность, повторимъ въ нѣсколько измѣненномъ видѣ послѣдній чертежъ и дополнимъ его еще третьею прямою для изображенія ирраціональнаго числа γ и вертикальною прямою, указывающею мѣсто раціональнаго числа h на всѣхъ трехъ прямыхъ, которыя должны изображать каждая прямую чиселъ).

По опредѣленію неравенства ирраціональныхъ чиселъ α будетъ больше β въ томъ случаѣ, если есть раціональное число, напр., g, которое меньше α, но больше β. Равнымъ образомъ β будетъ больше γ въ томъ случаѣ, если есть раціональное число, напр., h, которое меньше β, но больше γ Слѣдовательно, наши предположенія равносильны неравенствамъ:

$$\alpha > g > \beta$$
$$\beta > h > \gamma.$$

Изъ этихъ неравенствъ видно, что h принадлежитъ къ нижней области B сѣченія, опредѣляющаго β, а g къ его верхней области B', и что, слѣдовательно,

$$g > h$$

Но изъ тѣхъ же неравенствъ видно, что g есть число нижней области A сѣченія, опредѣляющаго α, а h число верхней области C' сѣченія, опредѣляющаго γ. А такъ какъ $g > h$, то и подавно h должно принадлежать къ области A, а g къ области C'. Слѣдовательно, и g и h (а вмѣстѣ съ ними и всѣ раціональныя числа между ними) принадлежать къ обѣимъ упомянутымъ областямъ, изъ чего мы, по опредѣленію 3 въ § 204, и заключаемъ, что

$$\alpha > \gamma .$$

Примѣчаніе. Такъ оказывается, что и для ирраціональныхъ чиселъ остается въ силѣ теорема VIII [§ 51].

Опредѣленіе. Если α, β и γ вещественныя числа и

$$\alpha > \beta > \gamma$$

(или, что то же самое $\gamma < \beta < \alpha$), то число β называется заключеннымъ между α и γ.

§ 206. **Очень важный признакъ равенства вещественныхъ чиселъ.** Часто бываетъ очень удобно заключить о равенствѣ вещественныхъ, въ особенности ирраціональныхъ, чиселъ при посредствѣ слѣдующаго предложенія:

Теорема. Два вещественныя числа равны, если существуютъ одинаковыя для обоихъ, заключающія ихъ между собою раціональныя числа такого свойства, что разность между ними можетъ быть сдѣлана меньше всякаго заданнаго числа ε, какъ бы мало оно ни было по абсолютной величинѣ своей (т. е. такого свойства, что всегда можетъ быть найдено по числу изъ верхней и изъ нижней области, разность между которыми будетъ меньше всякаго заданнаго числа ε).

Предп. a и a' раціональныя числа такого свойства, что

$$a < \alpha < a'$$
$$a < \beta < a'$$

и что можно сдѣлать

$$a' - a < \varepsilon,$$

какъ бы число ε ни было мало по абсолютной величинѣ своей.

Утв. $\alpha = \beta$.

Док. (отъ противнаго) *).

---

*) **Опредѣленіе**. Доказательствомъ отъ противнаго называется такое, которымъ разъясняется, что невозможно противоположное тому, что утверждается. Въ § 196 уже былъ примѣненъ этотъ способъ доказательства.

Допустимъ, что a не равняется β, а больше β или меньше β. Въ первомъ случаѣ на основаніи предположенія мы имѣли бы

$$a < \beta < \alpha < a'.$$

По опредѣленію же неравенства ирраціональныхъ чиселъ и на основаніи свойствъ неравныхъ раціональныхъ чиселъ должно существовать безчисленное множество раціональныхъ чиселъ, заключенныхъ между α и β. Положимъ, что p и q принадлежатъ къ нимъ, и что при этомъ $p > q$. Въ такомъ случаѣ p и q расположились бы между остальными упоминавшимися здѣсь числами слѣдующимъ образомъ:

$$a < \alpha < q < p < \beta < a'.$$

Вычтя же изъ неравенства

$$a' > p$$

неравенство $a < q$, мы получили бы

неравенство $a' - a > p - q$,

противорѣчащее предположенію, что можно выбрать такое a и такое a', что разность $a' - a$ окажется меньше всякаго заданнаго раціональнаго числа ε, какъ бы оно ни было мало по абсолютной величинѣ своей.

Слѣдовательно, допущеніе, что $\alpha > \beta$, невозможно.

Такимъ же образомъ доказывается, что $\alpha < \beta$ также быть не можетъ.

Слѣдовательно, остается только одна возможность, что

$$\alpha = \beta,$$

что и требовалось доказать.

(См. второе примѣчаніе въ § 204).

Соглашеніе. Условимся говорить о числѣ, которое «можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ», въ тѣхъ случаяхъ, когда слѣдовало бы, выражаясь точно, говорить о числѣ, которое «можетъ быть сдѣлано меньше всякаго заданнаго числа, какъ бы это послѣднее ни было мало по абсолютной величинѣ своей».

§ 207. **Одинъ изъ способовъ вычисленія ирраціональнаго числа, опредѣляемаго сѣченіемъ.** Точное указаніе, какъ должно быть произведено сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ, и обозначеніе, избранное для числа, опредѣленнаго этимъ сѣченіемъ, составляютъ вмѣстѣ точное выраженіе этого числа. Подъ упоминаемымъ же здѣсь вычисленіемъ такого числа должно понимать отысканіе приближенныхъ значеній его. Если мы сумѣемъ отыскать два числа a и a', одно изъ нижней, другое изъ верхней области сѣченія, такихъ, что будетъ

$$a' - a = \varepsilon \quad \text{или} \quad a' - a < \varepsilon,$$

то число, опредѣленное сѣченіемъ, будетъ вычислено съ точностью до ε. Примѣрами такихъ вычисленій могутъ служить извлеченія въ §§ 160 и 182, гдѣ всѣ десятичныя дроби, выражающія корень приближенно съ недостаткомъ, принадлежатъ къ нижней области сѣченія, которымъ онъ опредѣленъ, а десятичныя дроби, выражающія корень приближенно съ избыткомъ, принадлежатъ къ верхней области этого сѣченія, и гдѣ степень точности или приближенія 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ и т. д.

Но въ названныхъ примѣрахъ вычисленіе производилось особымъ способомъ, примѣнимымъ только къ извлеченію корней. Общій же способъ вычисленія числа, опредѣленнаго сѣченіемъ, можетъ быть основанъ на послѣдовательномъ вычисленіи такъ называемаго ариѳметическаго средняго двухъ чиселъ, т. е. ихъ полусуммы. Такое ариѳметическое среднее двухъ чиселъ находится всегда какъ разъ по срединѣ между ними, т. е., разности между нимъ и этими числами равны. Такъ, напр., для ариѳметическаго средняго $\frac{a+a'}{2}$ чиселъ a и a' мы имѣемъ:

$$\frac{a+a'}{2} - a = a' - \frac{a+a'}{2},$$

что легко провѣрить.

Найдя какое-либо число a въ нижней области сѣченія и какое-либо число a' въ верхней и вычисливъ ихъ ариѳметическое среднее $\frac{a+a'}{2}$, мы провѣряемъ, къ которой области оно принадлежитъ. Убѣдившись, напр., что оно принадлежитъ къ нижней области, назовемъ его a_1 и вычислимъ ариѳметическое среднее $\frac{a_1+a'}{2}$. Послѣднее назовемъ a_2, если оно принадлежитъ къ нижней области, или a_1', если оно принадлежитъ къ верхней области, и вычислимъ въ первомъ случаѣ $\frac{a_2+a'}{2}$, въ послѣднемъ $\frac{a_1+a_1'}{2}$. Затѣмъ мы вычисляемъ опять ариѳметическое среднее между послѣдними двумя числами, найденными въ верхней и нижней областяхъ, и продолжаемъ такъ до тѣхъ поръ, пока разность между послѣдними двумя ариѳметическими средними, принадлежащими къ различнымъ областямъ, не окажется меньше ε или равною ε.

Примѣнимъ описанный способъ къ сѣченію, разсмотрѣнному въ § 190.

Въ приводимой ниже табличкѣ будемъ помѣщать въ первой и второй графахъ результаты повѣрки того, къ которой области принадлежитъ послѣднее ариѳметическое среднее (въ первой строкѣ помѣщены приближенныя съ точностью до 1 значенія опредѣленнаго сѣченіемъ числа, съ которыхъ начинается все вычисленіе), въ третьей же графѣ результаты вычисленій при отысканіи ариѳметическихъ среднихъ:

I классъ (числа, которыхъ квадратъ меньше 2.	**II классъ** (числа, которыхъ квадратъ больше 2	**Ариѳметическія среднія.**
1	2	$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$
	$\frac{3}{2}$	$\left(1+\frac{3}{2}\right):2 = \frac{5}{4}$
$\frac{5}{4}$		$\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right):2 = \frac{11}{8}$
$\frac{11}{8}$		$\left(\frac{11}{8}+\frac{3}{2}\right):2 = \frac{23}{16}$
	$\frac{23}{16}$	$\left(\frac{11}{8}+\frac{23}{16}\right):2 = \frac{45}{32}$
$\frac{45}{32}$		$\left(\frac{45}{32}+\frac{23}{16}\right):2 = \frac{91}{64}$
	$\frac{91}{64}$	$\left(\frac{45}{32}+\frac{91}{64}\right):2 = \frac{181}{128}$
$\frac{181}{128}$		$\left(\frac{181}{128}+\frac{91}{64}\right):2 = \frac{363}{256}$
	$\frac{363}{256}$	$\left(\frac{181}{128}+\frac{363}{256}\right):2 = \frac{725}{512}$
	$\frac{725}{512}$	$\left(\frac{181}{128}+\frac{725}{512}\right):2 = \frac{1449}{1024}$
	$\frac{1449}{1024}$	

Если мы остановимся на послѣднемъ числѣ во второй графѣ, то достигнута будетъ точность до $\frac{1}{1024}$, такъ какъ разность между послѣднимъ

приближеннымъ съ избыткомъ значеніемъ $\frac{1449}{1024}$ и послѣднимъ приближеннымъ съ недостаткомъ значеніемъ $\frac{181}{128}$ равна упомянутой степени приближенія $\frac{1}{1024}$.

§ 208. **Послѣдовательности.** Ряды приближенныхъ значеній ирраціональныхъ корней, съ которыми намъ пришлось познакомиться въ §§ 160 и 182, представляютъ примѣры такъ называемыхъ **послѣдовательностей**. Но не только приближенныя значенія ирраціональныхъ чиселъ, вычисляемыя по опредѣленнымъ законамъ, составляютъ такіе ряды чиселъ. Они могутъ, напр., быть образованы при посредствѣ каждой періодической десятичной дроби: всѣ приближенныя значенія ея съ недостаткомъ составятъ одну послѣдовательность, всѣ же приближенныя значенія ея съ избыткомъ составятъ другую послѣдовательность. Такимъ образомъ, періодическая дробь 0,(27) $\frac{3}{11}$ даетъ слѣдующія двѣ послѣдовательности:

0,2 ; 0,27 ; 0,272 ; 0,2727 ; 0,27272 ; ...

и

0,3 ; 0,28 ; 0,273 ; 0,2728 ; 0,27273; ..

Важно замѣтить, что во всѣхъ приведенныхъ нами примѣрахъ приближенныя значенія съ недостаткомъ представляютъ всегда возрастающій рядъ чиселъ, приближенныя же значенія съ избыткомъ всегда рядъ чиселъ убывающій.

Подобные ряды чиселъ могутъ получаться не только какъ приближенія, но и иными способами. Чтобы рядъ чиселъ представлялъ послѣдовательность, достаточно, чтобы онъ удовлетворялъ слѣдующимъ требованіямъ:

Опредѣленіе. Послѣдовательностью называется безграничный рядъ чиселъ, слѣдующихъ другъ за другомъ по опредѣленному закону.

Для насъ здѣсь послѣдовательности представляютъ интересъ постольку, поскольку онѣ примѣнимы для образованія сѣченій.

§ 209. **Пары сходящихся послѣдовательностей.**

Опредѣленіе. Двѣ послѣдовательности раціональныхъ чиселъ

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots$$

и

$$a'_1,\quad a'_2,\quad a'_3,\quad \ldots$$

называются парою сходящихся послѣдовательностей (или системою двухъ совмѣстныхъ послѣдовательностей), если:

1) числа первой послѣдовательности возрастаютъ или, по крайней мѣрѣ, не убываютъ, такъ что
$$a_{n+1} \geqslant a_n;$$

2) числа второй послѣдовательности убываютъ или, по крайней мѣрѣ, не возрастаютъ, такъ что
$$a'_{n+1} \leqslant a'_n;$$

3) всегда имѣются въ первой и во второй послѣдовательности числа, которыхъ разность $a_n' - a_n$ меньше всякаго заданнаго числа ε, какъ бы это число ни было мало по абсолютной величинѣ своей.

Слѣдствіе. Во всякой парѣ сходящихся послѣдовательностей всякое число первой послѣдовательности (низшей) меньше любого числа второй (высшей).

Легко убѣдиться, что всѣ приведенные выше примѣры послѣдовательностей обладаютъ приведенными здѣсь свойствами.

§ 210. **Теорема.** Всякою парою сходящихся послѣдовательностей опредѣляется сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ.

Док. Обозначимъ числа, составляющія нѣкоторую пару сходящихся послѣдовательностей, такъ же, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, и образуемъ двѣ совокупности раціональныхъ чиселъ слѣдующимъ образомъ: къ одной отнесемъ всякое число низшей послѣдовательности и всякое число, которое меньше его, къ другой же всякое число высшей послѣдовательности и всякое число, которое больше его. Образованіе такихъ двухъ совокупностей и должно дать сѣченіе, такъ какъ каждое число первой совокупности меньше каждаго изъ чиселъ второй, какъ это явствуетъ непосредственно изъ условія образованія совокупностей, и такъ какъ при этомъ *каждому* раціональному числу указано мѣсто или въ первой изъ нихъ или во второй, какъ видно изъ слѣдующаго разсужденія.

Если возьмемъ какое-либо число первой совокупности a_n и число второй совокупности a'_n, то кромѣ нихъ размѣщенными по этимъ совокупностямъ будутъ уже всѣ раціональныя числа, которыя меньше a_n, и всѣ раціональныя числа, которыя больше a'_n, и остается еще только указать мѣсто раціональнымъ числамъ, находящимся между a_n и a'_n. Но эти числа a_n и a_n' могутъ быть всегда, согласно предположенію, выбраны такъ, что будетъ
$$a_n' - a_n < \varepsilon .$$

какъ бы мало ни было число ε по абсолютной величинѣ своей. Поэтому въ концѣ концовъ остается только одно вещественное число, относительно котораго можетъ быть сказано, что оно лежитъ между числами первой и второй последовательностей, слѣдовательно, и между числами первой и второй совокупностей, такъ какъ всѣ числа, лежащія между ними, должны быть равны между собою по теоремѣ, доказанной въ § 206. Если это упомянутое вещественное число раціонально, то, согласно опредѣленію раціональнаго сѣченія, оно образуетъ третій классъ, а первая и вторая совокупности первый и второй классы сѣченія, которому это раціональное число соотвѣтствуетъ. Если же упомянутое вещественное число ирраціонально, то всѣ раціональныя числа оказываются распредѣленными разсмотрѣннымъ образованіемъ совокупностей на два класса, другими словами, оказывается произведеннымъ сѣченіе, которымъ упомянутое ирраціональное число опредѣляется.

Такъ мы видимъ, что дѣйствительно парою сходящихся послѣдовательностей опредѣляется сѣченіе, которое можетъ быть и раціональнымъ и ирраціональнымъ *).

§ 211. **Признакъ, что всѣ раціональныя числа распредѣлены по классамъ.** Нерѣдко приходится, какъ это дѣлалось при доказательствѣ послѣдней теоремы, при распредѣленіи раціональныхъ чиселъ по классамъ рѣшать вопросъ, *всѣмъ ли* раціональнымъ числамъ указано мѣсто въ нижней и верхней областяхъ и не остаются ли еще такія раціональныя числа, которымъ условіями распредѣленія указываются еще мѣста въ нѣкоторой средней области. Въ такихъ случаяхъ удобно пользоваться предложеніемъ, дающимъ признакъ того, что такой средней области нѣтъ. Оно получается какъ непосредственное слѣдствіе изъ упомянутыхъ разсужденій въ доказательствѣ послѣдней теоремы и гласитъ:

Слѣдствіе. Двѣ совокупности раціональныхъ чиселъ составляютъ нижнюю и верхнюю области сѣченія и называются *соприкасающимися*, если обладаютъ слѣдующими свойствами:

1) имѣются въ одной изъ нихъ (нижней) такія числа a и въ другой (верхней) такія числа a', что ихъ разность $a'-a$ можетъ оказаться меньше всякаго произвольно заданнаго раціональнаго числа ε, какъ бы мало оно ни было по абсолютной величинѣ своей;

---

*) Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что ирраціональное число можно опредѣлить также посредствомъ пары сходящихся послѣдовательностей.

Существуютъ теоріи ирраціональныхъ чиселъ, основанныя исключительно на понятіи о послѣдовательностяхъ.

2) первая совокупность содержитъ всѣ раціональныя числа, которыя меньше a, вторая всѣ раціональныя числа, которыя больше a'.

Примѣчаніе. Вслѣдствіе второго изъ этихъ свойствъ каждое число первой совокупности будетъ меньше каждаго числа второй.

§ 212. **Значеніе непеdonперіодической безконечной десятичной дроби.** Такая дробь можетъ считаться данною только въ томъ случаѣ, если извѣстенъ способъ вычисленія каждой изъ ея цыфръ Такъ, напр., должны считаться данными безконечныя десятичныя дроби, являющіяся приближенными значеніями ирраціональныхъ корней, потому что можетъ быть вычислено любое количество цыфръ ихъ, а потому и каждая указанная цыфра, напр., 4-я или 9-я послѣ запятой и т. п.

Если же вообще десятичная дробь въ упомянутомъ смыслѣ дана, то прервавъ вычисленіе ея на любой цыфрѣ, мы получимъ приближенное значеніе ея съ недостаткомъ, чрезъ повышеніе же этой послѣдней цыфры на 1 приближенное значеніе ея съ избыткомъ. Такъ можетъ быть вычисленъ неограниченный рядъ десятичныхъ дробей, выражающихъ значеніе безконечной дроби приближенно съ недостаткомъ, и изъ него чрезъ повышеніе на 1 послѣдней цыфры каждой принадлежащей къ нему дроби соотвѣтственный рядъ приближенныхъ значеній ея съ избыткомъ. Въ данной десятичной дроби число цыфръ послѣ запятой предположено безконечнымъ, т. е. такимъ, что послѣ каждой послѣдней цыфры можетъ быть вычислена еще одна, которая дѣлаетъ приближенное съ недостаткомъ значеніе больше предыдущаго такого же, а приближенное съ избыткомъ значеніе меньше такого же предыдущаго. Потому разность между двумя приближенными значеніями, имѣющими одинаковое число цыфръ послѣ запятой, можетъ быть сдѣлана произвольно малою [§ 206].

Слѣдовательно, оба описанныхъ ряда приближенныхъ значеній составляютъ пару сходящихся послѣдовательностей, а послѣдними опредѣляется сѣченіе, которому соотвѣтствуетъ данная дробь [§ 210].

Но такъ какъ данная дробь непеіодическая, всякая же обыкновенная дробь можетъ равняться только или конечной десятичной дроби или періодической, то упомянутое сѣченіе можетъ быть только ирраціональнымъ.

Опредѣленное же имъ ирраціональное число и есть точное значеніе данной безконечной непеіодической десятичной дроби.

Примѣры.

1) Безконечная десятичная дробь

$$0{,}358335588333555888\ldots,$$

въ которой послѣ запятой стоятъ сначала цыфры 3, 5 и 8, затѣмъ тѣ же цыфры по два раза каждая, затѣмъ онѣ же, но по три раза каждая, а потомъ по четыре раза каждая и т. д. безъ конца, должна быть, на основаніи всего изложеннаго въ послѣднемъ параграфѣ, ирраціональнымъ числомъ.

2) Равнымъ образомъ должна быть ирраціональнымъ числомъ безконечная десятичная дробь

5,251256253125...

въ которой передъ запятою стоитъ 5, послѣ же запятой написаны подъ рядъ цыфры, которыми пишутся 5^2, 5^3, 5^4 и т. д.

3) Если способомъ, описаннымъ въ этомъ параграфѣ, произведемъ сѣченіе при помощи послѣдовательностей:

0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; ...

и

0,4; 0,34; 0,334; 0,3334; ...,

которыя образуются приближенными значеніями періодической дроби 0,(3), то оно будетъ раціонально и имъ будетъ опредѣлено число $\frac{1}{3}$.

§ 213. **Дѣйствія надъ ирраціональными числами.** Послѣ всякаго новаго расширенія понятія о числѣ, другими словами, всякій разъ послѣ того, какъ вводились новыя числа, мы расширяли и понятіе объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ, распространяя понятія о сложеніи, вычитаніи, умноженіи и т. д. и на эти новыя числа. Тотъ же шагъ намъ предстоитъ сдѣлать и теперь, т. е. распространить понятія объ этихъ дѣйствіяхъ и на ирраціональныя числа; и это можетъ быть сдѣлано теперь на основаніи понятій, введенныхъ и разсмотрѣнныхъ въ предыдущихъ параграфахъ этой главы, и на основаніи теоремъ, тамъ доказанныхъ.

При этомъ логично будетъ соблюдать такой порядокъ:

Сначала нужно будетъ всякій разъ показать, какому сѣченію соотвѣтствуетъ результатъ дѣйствія, произведеннаго надъ *раціональными* числами, опредѣленными сѣченіями, а затѣмъ тѣмъ же сѣченіемъ *опредѣлить* и результатъ такого же дѣйствія надъ ирраціональными числами.

При такомъ порядкѣ введенія дѣйствій надъ ирраціональными числами одно и то же предложеніе будетъ теоремою для раціональныхъ чиселъ и опредѣленіемъ для чиселъ ирраціональныхъ.

§ 214. **Сложеніе раціональныхъ чиселъ, опредѣленныхъ сѣченіями.**

Теорема. Сумма раціональныхъ чиселъ (A, A') и (B, B') равна числу $(A+B, A'+B')$, гдѣ $A+B$ означаетъ совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ, которыя могутъ получиться отъ сложенія любого числа a класса A съ любымъ числомъ b класса B, и $A'+B'$ означаетъ совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ, которыя могутъ получиться отъ сложенія любого числа a' класса A' съ любымъ числомъ b' класса B'.

Предп. $\alpha=(A, A')$ и $\beta=(B, B')$ раціональныя числа.

Утв. $(A, A')+(B, B')=(A+B, A'+B')$.

Док. По теоремѣ въ § 199 должны существовать въ классахъ A, A', B и B' соотвѣтственно такія числа a_k, a_k', b_k и b_k', что

$$a'_k-a_k<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$b'_k-b_k<\frac{\varepsilon}{2}$$

Слагая эти неравенства, мы находимъ:

$$(a'_k+b'_k)-(a_k+b_k)<\varepsilon,$$

гдѣ ε означаетъ произвольно малое раціональное число [§ 206].

Если мы съ такимъ числомъ a_k сложимъ число b_k и каждое раціональное число, которое меньше его, то получимъ всѣ раціональныя числа, которыя меньше a_k+b_k. Напр., произвольное число c, которое меньше a_k+b_k, мы получимъ, сложивъ a_k съ $c-a_k$, при чемъ $c-a_k$ будетъ меньше b_k, что узнается по теоремѣ 1 въ § 50, если отъ обѣихъ частей неравенства $c<a_k+b_k$ отнимемъ по a_k.

Равнымъ образомъ, если мы съ числомъ a'_k сложимъ число b'_k и каждое раціональное число, которое больше его, то получимъ всѣ раціональныя числа, которыя больше $a'_k+b'_k$.

Изъ доказанныхъ свойствъ чиселъ a_k+b_k и $a_k'+b_k'$ слѣдуетъ, по теоремѣ, приведенной въ § 211 какъ слѣдствіе, что совокупности $A+B$ и $A'+B'$ образуютъ нижнюю и верхнюю области сѣченія.

Произведя же сложеніе (оно допустимо, такъ какъ α и β предположены раціональными числами) неравенствъ

$$a<\alpha<a'$$
$$b<\beta<b'$$

и получивъ: $$a+b<\alpha+\beta<a'+b'.$$

мы, по опредѣленію раціональнаго сѣченія, узнаемъ, что сѣченію, въ которомъ первый классъ $A+B$ и второй $A'+B'$, соотвѣтствуетъ число $\alpha+\beta$. А это въ знакахъ и выражено въ утвержденіи, и это и требовалось доказать.

§ 215. Сложеніе ирраціональныхъ чиселъ. Та часть послѣдняго доказательства, которою разъясняется, что совокупности раціональныхъ чиселъ $A+B$ и $A'+B'$ образуютъ нижнюю и верхнюю области сѣченія, осталась бы въ силѣ и въ томъ случаѣ, если бы оба числа α и β или одно изъ нихъ были ирраціональны. Слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ образованіемъ совокупностей $A+B$ и $A'+B'$ было бы произведено сѣченіе. Оно естественнымъ образомъ [§ 213] и должно послужить опредѣленіемъ того

числа, которое мы будемъ называть суммою двухъ ирраціональныхъ чиселъ или суммою раціональнаго и ирраціональнаго числа. Поэтому мы получимъ опредѣленіе такой суммы, если въ послѣдней теоремѣ первыя слова замѣнимъ слѣдующими: «суммою чиселъ (A, A') и (B, B'), изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одно ирраціонально, называется число $(A+B, A'+B')$, въ которомъ» и т. д. Но мы предпочтемъ этой формулировкѣ слѣдующую болѣе краткую, но вполнѣ ей равносильную:

Опредѣленіе. Суммою двухъ ирраціональныхъ чиселъ α и β или двухъ вещественныхъ чиселъ α и β, изъ которыхъ одно ирраціональное, называется число, которое больше каждой суммы двухъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно меньшихъ чѣмъ α и β, и которое меньше каждой суммы двухъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно большихъ чѣмъ α и β.

Слѣдствіе. И въ случаѣ ирраціональности чиселъ α и β—обоихъ или одного изъ нихъ—мы имѣемъ право заключать, что

$$\begin{array}{lll} \text{если} & a<\alpha & \\ \text{и} & b<\beta & \\ \hline \text{то} & a+b<\alpha+\beta & \end{array} \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{ll} \text{если} & a'>\alpha \\ \text{и} & b'>\beta \\ \hline \text{то} & a'+b'>\alpha+\beta. \end{array}$$

На основаніи этой теоремы и понятія о неравенствѣ ирраціональныхъ чиселъ легко доказывается слѣдующее предложеніе:

Слѣдствіе. Для всякихъ вещественныхъ чиселъ остается въ силѣ, что

$$\begin{array}{ll} \text{если} & \alpha>\beta \\ \text{и} & \gamma>\delta \\ \hline \text{то} & \alpha+\gamma>\beta+\delta. \end{array}$$

§ 216. **Сложеніе нѣсколькихъ вещественныхъ чиселъ.** Назовемъ S и S′ области раціональныхъ чиселъ, которыя въ послѣднихъ двухъ параграфахъ мы называли $A+B$ и $A'+B'$, и обозначимъ буквою σ число (S, S′), тогда, конечно, будетъ

$$\sigma=\alpha+\beta.$$

Число же σ можетъ быть по правиламъ, изложеннымъ въ названныхъ двухъ параграфахъ, сложено съ любымъ вещественнымъ числомъ

$$\gamma=(C, C'),$$

при чемъ результатомъ сложенія получится число, которое можетъ быть обозначено символомъ $(\mathrm{S}+C, \mathrm{S}'+C')$, значеніе котораго понятно изъ пре-

дыдущаго и безъ объясненій. Тѣмъ же способомъ можно было бы къ этой суммѣ прибавить еще одно вещественное число и т. д.

Такъ мы видимъ, что на основаніи *послѣдняго* опредѣленія можетъ быть произведено сложеніе произвольнаго количества чиселъ ирраціональныхъ и раціональныхъ.

§ 217. **Теорема.** И для ирраціональныхъ чиселъ остается въ силѣ **перемѣстительный законъ сложенія.**

Предп. Изъ чиселъ $\alpha=(A, A')$ и $\beta=(B, B')$ по крайней мѣрѣ одно ирраціонально.

Утв. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

Док. Пользуясь тѣми же обозначеніями, которыя мы примѣняли въ § 203, и на основаніи опредѣленія сложенія ирраціональныхъ чиселъ [§ 215] мы имѣемъ:

$$\alpha+\beta=(A+B,\ A'+B')$$
$$\beta+\alpha=(B+A,\ B'+A').$$

Но такъ какъ

$$a+b=b+a$$
$$a'+b'=b'+a',$$

то сѣченія, которыми опредѣляются числа $(A+B,\ A'+B')$ и $(B+A,\ B'+A')$, тождественны. Слѣдовательно, по опредѣленію равенства ирраціональныхъ чиселъ [§ 204] и по теоремѣ VI,

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

§ 218. **Теорема.** И для ирраціональныхъ чиселъ остается въ силѣ **сочетательный законъ сложенія.**

Предп. Изъ чиселъ $\alpha=(A, A')$, $\beta=(B, B')$, $\gamma=(C, C')$ по крайней мѣрѣ одно ирраціонально.

Утв. $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma=(\alpha+\gamma)+\beta$.

Док. Пользуясь символомъ, который мы примѣняли для опредѣленія суммы двухъ вещественныхъ чиселъ [§ 215], и обозначеніями, введенными въ § 203, мы имѣемъ:

$$\alpha+(\beta+\gamma)=[A+(B+C),\ A'+(B'+C')]$$
$$(\alpha+\beta)+\gamma=[(A+B)+C,\ (A'+B')+C']$$
$$(\alpha+\gamma)+\beta=[(A+C)+B,\ (A'+C')+B'].$$

Но такъ какъ, по теоремѣ 7,

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$$

и равнымъ образомъ

$$a' + (b' + c') = (a' + b') + c' = (a' + c') + b',$$

то сѣченія, которыми опредѣляются суммы $\alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha + \beta) + \gamma$ и $(\alpha + \gamma) + \beta)$ тождественны. А потому эти суммы равны, т. е.,

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) + \beta.$$

§ 219. **Теорема.** И въ томъ случаѣ, когда α ирраціональное число,

$$\alpha + 0 = \alpha.$$

Док. Назвавъ, какъ въ § 195, P совокупность всѣхъ раціональныхъ положительныхъ чиселъ и N совокупность всѣхъ раціональныхъ отрицательныхъ чиселъ, мы имѣемъ:

$$0 = (N, P).$$

Слагая же 0 съ ирраціональнымъ числомъ

$$\alpha = (A, A'),$$

мы, по правилу, изложенному въ §§ 214 и 215, и пользуясь введеннымъ тамъ обозначеніемъ, получаемъ:

$$\alpha + 0 = (A + N, A' + P).$$

Но такъ какъ каждое число n класса N отрицательно, то каждое число $a + n$ класса $A + N$ должно быть меньше числа a класса A и потому принадлежать къ классу A. А такъ какъ каждое число p класса P положительно, то каждое число $a' + p$ класса $A' + P$, будучи больше a', должно принадлежать къ классу A'. На основаніи же разсужденій, предпосланныхъ опредѣленію въ § 215 (или же признака, приведеннаго въ § 211), $A + N$ и $A' + P$ образуютъ нижнюю и верхнюю области сѣченія. Слѣдовательно, области A и $A + N$ тождественны и равнымъ образомъ тождественны области A' и $A' + P$.

А изъ этого и слѣдуетъ, что

$$\alpha + 0 = \alpha.$$

§ 220 **Равныя и противоположныя ирраціональныя числа.** Введя въ § 201 понятіе объ отрицательныхъ, слѣдовательно, и относительныхъ ирраціональныхъ числахъ, мы должны на нихъ распространить свойства раціональныхъ относительныхъ чиселъ, чтобы сдѣлать ихъ примѣнимыми совершенно наравнѣ съ послѣдними. Такъ, нужно разъяснить, какъ можетъ быть распространено на ирраціональныя числа понятіе о равныхъ и противоположныхъ числахъ.

Мы его вводимъ слѣдующимъ образомъ:

Обозначенія. $-A$ и $-A'$ назовемъ совокупности всѣхъ чиселъ равныхъ и противоположныхъ соотвѣтственно числамъ нижней и верхней области сѣченія A/A'.

Теорема 1. Совокупности $-A$ и $-A'$ составляютъ верхнюю и нижнюю области сѣченія.

Док. Классы A и A' составляютъ вмѣстѣ совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ, состоящую изъ совокупности всѣхъ положительныхъ чиселъ и совокупности всѣхъ отрицательныхъ чиселъ. Эти послѣднія двѣ совокупности чрезъ перемѣну знаковъ предъ числами, составляющими ихъ, переходятъ одна въ другую. Потому и совокупности $-A$ и $-A'$ составляютъ вмѣстѣ совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ.

А такъ какъ изъ неравенства

$$a<a'$$

слѣдуетъ [§ 35], что

$$a> a'.$$

то каждое число совокупности $-A'$ должно быть меньше каждаго числа совокупности $-A$.

Слѣдовательно, совокупности $-A'$ и $-A$ обладаютъ всѣми свойствами нижней и верхней области сѣченія, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Вещественное число

$$\alpha=(A,\ A')$$

и число

$$\alpha'=(-A',-A)$$

при сложеніи взаимно уничтожаются.

Док. Слагая числа α и α' по правиламъ, изложеннымъ въ §§ 214 и 215, мы получаемъ:

$$\alpha+\alpha'=(A+(-A'),\ A'+(-A)).$$

Не трудно убѣдиться, что въ результатѣ этого сложенія классъ $A+(-A')$ состоитъ исключительно изъ отрицательныхъ чиселъ и классъ $A'+(-A)$ исключительно изъ положительныхъ чиселъ.

И въ самомъ дѣлѣ, если въ классѣ A имѣются только отрицательныя числа, то таковыя должны содержаться и въ классѣ A' (въ противномъ случаѣ было бы $\alpha=0$), и послѣднія, будучи больше чиселъ класса A' должны быть по абсолютной величинѣ меньше чиселъ этого послѣдняго. Въ классѣ $-A'$ названныя отрицательныя числа дѣлаются положительными, но по упомянутымъ причинамъ каждое изъ нихъ при сложеніи съ любымъ изъ чиселъ класса A дастъ отрицательную сумму. Положительныя же числа класса A' въ классѣ $-A'$ всѣ дѣлаются отрицательными и потому также каждое изъ нихъ при сложеніи съ любымъ числомъ класса A дастъ сумму отрицательную.

Совершенно такъ же, какъ мы доказали, что классъ $A+(-A')$ содержитъ только отрицательныя числа, доказывается, что къ классу $A'+(-A)$ принадлежатъ только положительныя числа. Сѣченію же, которымъ всѣ раціональныя числа раздѣляются на такіе два класса, соотвѣтствуетъ только число 0 [§ 195].

Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ

$$\alpha+\alpha'=0.$$

Ясно, что въ случаѣ раціональности числа α число α' будетъ то же самое, которое мы всегда называли $-\alpha$ и которое означаетъ отрицательное число въ томъ случаѣ, когда α положительное или абсолютное число, и положительное число въ томъ случаѣ, когда α отрицательно. Вслѣдствіе этого доказанною теоремою дается указаніе, что понятіе, составляющее заглавіе этого параграфа, слѣдуетъ ввести въ слѣдующемъ смыслѣ:

Опредѣленіе. Подъ числомъ $-\alpha$, равнымъ и противоположнымъ ирраціональному числу $\alpha=(A, A')$, должно понимать число $(-A', -A)$.

Примѣчаніе.

Способомъ образованія сѣченія A'/A обусловливается, что вмѣстѣ съ α и $-\alpha$ должно быть ирраціональнымъ числомъ.

Слѣдствіе. И для ирраціональныхъ чиселъ остается въ силѣ, что

$$(+\alpha)+(-\alpha)=0$$
$$(-\alpha)+(+\alpha)=0.$$

§ 221. Законъ непрерывности въ примѣненіи къ сложенію ирраціональныхъ чиселъ. Ниже мы доказываемъ для сложенія, а позднѣе докажемъ и для другихъ дѣйствій, что результатъ какого-либо дѣйствія или какихъ-либо дѣйствій надъ ирраціональными числами можетъ быть вычисленъ съ такою точностью, какая только будетъ желательна, чрезъ выполненіе тѣхъ же дѣйствій надъ приближенными значеніями этихъ ирраціональныхъ чиселъ, если только послѣднія будутъ вычислены или даны съ достаточною для этой цѣли точностью.

Возможность вычисленія такимъ способомъ приближеннаго съ требуемою точностью результата дѣйствій надъ ирраціональными числами и достиженія тѣмъ лучшаго приближенія къ нему, чѣмъ точнѣе берутся приближенныя значенія этихъ ирраціональныхъ чиселъ, обозначается названіемъ закона непрерывности.

Для сложенія онъ выражается въ слѣдующемъ предложеніи:

Теорема. Къ суммѣ нѣсколькихъ ирраціональныхъ (или вообще вещественныхъ) чиселъ можно приблизиться на сколько угодно, слагая приближенныя значенія ихъ.

Док. Если назовемъ $a, b, c, \ldots, n$ нѣкоторыя приближенныя съ недостаткомъ и соотвѣтственно $a', b', c', \ldots, n'$ нѣкоторыя приближенныя съ избыткомъ значенія ирраціональныхъ (или вообще вещественныхъ) чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$, то первый рядъ приближенныхъ значеній будетъ принадлежать къ нижнимъ областямъ сѣченій, опредѣляющихъ названныя ирраціональныя числа, а послѣдній рядъ къ верхнимъ областямъ.

Изъ этого мы заключаемъ слѣдующее:

Во-первыхъ, разности $a'-a$, $b'-b$, $c'-c$ …, $n'-n$ могутъ быть сдѣланы каждая произвольно малою, напр., меньше такой части ε, сколько дано чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$, а потому можетъ быть сдѣлана разность

$$(a'+b'+c'+\ldots+n')-(a+b+c+\ldots+n)<\varepsilon,$$

какъ бы ε ни было мало по своей абсолютной величинѣ.

Во-вторыхъ,

$$\begin{aligned} a &< \alpha < a' \\ b &< \beta < b' \\ c &< \gamma < c' \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ n &< \nu < n' \end{aligned}$$

—{Слѣдовательно, по теоремѣ, приведенной въ § 215 какъ первое слѣдствіе:

$$a+b+c+\ldots+n<\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu<a'+b'+c'+\ldots+n'.$$

Въ третьихъ, если бы мы въ суммѣ $a+b+c+\ldots+n$ одно или нѣсколько слагаемыхъ замѣнили соотвѣтственными слагаемыми изъ суммы $a'+b'+c'+\ldots+n'$ или наоборотъ, то въ обоихъ случаяхъ получили бы сумму, заключенную между $a+b+c+\ldots+n$ и $a'+b'+c'+\ldots+n'$.

А эти заключенія и имѣютъ вмѣстѣ тотъ смыслъ, что сумму ирраціональныхъ (или вообще вещественныхъ) чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ можно вычислить съ точностью до ε [§ 207] чрезъ сложеніе (безразлично какого рода) приближенныхъ значеній ихъ.

Примѣръ.

Если бы требовалось вычислить

$$\sqrt[3]{7}+\sqrt{2}$$

съ точностью до $\frac{1}{1000}$, то недостаточно было бы вычислить только 3 цыфры послѣ занятой для каждаго изъ этихъ корней, такъ какъ въ такомъ случаѣ мы имѣли бы:

$$\begin{array}{c} 1{,}912<\sqrt[3]{7}<1{,}913 \\ 1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415 \\ \hline 3{,}326<\sqrt[3]{7}+\sqrt{2}<3{,}328, \end{array}$$

слѣдовательно, вычисленіе было бы произведено съ точностью только до $\frac{2}{1000}=\frac{1}{500}$. А потому, чтобы удовлетворить требованію, нужно было бы вычислить для каждаго изъ корней еще четвертую цыфру послѣ занятой. Тогда получилось бы:

$$\begin{array}{c} 1{,}9129<\sqrt[3]{7}<1{,}9130 \\ 1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143 \\ \hline 3{,}3271<\sqrt[3]{7}+\sqrt{2}<3{,}3273. \end{array}$$

Отсюда видно, что дробь 3,327 выразила бы ирраціональное число $\sqrt[3]{7}+\sqrt{2}$ съ точностью до $\frac{2}{10000}=\frac{1}{5000}$, слѣдовательно, уже съ большею точностью, чѣмъ требовалось.

§ 222. Вычитаніе ирраціональныхъ чиселъ. По теоремѣ, приведенной въ § 220 какъ слѣдствіе,

$$\beta+(-\beta)=0,$$

по теоремѣ же, доказанной въ § 219,

$$\alpha+0=\alpha.$$

Слѣдовательно,

$$\alpha+[\beta+(-\beta)]=\alpha.$$

По сочетательному же закону сложенія [§ 218]

$$\alpha+[\beta+(-\beta)]=[\alpha+(-\beta)]+\beta.$$

Сравнивая послѣднія два равенства, мы видимъ, что

$$[\alpha+(-\beta)]+\beta=\alpha.$$

То есть, $\alpha+(-\beta)$ оказывается числомъ, которое, будучи сложено съ β, даетъ α.

Такъ мы видимъ, что *и въ томъ случаѣ, когда числа α и β оба или одно изъ нихъ ирраціональны, всегда можетъ быть найдено число, которое, будучи сложено съ β, дастъ α.*

Естественно его обозначить символомъ

$$\alpha-\beta$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ ввести понятіе о вычитаніи ирраціональныхъ и вообще вещественныхъ чиселъ.

Изъ изложеннаго мы заключаемъ, 1) что опредѣленіе **17** примѣнимо безъ измѣненія и какъ опредѣленіе вычитанія ирраціональныхъ и вообще вещественныхъ чиселъ, и 2), что правило вычитанія **30** остается въ силѣ и для ирраціональныхъ чиселъ.

Особенно важно отмѣтить, что для всѣхъ вообще вещественныхъ чиселъ остаются въ силѣ равенства:

Опредѣленіе: $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$

Слѣдствіе: $(\alpha+\beta)-\beta=\alpha.$

На основаніи ихъ всѣ теоремы, относящіяся къ вычитанію, а также къ сложенію и вычитанію раціональныхъ чиселъ, сохраняютъ свою силу и для ирраціональныхъ чиселъ, такъ какъ доказательства названныхъ теоремъ основываются на этихъ равенствахъ.

§ 223. **Знакъ разности двухъ вещественныхъ чиселъ.** И для ирраціональныхъ чиселъ остается справедливою также слѣдующая истина:

Теорема. $\alpha-\beta \gtreqless 0$, смотря по тому, будетъ ли $\alpha \gtreqless \beta$.

Предп. α и β вещественныя числа.

$$\alpha \gtreqless \beta.$$

Утв. $\alpha-\beta \gtreqless 0$

Док. Воспользуемся при доказательствѣ этой теоремы обозначеніями, введенными въ § 203, и примѣнимъ символы B и $-B'$ въ смыслѣ, въ которомъ они примѣнялись въ § 220.

Въ такомъ случаѣ, разсматривая разность $\alpha-\beta$ какъ число, опредѣленное сѣченіемъ, мы имѣемъ:

$$\alpha-\beta=(A+(-B'), A'+(-B)),$$

вслѣдствіе чего должно быть

$$a'-b>a-b'.$$

Но по опредѣленію неравенства ирраціональныхъ чиселъ, справедливаго и для раціональныхъ чиселъ [§ 204],

$$\alpha>\beta,$$

если существуютъ числа a и b' такого свойства, что

$$a=b',$$

и

$$\alpha<\beta.$$

если существуютъ числа a' и b такого свойства, что

$$a'=b.$$

Слѣдовательно, только въ первомъ изъ этихъ случаевъ можетъ получиться разность $a-b'$ равная нулю и только во второмъ разность $a'-b$ равная нулю, изъ чего мы заключаемъ, что 0 можетъ принадлежать къ нижней области упомянутаго сѣченія только при условіи, что $\alpha>\beta$, и къ верхней только при условіи, что $\alpha<\beta$. Другими словами, только при первомъ изъ этихъ условій [§ 201] можетъ быть

$$\alpha-\beta>0$$

и только при второмъ

$$\alpha-\beta<0.$$

Что же касается случая, когда

$$\alpha = \beta,$$

то, на основаніи опредѣленія равенства ирраціональныхъ чиселъ (справедливаго для всякихъ вещественныхъ чиселъ), при этомъ условіи всегда будетъ

$$a' > b$$

и

$$a < b',$$

слѣдовательно, разность $a - b'$ всегда отрицательною, а разность $a' - b$ всегда положительною. Другими словами, въ послѣднемъ случаѣ въ сѣченіи, которымъ опредѣляется разность $\alpha - \beta$, нижняя область будетъ состоять исключительно изъ отрицательныхъ чиселъ, верхняя же исключительно изъ положительныхъ. А это значитъ [§ 195], что сѣченіе въ этомъ случаѣ производится числомъ 0, т. е., что

$$\alpha - \beta = 0.$$

Важное слѣдствіе изъ доказанной теоремы.

На основаніи доказанной теоремы дѣлается примѣнимымъ и къ ирраціональнымъ числамъ изложенный въ § 48 способъ указанія неравенства двухъ чиселъ при помощи равенства. Вмѣстѣ же съ этимъ пріобрѣтаютъ силу вообще для всѣхъ вещественныхъ чиселъ всѣ теоремы о дѣйствіяхъ надъ неравенствами, по мѣрѣ того, какъ понятія о дѣйствіяхъ распространяются и на ирраціональныя числа.

§ 224. **Законъ непрерывности въ примѣненіи къ вычитанію ирраціональныхъ чиселъ.**

Теорема. Къ разности двухъ ирраціональныхъ (или вообще вещественныхъ) чиселъ, можно приблизиться на сколько угодно, вычитая приближенныя значенія ихъ.

Док. Такъ какъ [§ 222]

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

то утверждаемая истина оказывается уже доказанною вмѣстѣ съ теоремою въ § 221.

Примѣръ.

Вычислить

$$\sqrt{17} - \sqrt[3]{5}$$

съ точностью до $\frac{1}{10^7}$.

§ 225. **Умноженіе раціональныхъ чиселъ, опредѣленныхъ сѣченіями.** Слѣдуя порядку, установленному въ § 213, мы, приступая къ введенію умноженія ирраціональныхъ чиселъ другъ на друга, должны предварительно выяснить, чему равно произведеніе раціональныхъ чиселъ, данныхъ посредствомъ сѣченій. Изслѣдованіе же этого вопроса въ сильной степени упрощается, если сначала разсмотрѣть умноженіе абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ.

Потому мы начинаемъ съ доказательства слѣдующаго предложенія.

Теорема. Произведеніе абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ (A, A') и (B, B') другъ на друга равно числу $(AB, A'B')$, гдѣ AB означаетъ совокупность всѣхъ абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ, которыя могутъ получиться отъ умноженія любого числа a класса A на любое число b класса B, и $A'B'$ означаетъ совокупность всѣхъ абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ, которыя могутъ получиться отъ умноженія любого числа a' класса A' на любое число b' класса B'.

Предп. $\alpha=(A, A')$ и $\beta=(B, B')$ абсолютныя раціональныя числа

Утв. $(A, A') \cdot (B, B')=(AB, A'B')$.

Док. Доказывая эту теорему, необходимо помнить, что согласно предположенію области A, B, A', B', слѣдовательно, и AB и $A'B'$ содержатъ только абсолютныя раціональныя числа, и что области A и A' вмѣстѣ составляютъ совокупность всѣхъ такихъ чиселъ, такъ же, какъ и области B и B' вмѣстѣ.

По теоремѣ въ § 199 должны существовать въ классахъ A, A', B и B' соотвѣтственно такія числа a_k, a'_k, b_k и b'_k, что разности $a'_k - a_k$ и $b'_k - b_k$ могутъ быть меньше всякаго абсолютнаго раціональнаго числа, какъ бы мало оно ни было. Если эти разности назовемъ η и ξ, то, по опредѣленію **17**, будетъ

$$a'_k = a_k + \eta$$
$$b'_k = b_k + \xi$$

Перемноживъ же эти равенства между собою, мы, по теор. VII, заключаемъ, что должно быть:

$$a'_k b'_k = a_k b_k + a_k\xi + b_k\eta + \eta\xi$$

и потому

$$a'_k b'_k - a_k b_k = a_k\xi + b_k\eta + \eta\xi$$

Упомянутыя выше условія относительно ξ и η всегда могутъ быть выполнены, если мы положимъ

$$\xi = \frac{1}{a_k n}$$
$$\eta = \frac{1}{b_k n}$$

такъ какъ число n всегда можно выбрать достаточно для этого большимъ. Если притомъ его выбрать на столько большимъ, что дробь $\frac{\left(\frac{1}{a_k b_k}\right)}{n}$ будетъ правильною, то разность $a'_k b'_k - a_k b_k$ будетъ меньше $\frac{3}{n}$, такъ какъ въ такомъ случаѣ будетъ

$$a'_k b'_k - a_k b_k = a_k \cdot \frac{1}{a_k n} + b_k \cdot \frac{1}{b_k n} + \frac{1}{a_k n} \cdot \frac{1}{b_k n}$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{\left(\frac{1}{a_k b_k}\right)}{n^2}$$
$$= \frac{2 + \frac{\left(\frac{1}{a_k b_k}\right)}{n}}{n}.$$

Слѣдовательно, при достаточно большомъ n можно и въ самомъ дѣлѣ сдѣлать разность

$$a'_k b'_k - a_k b_k < \frac{3}{n}.$$

Если же мы $\frac{3}{n}$ назовемъ ε, то оказывается, что всегда можетъ быть достигнуто, чтобы было

$$a'_k b'_k - a_k b_k < \varepsilon,$$

какъ бы мало ни было абсолютное число ε.

Если мы такое число a_k умножимъ на число b_k и на каждое абсолютное раціональное число, которое меньше его, то получимъ всѣ раціональныя числа, которыя меньше $a_k b_k$. Напр., произвольное число c, которое меньше $a_k b_k$, мы получимъ, умноживъ a_k на $\frac{c}{a_k}$, при чемъ $\frac{c}{a_k}$ будетъ меньше b_k, что узнается по теоремѣ 1 въ § 79, если мы обѣ части неравенства $c < a_k b_k$ раздѣлимъ на a_k.

Такимъ же образомъ доказывается, что если мы число a'_k умножимъ на число b'_k и на каждое раціональное число, которое больше его, то получимъ всѣ раціональныя числа, которыя больше $a'_k b'_k$.

Изъ доказанныхъ же свойствъ чиселъ $a_k b_k$ и $a'_k b'_k$ слѣдуетъ, по теоремѣ, приведенной въ § 211 какъ слѣдствіе, что совокупности AB и $A'B'$ образуютъ нижнюю и верхнюю области сѣченія.

Произведя же умноженіе (оно допустимо, такъ какъ α и β предположены раціональными числами) неравенствъ

$$\begin{array}{c} a < \alpha < a' \\ b < \beta < b' \\ \hline ab < \alpha\beta < a'b', \end{array}$$

и получивъ:

мы, по опредѣленію раціональнаго сѣченія, узнаемъ, что сѣченію, въ которомъ первый классъ AB и второй $A'B'$, соотвѣтствуетъ число $\alpha\beta$. А это въ знакахъ и выражено въ утвержденіи, и это и требовалось доказать.

§ 226. **Умноженіе абсолютныхъ ирраціональныхъ чиселъ.** Та часть послѣдняго доказательства, которою разъясняется, что совокупности раціональныхъ чиселъ AB и $A'B'$ образуютъ нижнюю и верхнюю области сѣченія, осталась бы въ силѣ и въ томъ случаѣ, если бы оба числа α и β или одно изъ нихъ были ирраціональны. Слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ образованіемъ совокупностей AB и $A'B'$ было бы произведено сѣченіе. Согласно съ общимъ планомъ постепеннаго расширенія понятій объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ, это сѣченіе и должно послужить опредѣленіемъ того числа, которое мы будемъ называть произведеніемъ двухъ абсолютныхъ ирраціональныхъ чиселъ или произведеніемъ двухъ абсолютныхъ вещественныхъ чиселъ, изъ которыхъ одно раціональное, а другое ирраціональное.

Поэтому мы получимъ опредѣленіе такого произведенія, если въ послѣдней теоремѣ первыя слова замѣнимъ слѣдующими: «Произведеніемъ абсолютныхъ чиселъ (A, A') и (B, B'), изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одно ирраціонально, называется число $(AB, A'B')$, въ которомъ» и т. д. Но и тутъ, какъ при сложеніи, мы предпочтемъ этой формулировкѣ слѣдующую болѣе краткую, но вполнѣ ей равносильную:

Опредѣленіе. Произведеніемъ двухъ абсолютныхъ ирраціональныхъ чиселъ α и β или двухъ абсолютныхъ вещественныхъ чиселъ α и β, изъ которыхъ одно ирраціональное, называется число, которое больше каждаго произведенія двухъ абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно меньшихъ чѣмъ α и β, и которое меньше каждаго произведенія двухъ абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно бо́льшихъ чѣмъ α и β.

Слѣдствіе. И въ случаѣ ирраціональности абсолютныхъ (или положительныхъ,) чиселъ α и β—обоихъ или одного изъ нихъ—мы имѣемъ право заключать, что

$$\begin{array}{lll} \text{если } a<\alpha & \text{и} & \text{если } a'>\alpha \\ \text{и } \underline{b<\beta} & & \text{и } \underline{b'>\beta} \\ \text{то } ab<\alpha\beta & & \text{то } a'b'>\alpha\beta. \end{array}$$

На основаніи этой теоремы и понятія о неравенствѣ ирраціональныхъ чиселъ легко доказывается слѣдующее предложеніе:

Слѣдствіе. Для всякихъ абсолютныхъ вещественныхъ чиселъ остается въ силѣ, что

$$\begin{array}{l} \text{если } \alpha>\beta \\ \text{и } \gamma>\delta \\ \text{то } \alpha\gamma>\beta\delta. \end{array}$$

§ 227. **Произведеніе нѣсколькихъ абсолютныхъ вещественныхъ чиселъ.** Назовемъ T и T' области абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ, которыя мы въ послѣднихъ двухъ параграфахъ называли AB и $A'B'$, и обозначимъ число (T, T') буквою τ, тогда

$$\tau = \alpha\beta.$$

Такимъ же образомъ, какъ получено было произведеніе чиселъ α и β, можетъ быть умножено и число τ на любое абсолютное вещественное число

$$\gamma = (C, C'),$$

при чемъ результатомъ умноженія получится число $(TC, T'C')$, которое мы обозначаемъ такъ, пользуясь символомъ, объясненнымъ и примѣнявшимся въ предыдущихъ двухъ параграфахъ. Тѣмъ же способомъ можно было бы умножить это произведеніе еще на абсолютное вещественное число, новое произведеніе еще на одно и т. д.

Такъ можно перемножить сколько угодно абсолютныхъ вещественныхъ чиселъ между собою.

§ 228. **Умноженіе относительныхъ вещественныхъ чиселъ.** Введя умноженіе абсолютныхъ вещественныхъ чиселъ другъ на друга, мы можемъ приступить и къ введенію умноженія другъ на друга *относительныхъ* вещественныхъ чиселъ. При этомъ мы могли бы соблюсти тотъ же порядокъ, въ которомъ мы постепенно переходили въ главѣ IX отъ умноженія абсолютныхъ чиселъ къ умноженію между собою чиселъ относительныхъ. Но мы достигнемъ цѣли быстрѣе, если, сообразуясь съ конечнымъ достигнутымъ тамъ результатомъ, опредѣлимъ вводимое теперь умноженіе такъ:

Опредѣленіе. Умножить два относительныхъ вещественныхъ числа другъ на друга значитъ умножить другъ на друга ихъ абсолютныя значенія и это произведеніе снабдить знакомъ согласно правилу, которое должно быть соблюдаемо при умноженіи относительныхъ раціональныхъ чиселъ другъ на друга.

§ 229. **Теорема.** И для ирраціональныхъ чиселъ остается въ силѣ **перемѣстительный законъ умноженія.**

Предп. Изъ вещественныхъ относительныхъ чиселъ α и β по крайней мѣрѣ одно ирраціонально.

Утв. $\alpha\beta=\beta\alpha$.

Док. Обозначая абсолютныя значенія чиселъ α и β символами $|\alpha|$ и $|\beta|$ и произведенія чиселъ, опредѣленныхъ сѣченіями, символами, введенными въ § 225, мы, на основаніи опредѣленія умноженія абсолютныхъ ирраціональныхъ чиселъ [§ 226], имѣемъ:

$$|\alpha|\,.\,|\beta|=(AB,\ A'B')$$
$$|\beta|\,.\,|\alpha|=(BA,\ B'A').$$

Но такъ какъ

$$ab=ba$$
$$a'b'=b'a',$$

то сѣченія, которыми опредѣляются числа $(AB,\ A'B')$ и $(BA,\ B'A')$, тождественны. Слѣдовательно, по опредѣленію равенства ирраціональныхъ чиселъ [§ 204] и по теоремѣ VI,

$$|\alpha|\,.\,|\beta|=|\beta|\,.\,|\alpha|.$$

А такъ какъ знакъ произведенія **не зависитъ отъ порядка знаковъ** сомножителей, то и

$$\alpha\beta=\beta\alpha.$$

§ 230. **Теорема.** И для ирраціональныхъ чиселъ остается въ силѣ **сочетательный законъ умноженія.**

Предп. Изъ вещественныхъ относительныхъ чиселъ α, β и γ, по крайней мѣрѣ одно ирраціонально.

Утв. $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma=(\alpha\gamma)\beta$

Док. Пользуясь обозначеніями, введенными въ § 203, и символомъ, который мы примѣняли въ § 226 для опредѣленія произведенія двухъ вещественныхъ чиселъ, и обозначая абсолютныя значенія чиселъ α, β и γ символами $|\alpha|$, $|\beta|$ и $|\gamma|$, мы имѣемъ:

$$|\alpha| . (|\beta| . |\gamma|) = [A(BC), A'(B'C')]$$
$$(|\alpha| . |\beta|) . |\gamma| = [(AB)C, (A'B')C']$$
$$(|\alpha| . |\gamma|) . |\beta| = [(AC)B, (A'C')B'].$$

Но такъ какъ, по теоремѣ **11**,

$$a(bc) = (ab)c = (ac)b$$

и равнымъ образомъ

$$a'(b'c') = (a'b')c' = (a'c')b',$$

то сѣченія, которыми опредѣляются произведенія $|\alpha| . (|\beta| . |\gamma|)$, $(|\alpha| . |\beta|) . |\gamma|$ и $(|\alpha| . |\gamma|) . |\beta|$, тождественны. А потому эти произведенія равны. Но такъ какъ знакъ произведенія не зависитъ отъ порядка знаковъ сомножителей, то и

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma = (\alpha\gamma)\beta.$$

§ 231. **Умноженіе ирраціональнаго числа и 0 другъ на друга.** Ни опредѣленіе умноженія въ § 226, ни дополненіе къ нему въ § 228 не примѣнимы въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ сомножителей 0. Этотъ случай умноженія можетъ быть опредѣленъ при помощи особаго сѣченія, относительно котораго можетъ быть доказано, что оно тождественно съ сѣченіемъ N/P, которому соотвѣтствуетъ число 0 [§ 195]. Во избѣжаніе длиннотъ откажемся отъ разсмотрѣнія такого сѣченія и прямо введемъ умноженіе ирраціональнаго числа и 0 другъ на друга слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленіе. И въ томъ случаѣ, когда α ирраціональное число,

$$\alpha . 0 = 0 . \alpha = 0.$$

§ 232. **Теорема.** И въ томъ случаѣ, когда α ирраціональное число,

$$\alpha . 1 = 1 . \alpha = \alpha.$$

Док. Предполагая абсолютное значеніе $|\alpha|$ числа α и число 1 опредѣленными посредствомъ сѣченій въ области абсолютныхъ чиселъ и полагая

$$|\alpha| = (A, A')$$
$$1 = (M, M'),$$

мы по правиламъ, изложеннымъ въ §§ 226, 228 и 229, имѣемъ:

$$|\alpha| . 1 = 1 . |\alpha| = (AM, A'M').$$

Но такъ какъ всякое число m класса M есть правильная дробь, то отъ умноженія всякаго числа a класса A на m получится абсолютное число меньшее, чѣмъ a, слѣдовательно, такое, которое должно по этой причинѣ принадлежать къ классу A. Всякое же число m' класса M' есть неправильная дробь, а потому всякое произведеніе любого числа a' класса A' на m' будетъ больше a' и по этой причинѣ принадлежать къ классу A'. Изъ этого слѣдуетъ, что классы A и AM тождественны, и что тождественны также классы A' и $A'M'$. Слѣдовательно, по опредѣленію равенства ирраціональныхъ чиселъ.

$$\alpha \,.\, 1 = 1 \,.\, \alpha| = \alpha|$$

а потому и

$$\alpha \,.\, 1 = 1 \,.\, \alpha = \alpha,$$

согласно опредѣленію въ § 228.

§ 233. **Теорема.** И для ирраціональныхъ чиселъ остается въ силѣ **распредѣлительный законъ умноженія.**

Предп. $\varkappa$, α и β вещественныя числа.

Утв. $\varkappa(\alpha+\beta) = \varkappa\alpha+\varkappa\beta$.

Док. Сначала докажемъ теорему для случая, когда $\varkappa$, α и β абсолютныя числа.

Предполагая, что эти числа опредѣлены сѣченіями, мы, основываясь на разсужденіяхъ въ §§ 215 и 226, знаемъ, что есть сѣченіе, которымъ опредѣляется $\varkappa(\alpha+\beta)$. Для послѣдняго числа мы, пользуясь обозначеніями, введенными въ § 203, имѣемъ:

$$k(a+b) < \varkappa(\alpha+\beta) < k'(a'+b').$$

На основаніи теоремы, приведенной въ § 226 какъ первое слѣдствіе, мы, умножая неравенства:

$$\left.\begin{array}{c} k < \varkappa < k' \\ \text{и} \quad a < \alpha < a' \\ \hline ka < \varkappa\alpha < k'a' \end{array}\right\}, \text{ а также } \left\{\begin{array}{c} k < \varkappa < k' \\ \text{и} \quad b < \beta < b' \\ \hline kb < \varkappa\beta < k'b' \end{array}\right., \text{ получаемъ:}$$

На основаніи же теоремы, приведенной въ § 215 какъ первое слѣдствіе, мы, слагая послѣднія два неравенства, получаемъ:

$$ka+kb < \varkappa\alpha+\varkappa\beta < k'a'+k'b'.$$

Послѣднимъ неравенствомъ указывается, что $\varkappa\alpha+\varkappa\beta$ есть число которое больше каждаго раціональнаго числа вида $ka+kb$ и меньше каждаго раціональнаго числа вида $k'a'+k'b'$. Но такъ какъ

$$k(a+b)=ka+kb$$
$$\text{и}\ k'(a'+b')=k'a'+k'b',$$

то сѣченія, опредѣляющія числа

$$\varkappa(\alpha+\beta)\quad\text{и}\quad\varkappa\alpha+\varkappa\beta,$$

тождественны, изъ чего и слѣдуетъ [§ 204], что

$$\varkappa(\alpha+\beta)=\varkappa\alpha+\varkappa\beta$$

Теорема доказана вмѣстѣ съ этимъ и для того случая, когда $\varkappa$, α и β положительныя вещественныя числа, такъ какъ дѣйствія надъ положительными числами, на основаніи понятія о нихъ, всегда тѣ же, что и дѣйствія надъ абсолютными числами.

Поэтому намъ надлежитъ теперь перейти къ разсмотрѣнію случаевъ, когда изъ чиселъ $\varkappa$, α и β, которыя-либо будутъ отрицательны, и начнемъ со случая, когда, при положительномъ $\varkappa$, изъ слагаемыхъ α и β одно, напр. β, будетъ отрицательное число и притомъ такое, котораго абсолютное значеніе меньше абсолютнаго значенія числа α. Чтобы сдѣлать знакъ такого числа β явнымъ, положимъ

$$\beta=-\beta_1.$$

Въ такомъ случаѣ будетъ

$$\alpha+\beta=(+\alpha)+(-\beta_1)=\alpha-\beta_1,$$

такъ какъ въ § 222 было доказано, что

$$(+\alpha)+(-\beta_1)=\alpha-\beta_1.$$

Если мы назовемъ разность $\alpha-\beta_1$ буквою δ, то по опредѣленію въ § 222 будетъ

$$\alpha=\beta_1+\delta,$$

и поэтому, на основаніи того, что мы здѣсь уже только-что доказали,

$$\varkappa\alpha=\varkappa(\beta_1+\delta)$$
$$=\varkappa\beta_1+\varkappa\delta.$$

А отсюда мы по тому же опредѣленію заключаемъ, что

$$\kappa\delta = \kappa\alpha - \kappa\beta_1$$

или

$$\kappa(\alpha - \beta_1) = \kappa\alpha - \kappa\beta_1,$$

значитъ, что

$$\kappa(\alpha + \beta) = \kappa\alpha + \kappa\beta,$$

такъ какъ

$$\kappa\beta = \kappa(-\beta_1) = -\kappa\beta_1.$$

Если же β будетъ отрицательнымъ числомъ, но такимъ, котораго абсолютное значеніе больше абсолютнаго значенія положительнаго числа α, или если и α и β будутъ отрицательныя числа, то въ обоихъ случаяхъ $\alpha + \beta$ будетъ отрицательное число. Слѣдовательно, если положимъ

$$\alpha = -\alpha_1$$
$$\beta = -\beta_1,$$

то въ обоихъ случаяхъ

$\alpha_1 + \beta_1 = -(\alpha + \beta)$ будетъ положительнымъ числомъ, и по правилу умноженія положительнаго и отрицательнаго числа другъ на друга будетъ

$$\kappa(\alpha + \beta) = \kappa[-(\alpha_1 + \beta_1)] = -\kappa(\alpha_1 + \beta_1) = -\kappa\alpha_1 - \kappa\beta_1.$$

Но такъ какъ также $\kappa\alpha + \kappa\beta = -\kappa\alpha_1 - \kappa\beta_1$

то, по теор. VI:

$$\kappa(\alpha + \beta) = \kappa\alpha + \kappa\beta.$$

Если, наконецъ, κ отрицательное число, то, полагая

$$\kappa = -\kappa_1,$$

мы на основаніи того, что уже доказали здѣсь, и на основаніи правилъ для знаковъ произведенія имѣемъ:

$$\kappa(\alpha + \beta) = -\kappa_1(\alpha + \beta) = -[\kappa_1(\alpha + \beta)] = -[\kappa_1\alpha + \kappa_1\beta] = -\kappa_1\alpha - \kappa_1\beta.$$

Но и $\kappa\alpha + \kappa\beta = -\kappa_1\alpha - \kappa_1\beta.$

Слѣд., по теор. VI, и въ этомъ случаѣ:

$$\kappa(\alpha + \beta) = \kappa\alpha + \kappa\beta.$$

Дополнить это доказательство разсмотрѣніемъ случаевъ, когда которое-либо изъ чиселъ κ, α и β равно 0, мы предоставляемъ самимъ учащимся.

Слѣдствіе. Правила, установленныя для умноженія многочлена на одночленъ и многочленовъ между собою [**48** и **49**], остаются въ силѣ, какія бы вещественныя числа ни входили въ составъ этихъ выраженій.

§ 234. **Ирраціональныя числа обратныя другъ другу.** Введеніе этого понятія совершимъ путемъ, совершенно аналогичнымъ тому, который мы избрали для введенія понятія, разсмотрѣннаго въ § 220.

Обозначенія. $\frac{1}{A}$ и $\frac{1}{A'}$ назовемъ совокупности всѣхъ чиселъ обратныхъ соотвѣтственно числамъ нижней и верхней области сѣченія A/A', произведеннаго въ области *абсолютныхъ* чиселъ.

Теорема 1. Совокупности $\frac{1}{A}$ и $\frac{1}{A'}$ составляютъ верхнюю и нижнюю области сѣченія въ области абсолютныхъ чиселъ.

Док. Совокупность $\frac{1}{A}$ состоитъ изъ абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ вида $\frac{1}{a}$, совокупность $\frac{1}{A'}$, изъ такого же рода чиселъ вида $\frac{1}{a'}$. И такъ какъ

$$a < a',$$

то

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{a'}$$

или

$$\frac{1}{a'} < \frac{1}{a}.$$

Слѣдовательно, каждое число совокупности $\frac{1}{A'}$, меньше каждаго изъ чиселъ совокупности $\frac{1}{A}$. При этомъ каждому абсолютному раціональному числу указано мѣсто въ одной изъ этихъ совокупностей, такъ какъ каждое такое число можетъ быть представлено въ видѣ частнаго отъ дѣленія 1 на абсолютное раціональное число $\frac{1}{c}$, которое какъ таковое непремѣнно должно имѣться или въ классѣ A или въ классѣ A' сѣченія A/A'.

Слѣдовательно, совокупности $\frac{1}{A'}$ и $\frac{1}{A}$ обладаютъ всѣми свойствами нижней и верхней области сѣченія, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Произведеніе абсолютнаго вещественнаго числа

$$\alpha = (A, A')$$

на число

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{A'}, \frac{1}{A}\right)$$

равняется 1.

Док. Умножая числа α и α_1 по правиламъ, изложеннымъ въ §§ 225 и 226, мы получаемъ:

$$\alpha \cdot \alpha_1 = \left(A \cdot \frac{1}{A'}, A' \cdot \frac{1}{A}\right).$$

Но такъ какъ

$$a < a',$$

то при умноженіи любого числа a класса A на любое число $\frac{1}{a'}$ класса $\frac{1}{A'}$, получится правильная дробь, а при умноженіи любого числа a' класса A' на любое число $\frac{1}{a}$ класса $\frac{1}{A}$ получится неправильная дробь. Слѣдовательно [§ 195], сѣченію, которымъ опредѣляется результатъ умноженія чиселъ α и α_1 другъ на друга, соотвѣтствуетъ число 1. А изъ этого слѣдуетъ, что и въ самомъ дѣлѣ

$$\alpha \, \alpha_1 = 1.$$

Опредѣленіе 1. Подъ числомъ $\frac{1}{\alpha}$ обратнымъ абсолютному ирраціональному числу $\alpha = (A, A')$ должно понимать число $\left(\frac{1}{A'}, \frac{1}{A}\right)$

Примѣчаніе.

Способомъ образованія сѣченія $\frac{1}{A'}\Big/\frac{1}{A}$ обусловливается, что вмѣстѣ съ α и $\frac{1}{\alpha}$ должно быть ирраціональнымъ числомъ.

Опредѣленіе 2. Числомъ, обратнымъ положительному числу $+\alpha$, называется число $+\frac{1}{\alpha}$, числомъ, обратнымъ отрицательному числу $-\alpha$, называется число $-\frac{1}{\alpha}$.

Слѣдствіе. Произведеніе иррацональнаго числа на обратное ему равно 1. Другими словами, и для ирраціональныхъ чиселъ остается въ силѣ, что

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$$

§ 235. **Законъ непрерывности въ примѣненіи къ умноженію ирраціональныхъ чиселъ.**

Теорема. Къ произведенію нѣсколькихъ ирраціональныхъ (или вообще вещественныхъ) чиселъ можно приблизиться на сколько угодно, перемножая между собою приближенныя значенія ихъ.

Док. Теорему достаточно доказать для абсолютныхъ значеній перемножаемыхъ чиселъ, такъ какъ знакъ произведенія зависитъ только отъ количества отрицательныхъ сомножителей.

Если назовемъ $a, b, c, \ldots, n$ нѣкоторыя приближенныя съ недостаткомъ и соотвѣтственно $a', b', c', \ldots, n'$ нѣкоторыя приближенныя съ избыткомъ значенія абсолютныхъ ирраціональныхъ (или вообще вещественныхъ) чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$, то первый рядъ приближенныхъ значеній будетъ принадлежать къ нижнимъ областямъ сѣченій, опредѣляющихъ названныя ирраціональныя числа, а второй рядъ къ верхнимъ областямъ

Изъ этого мы заключаемъ слѣдующее:

Такъ какъ каждая изъ разностей $a'-a$ и $b'-b$ можетъ быть сдѣлана произвольно малою [§ 206], то, какъ это было выяснено при доказательствѣ теоремы въ § 225, и разность $a'b'-ab$ можетъ быть сдѣлана произвольно малою. Но такъ какъ этимъ свойствомъ обладаютъ и разность $a'b'-ab$, и разность $c'-c$, то тѣмъ же способомъ мы заключаемъ, что и разность $a'b'c'-abc$ можетъ быть произвольно малою. Продолжая присоединять къ уменьшаемому и къ вычитаемому по множителю, мы убѣждаемся, наконецъ, что и разность $a'b'c'\ldots n'-abc\ldots n$ обладаетъ этимъ свойствомъ.

Слѣдовательно, оказывается, *во-первыхъ*, что могутъ быть найдены такія числа $a, b, c, \ldots, n$ и $a', b', c', \ldots, n'$, что разность $a'b'c'\ldots n'-abc\ldots n$ будетъ меньше всякаго заданнаго раціональнаго числа ε, какъ бы мало оно ни было по абсолютной величинѣ своей.

Перемножая же неравенства [см. первое слѣдствіе въ § 226]:

$$\begin{array}{c} a < \alpha < a' \\ b < \beta < b' \\ c < \gamma < c' \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \hline n < \nu < n' \end{array}$$

мы узнаемъ,

что, *во-вторыхъ*: $abc\ldots n < \alpha\beta\gamma\ldots\nu < a'b'c'\ldots n'$.

Въ третьихъ, если бы мы въ произведеніи $abc...n$ одного или нѣсколькихъ сомножителей замѣнили соотвѣтственными сомножителями изъ произведенія $a'b'c'...n'$ или наоборотъ, то въ обоихъ случаяхъ получили бы произведеніе, заключенное между $abc...n$ и $a'b'c'...n'$.

А всѣ три заключенія вмѣстѣ и имѣютъ тотъ смыслъ, что произведеніе ирраціональныхъ (или вообще вещественныхъ) чиселъ α, β, γ, ..., ν можно вычислить съ точностью до e [§ 207] чрезъ умноженіе (безразлично какого рода) приближенныхъ значеній ихъ.

Примѣръ.

Вычислить

$$\sqrt{5}\ \sqrt[3]{7}$$

съ точностью до $\frac{1}{10^4}$.

§ 236. **Дѣленіе ирраціональныхъ чиселъ.** По теоремѣ, доказанной въ § 234,

$$\frac{1}{\beta} \cdot \beta \quad 1,$$

по теоремѣ, доказанной въ § 232,

$$\alpha \,.\, 1 \quad \alpha \,.$$

Слѣдовательно,

$$\alpha \,.\, \left(\frac{1}{\beta} \quad \beta\right) \quad \alpha \,.$$

По сочетательному же закону умноженія

$$\alpha \,.\, \left(\frac{1}{\beta} \quad \beta\right) = \left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) \cdot \beta.$$

Сравнивая послѣднія два равенства, мы видимъ, что

$$\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) \cdot \beta = \alpha.$$

То есть, $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ оказывается числомъ, которое, будучи перемножено съ β, даетъ α.

Такъ мы видимъ, что и **въ томъ случаѣ, когда числа** α **и** β **оба или одно изъ нихъ ирраціональны,**

всегда можетъ быть найдено число, которое, будучи перемножено съ β, дастъ α. Естественно его обозначить символомъ

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ ввести понятіе о дѣленіи ирраціональныхъ и вообще вещественныхъ чиселъ другъ на друга.

Изъ изложеннаго мы заключаемъ, 1) что опредѣленіе **53** примѣнимо безъ измѣненія и какъ опредѣленіе дѣленія ирраціональныхъ и вообще вещественныхъ чиселъ другъ на друга, и 2) что правило дѣленія **82** остается въ силѣ и для ирраціональныхъ чиселъ.

Особенно важно отмѣтить, что для всѣхъ вообще вещественныхъ чиселъ остаются въ силѣ равенства:

Опредѣленіе. $\frac{\alpha}{\beta}\,\beta = \alpha.$

Слѣдствіе. $\frac{\alpha\beta}{\beta} = \alpha.$

На основаніи ихъ всѣ теоремы, относящіяся къ дѣленію, а также къ умноженію и дѣленію раціональныхъ чиселъ, сохраняютъ свою силу и для ирраціональныхъ чиселъ, такъ какъ доказательства названныхъ теоремъ основываются на этихъ равенствахъ.

§ 237. Законъ непрерывности въ примѣненіи къ дѣленію ирраціональныхъ чиселъ.

Теорема. Къ частному двухъ ирраціональныхъ (или вообще вещественныхъ) чиселъ можно приблизиться на сколько угодно, дѣля приближенныя значенія ихъ другъ на друга.

Док. Такъ какъ [§ 236]

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta},$$

то утверждаемая истина оказывается доказанною уже вмѣстѣ съ теоремою въ § 235.

Примѣръ

Вычислить

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{29}}$$

съ точностью до $\frac{1}{10^5}$.

§ 238. **Степень ирраціональнаго числа съ цѣлымъ показателемъ.** Послѣ введенія умноженія ирраціональныхъ чиселъ между собою опредѣленіе степени съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ какъ произведенія равныхъ сомножителей само собою вступаетъ въ силу и для того случая, когда основаніе степени ирраціональное число. Вмѣстѣ съ этимъ и въ случаѣ ирраціональнаго основанія остаются въ силѣ всѣ тѣ опредѣленія, которыя выражали всѣ произведенныя нами до сихъ поръ расширенія понятія о степени.

Изъ этого же далѣе слѣдуетъ, что остаются въ силѣ и всѣ доказанныя до сихъ поръ теоремы о степеняхъ для всякаго цѣлаго показателя (включая сюда и 0) и для всякаго вещественнаго основанія.

Вообще распространеніе понятій объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ и на ирраціональныя и вообще вещественныя числа происходило до сихъ поръ такъ, что при этомъ не нарушились ни одинъ изъ основныхъ законовъ, насающихся этихъ дѣйствій (напр., законы перемѣстительный, сочетательный и распредѣлительный) и ни одно изъ опредѣленій дѣйствій обратныхъ (вычитанія и дѣленія). Потому всѣ теоремы, доказанныя въ первыхъ девятнадцати главахъ этой книги, сохраняютъ свою силу и для ирраціональныхъ и вообще вещественныхъ чиселъ съ единственнымъ остающимся еще ограниченіемъ, состоящимъ въ недопущеніи пока иныхъ показателей степеней, кромѣ цѣлыхъ.

§ 239. **Ирраціональный корень n-ой степени.** Это понятіе можетъ быть введено слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Всегда возможно сѣченіе, опредѣляющее такое абсолютное вещественное число, котораго *n*-ая степень равна данному абсолютному вещественному числу.

Док. Упоминаемое въ теоремѣ данное число назовемъ *z*. Сѣченіе же указаннаго тамъ свойства должно быть произведено въ области абсолютныхъ чиселъ и притомъ слѣдующимъ образомъ: одну совокупность чиселъ образуемъ изъ всѣхъ абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ, которыхъ *n*-ая степень меньше *z*, другую изъ всѣхъ абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ, которыхъ *n*-ая степень больше *z*. Тогда, на основаніи теоремы 1 въ § 130, каждое число первой совокупности будетъ меньше каждаго числа

второй. Притомъ указаннымъ распредѣленіемъ будетъ указано мѣсто *всякому* абсолютному раціональному числу или въ одной или въ другой изъ этихъ совокупностей, такъ какъ n-ая степень каждаго изъ этихъ чиселъ будетъ непремѣнно или меньше z или больше z, при чемъ, однако, можетъ оказаться и такое, котораго n-ая степень равна z и которое въ силу этого одно само по себѣ образуетъ особый классъ. Изъ этихъ свойствъ охарактеризованныхъ нами совокупностей слѣдуетъ, что образованіемъ ихъ производится сѣченіе, что первая изъ нихъ есть нижняя область его, а вторая верхняя, и что сѣченіе это можетъ быть и раціональнымъ (если окажется число, котораго n-ая степень равна z) и ирраціональнымъ (если такого числа не окажется). По опредѣленію **96** раціональное число, котораго n-ая степень равна z, обозначено было нами символомъ $\sqrt[n]{z}$. Этимъ числомъ и производится наше сѣченіе, если оно раціонально. И такъ какъ при этомъ условіи, по опредѣленію **96а**,

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z,$$

то для того случая, когда сѣченіе раціонально, теорема доказана.

Если же оно ирраціонально, имъ опредѣляется абсолютное ирраціональное число, которое пока назовемъ α, полагая

$$\alpha = (A, A')$$

и предполагая пользоваться обозначеніями, введенными въ § 203.

Если n положительное цѣлое число, то α^n есть произведеніе n сомножителей α. Произведя это умноженіе по правиламъ, указаннымъ опредѣленіями въ §§ 226 и 228, мы получимъ число, опредѣленное сѣченіемъ, нижнюю область котораго составляютъ числа вида a^n, а верхнюю числа вида a'^n, другими словами, число большее, чѣмъ каждое число вида a^n, и меньшее, чѣмъ каждое число вида a'^n. А согласно съ условіями сѣченія, произведеннаго нами въ началѣ этого доказательства, число это должно быть z, и кромѣ него второго числа такого же свойства быть не можетъ, какимъ бы оно ни было дано, раціональнымъ или ирраціональнымъ.

Дѣйствительно, допустивъ, что есть еще второе число z_1 такого же свойства, т. е. такое, для котораго такъ же, какъ и для z, всегда будетъ:

$$a^n < z_1 < a'^n,$$

замѣнимъ въ правой части тождества

$$a'^n - a^n = (a' - a)(a'^{n-1} + a'^{n-2}a + a'^{n-3}a^2 + \ldots + a'a^{n-2} + a^{n-1})$$

a' и a числомъ k большимъ, чѣмъ a', слѣдовательно, и большимъ, чѣмъ a, тогда мы получимъ:

$$a'^n - a^n < (a' - a)nk^{n-1};$$

и если мы притомъ изберемъ a и a' такими, что будетъ

$$a' - a < \frac{\varepsilon}{nk^{n-1}},$$

что всегда возможно [§ 199], то будетъ

$$a'^n - a^n < \varepsilon,$$

гдѣ ε означаетъ произвольно заданное абсолютное раціональное число, которое можетъ быть и произвольно малымъ. Но изъ послѣдняго свойства степеней a'^n и a^n слѣдовало бы, по теоремѣ, доказанной въ § 206, что

$$z_1 = z.$$

Слѣдовательно, допущеніе наше невозможно, и сѣченіемъ, опредѣляющимъ α^n, опредѣляется именно z, такъ что

$$\alpha^n = z.$$

Такъ какъ

$$z^1 = z,$$

то теорема справедлива и въ томъ случаѣ, когда $n = +1$.

Если же n отрицательное цѣлое число, то сдѣлаемъ это явнымъ, полагая

$$n = -\nu.$$

Въ такомъ случаѣ было бы

$$\beta^n = \beta^{-\nu} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^\nu,$$

гдѣ ν положительное число.

Если $\frac{1}{\beta}$ назовемъ α, то будетъ

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)^\nu = \alpha^\nu.$$

Но мы уже доказали, что есть сѣченіе, которымъ опредѣляется такое число α, котораго цѣлая положительная, слѣдовательно и ν-ая степень равна данному абсолютному вещественному числу z. Раньше же, въ § 234 было доказано, что всегда есть сѣченіе, которымъ опредѣляется число обратное данному.

Слѣдовательно, есть и такое сѣченіе, которымъ опредѣляется число β.

Такъ теорема доказана для всякаго цѣлаго показателя n, за исключеніемъ случая $n = 0$, имѣющаго особый смыслъ и требующаго особаго изслѣдованія.

Слѣдствіе. Всегда есть абсолютное раціональное или можетъ быть создано сѣченіемъ абсолютное ирраціональное число, котораго n-ая степень равна данному абсолютному вещественному числу a.

Короче послѣднюю истину можно выразить такъ:

Слѣдствіе. *Всегда можетъ быть найдено абсолютное вещественное число, котораго n-ая степень равна данному абсолютному вещественному числу a.*

Поэтому, каково бы ни было абсолютное или положительное вещественное число a и какое бы n ни было цѣлое число (исключенъ только случай $n=0$), мы сохраняемъ опредѣленіе **96**, т. е., *во всѣхъ названныхъ случаяхъ мы обозначаемъ символомъ* $\sqrt[n]{a}$ *число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, дастъ a.*

На основаніи правилъ о знакахъ, установленныхъ въ § 132, это опредѣленіе можетъ быть распространено и на тотъ случай, когда показатель n цѣлое нечетное число и основаніе a отрицательное вещественное число.

Слѣдовательно, и въ томъ случаѣ, когда a или $\sqrt[n]{a}$ ирраціональное число (при цѣломъ еще пока n), остаются въ силѣ равенства:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\text{и} \quad \sqrt[n]{a^n} = a,$$

на которыхъ должны быть основаны доказательства всѣхъ теоремъ о дѣйствіяхъ надъ корнями.

§ 240. **Дробный показатель.** Предполагая пока $\frac{p}{q}$ цѣлымъ числомъ, возвысимъ $a^{\frac{p}{q}}$ въ q-ую степень. По теоремѣ **94** мы при этомъ получаемъ:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q}\cdot q} \quad a^p.$$

То есть, оказывается, что $a^{\frac{p}{q}}$ есть число, которое, будучи возвышено въ q-ую степень, даетъ a^p, другими словами, число, которое обозначается символомъ $\sqrt[q]{a^p}$. По аналогіи производившихся нами постоянно расширеній понятій о дѣйствіяхъ, согласимся и теперь и въ томъ случаѣ, когда $\frac{p}{q}$ дробное число, обозначать $\sqrt[q]{a^p}$ символомъ $a^{\frac{p}{q}}$

Опредѣленіе: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Уславливаясь ввести такое обозначеніе, мы вмѣстѣ съ этимъ расширяемъ понятіе о степени и вводимъ возвышеніе въ дробную степень.

Что такое расширеніе понятія о возвышеніи въ степень допустимо и даже желательно, объ этомъ подробно будетъ говориться въ §§ 269 и 270. Здѣсь же намъ нужно познакомиться съ этимъ расширеніемъ названнаго понятія для введенія степеней также и съ ирраціональными показателями

Введя абсолютныхъ дробныхъ показателей, естественно ввести и относительныхъ дробныхъ показателей, для чего достаточно опредѣлить смыслъ отрицательныхъ дробныхъ показателей. Онъ выясняется слѣдующимъ равенствомъ:

Опредѣленіе: $a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$.

Въ § 270 будетъ разъяснено, что теорема **94** остается въ силѣ и для дробныхъ показателей. Поэтому

$$\left(a^{\frac{v}{u}}\right)^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{v}{u}\cdot\frac{u}{v}} = a^1 = a$$

На основаніи этого равенства можетъ быть введено также понятіе о корнѣ съ дробнымъ показателемъ:

Опредѣленіе: $\sqrt[\frac{u}{v}]{a} = a^{\frac{v}{u}} = \sqrt[u]{a^v}$.

Если же мы $\frac{u}{v}$ обозначимъ буквою n, то будетъ

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

и поэтому изъ равенства, давшаго послѣднее опредѣленіе, видно, что и для дробнаго показателя остаются въ силѣ равенства:

Опредѣленіе: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

Слѣдствіе: $\sqrt[n]{a^n} = a.$

§ 241. **Степени съ ирраціональными показателями.** Это расширеніе понятія о степени можетъ быть произведено на основаніи слѣдующаго предложенія:

Теорема. Всегда возможно сѣченіе, опредѣляющее число большее, чѣмъ каждая степень μ^a, и меньшее, чѣмъ каждая степень $\mu^{a'}$, если μ положительное вещественное число, не равное ни 0, ни 1, и если a и a' суть числа нижней и верхней области сѣченія, опредѣляющаго число $\alpha = (A.A')$.

Док. Разсмотримъ отдѣльно случаи, когда $\mu > 1$, и когда $\mu < 1$, и докажемъ сначала для перваго изъ нихъ, что разность $\mu^{a'} - \mu^a$ при условіяхъ, упоминаемыхъ въ теоремѣ, можетъ быть произвольно малою [§ 206].

На основаніи этихъ условій

$$a' > a$$

и потому по теоремѣ 2 въ § 130, которая вмѣстѣ съ остальными теоремами названнаго параграфа остается, какъ доказывается въ § 273, справедливою для всѣхъ вообще раціональныхъ показателей,

$$\mu^{a'} > \mu^a.$$

Слѣдовательно, разность $\mu^{a'} - \mu^a$ положительна. Преобразовавъ ее слѣдующимъ образомъ:

$$\mu^{a'} - \mu^a = \mu^a(\mu^{a'-a} - 1),$$

мы замѣнили ее произведеніемъ, въ которомъ второй сомножитель будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше будетъ $a' - a$. Но по теоремѣ въ § 199 для a' и a могутъ быть выбраны всегда такія значенія, что разность $a' - a$ можетъ оказаться отличающеюся отъ 0 такъ мало, что $\mu^{a'-a}$ будетъ только на произвольно малую величину больше 1, и вмѣстѣ съ этимъ будутъ и $\mu^{a'-a} - 1$ и $\mu^a(\mu^{a'-a} - 1)$ произвольно малыми числами.

Наглядно показать это относительно послѣдняго выраженія можно слѣдующимъ образомъ:

Такъ какъ здѣсь интересъ представляютъ только очень малыя значенія разности $a' - a$, то мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ случая, когда она правильная дробь, которая притомъ можетъ быть предположена имѣющею въ числителѣ 1 и въ знаменателѣ цѣлое число, ибо всегда имѣются такого вида произвольно малыя дроби [§ 206]. Если разность $a' - a$ на основаніи этого назовемъ $\frac{1}{n}$ и буквою η обозначимъ нѣкоторое произвольно ва-

данное абсолютное или положительное рациональное число, то всегда a и a' могутъ быть выбраны такъ, что будетъ

$$\frac{\mu^a(\mu-1)}{\eta} < n$$

Умноживъ это неравенство на η, мы, по теоремѣ 1 въ § 63 узнаемъ, что при условіи, выраженномъ имъ, будетъ

$$\mu^a(\mu-1) < n\eta.$$

Раздѣливъ послѣднее неравенство на μ^a мы, по теоремѣ 1 въ § 79, узнаемъ, что при томъ же условіи будетъ

$$\mu-1 < \frac{n\eta}{\mu^a},$$

отсюда, прибавивъ къ обѣимъ частямъ неравенства по 1, по теоремѣ 1 въ § 49, что будетъ

$$\mu < 1 + n\cdot\frac{\eta}{\mu^a},$$

отсюда по теоремѣ, доказанной на этой страницѣ внизу подъ чертою *), что будетъ и подавно

$$\mu < \left(1+\frac{\eta}{\mu^a}\right)^n.$$

*) **Вспомогательная теорема.**

Предп. $n>1$ и цѣлое число; $\delta>0$.

Утв. $(1+\delta)^n > 1+n\delta$.

Док. $(1+\delta)^2 = 1+2\delta+\delta^2$.

Слѣдовательно,

$(1+\delta)^2 > 1+2\delta$.

$(1+\delta)^3 = 1+3\delta+3\delta^2+\delta^3 = 1+3\delta+\delta^2(3+\delta)$.

Слѣдовательно,

$(1+\delta)^3 > 1+3\delta$.

Допустивъ, что и для n

$(1+\delta)^n > 1+n\delta$, (I)

умножимъ это неравенство на $1+\delta$, тогда получимъ:

$(1+\delta)^{n+1} > 1+(n+1)\delta+n\delta^2$.

Слѣдовательно, и подавно

$(1+\delta)^{n+1} > 1+(n+1)\delta$. (II).

Сравнивая неравенства I и II, мы видимъ, что утвержденіе справедливо для показателя $(n+1)$, если оно справедливо для показателя n. Но оно справедливо для показателя 2; слѣдовательно, оно должно быть справедливымъ для показателя 3, что уже доказано было выше и помимо этого заключенія. Будучи справедливымъ для показателя 3, утвержденіе должно быть справедливо для показателя 4 и т. д., т. е. вообще для всякаго цѣлаго положительнаго показателя. А это и требовалось доказать.

а отсюда на основаніи такихъ же, какъ выше, заключеній, что будетъ

$$\mu^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\eta}{\mu^a}$$

$$\mu^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\eta}{\mu^a}$$

$$\mu^a\left(\mu^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \eta.$$

Замѣнивъ опять дробь $\frac{1}{n}$ разностью $a' - a$ и произведеніе $\mu^a(\mu^{a'-a} - 1)$ опять разностью $\mu^{a'} - \mu^a$, мы видимъ, что есть такія степени $\mu^{a'}$ и μ^a, разность между которыми будетъ по абсолютной величинѣ своей меньше всякаго заданнаго абсолютнаго или положительнаго раціональнаго числа η.

Изъ этого же далѣе можетъ быть заключено, что существуютъ такія раціональныя числа c и c', изъ которыхъ первое меньше μ^a, а второе больше $\mu^{a'}$, разность между которыми будетъ по абсолютной величинѣ своей меньше всякаго произвольно заданнаго раціональнаго числа ε, какъ бы мало и это послѣднее ни было по абсолютной величинѣ своей.

Дѣйствительно, на основаніи понятія о сѣченіи (μ^a и $\mu^{a'}$ мы предполагаемъ опредѣленными посредствомъ раціональныхъ или ирраціональныхъ сѣченій) мы знаемъ, что существуютъ такія числа c и c', что разности $\mu^a - c$ и $c' - \mu^{a'}$ могутъ быть произвольно малы. Потому, полагая примѣрно

$$\eta = \frac{\varepsilon}{3},$$

мы имѣемъ:

$$\mu^a - c < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\mu^{a'} - \mu^a < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$c' - \mu^{a'} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Сложивъ же ихъ, мы и получаемъ:

$$c' - c < \varepsilon.$$

Поэтому, сравнивая всѣ раціональныя числа со степенями μ^a и $\mu^{a'}$ и причисляя ихъ къ одной совокупности или къ другой, смотря по тому, будутъ ли они меньше μ^a или больше $\mu^{a'}$, мы по теоремѣ, приведенной въ § 211 какъ слѣдствіе и производимъ сѣченіе.

Въ томъ случаѣ, когда $\mu < 1$, по теоремѣ 3 въ § 130 будетъ

$$\mu^{a'} < \mu^a$$

и потому разность $\mu^{a'}-\mu^{a}$ отрицательна, слѣдовательно, разность $\mu^{a}-\mu^{a'}$ положительна. Положимъ въ этомъ случаѣ

$$\mu=\frac{1}{\rho},$$

тогда будетъ

$$\rho>1;$$

и разность $\rho^{a'}-\rho^{a}$ положительна, разность же $\mu^{a}-\mu^{a'}$ можетъ быть приведена къ слѣдующему виду:

$$\mu^{a}-\mu^{a'}=\frac{1}{\rho^{a}}-\frac{1}{\rho^{a'}}=\frac{\rho^{a'}-\rho^{a}}{\rho^{a'}\rho^{a}}.$$

Въ послѣднемъ выраженіи знаменатель больше 1, такъ какъ $\rho>1$, числитель же при тѣхъ же условіяхъ, можетъ стать, какъ и въ первомъ разсмотрѣнномъ случаѣ, произвольно малымъ, такъ что разность $\mu^{a}-\mu^{a'}$ и подавно можетъ стать произвольно малою.

Сравнивая и при условіи

$$\mu<1$$

всѣ раціональныя числа со степенями μ^{a} и $\mu^{a'}$ и причисляя ихъ къ одной совокупности или къ другой, смотря по тому, будутъ ли они меньше $\mu^{a'}$ или больше μ^{a}, мы по теоремѣ, приведенной въ § 211 какъ слѣдствіе, и разсуждая такъ же, какъ въ первомъ случаѣ, заключаемъ, что также производимъ сѣченіе.

Если бы при этомъ (т. е., когда производится сѣченіе, соотвѣтствующее условію $\mu>1$ или условію $\mu<1$) оказалось нѣкоторое раціональное число, которое бы не нашло себѣ мѣста ни въ нижней области, ни въ верхней, то сѣченіе было бы раціонально и μ^{α} раціональное число. А если бы такого раціональнаго числа не оказалось, то сѣченіемъ опредѣлялось бы ирраціональное число.

Опредѣленіе. Предполагая

$$\alpha=(A,A')$$

ирраціональнымъ числомъ, подъ степенью μ^{α} будемъ понимать число, которое больше, чѣмъ каждая степень μ^{a} и меньше, чѣмъ каждая степень $\mu^{a'}$, если

$$\mu>1,$$

и число, которое больше, чѣмъ каждая степень $\mu^{a'}$ и меньше, чѣмъ каждая степень μ^{a}, если

$$0<\mu<1.$$

Слѣдствіе. И въ томъ случаѣ, когда α ирраціональное число, изъ неравенства

$$a < \alpha < a'$$

слѣдуетъ

$$\mu^a < \mu^\alpha < \mu^{a'}, \text{ если } \mu > 1,$$

и

$$\mu^a > \mu^\alpha > \mu^{a'}, \text{ если } \mu < 1.$$

Изъ послѣдняго же предложенія и понятія о неравенствѣ ирраціональныхъ чиселъ легко заключается, что всѣ теоремы о неравенствѣ степеней, доказанныя въ § 130, остаются въ силѣ для всякихъ вещественныхъ показателей и основаній.

§ 242. Законъ непрерывности въ примѣненіи къ возвышенію въ степень.

Теорема. Къ ирраціональной (или вообще вещественной) степени ирраціональнаго (или вообще вещественнаго) числа можно приблизиться на сколько угодно, потенцируя приближенныя значенія основанія на приближенныя значенія показателя.

Док. Пользуясь обозначеніями, введенными въ § 203, и полагая

$$\alpha = (A,\ A')$$

и

$$\mu = (M,\ M'),$$

мы имѣемъ

$$\begin{aligned} a &< \alpha < a' \\ m &< \mu < m', \text{ откуда} \\ \hline m^a &< \mu^\alpha < m'^{a'} \qquad (1) \end{aligned}$$

по теоремѣ, приведенной въ предыдущемъ параграфѣ какъ слѣдствіе.

Въ предыдущемъ же параграфѣ было доказано, что разность $m'^{a'} - m'^{a}$ можетъ быть сдѣлана произвольно малою, а въ § 239 то же самое относительно разности $m'^{a} - m^{a}$.

Полагая на этомъ основаніи

$$m'^{a'} - m'^{a} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m'^{a} - m^{a} < \frac{\varepsilon}{2}$$

мы получаемъ:

$$m'^{a'} - m^{a} < \varepsilon \qquad (2)$$

по теоремѣ 2 въ § 49, если сложимъ стоящія надъ чертою неравенства.

Если бы мы, наконецъ, въ степеняхъ $m'^{a'}$—m^{a} одно изъ основаній замѣнили другимъ или одного изъ показателей другимъ, то получили бы въ каждомъ изъ этихъ случаевъ степень, заключенную между m^{a} и $m'^{a'}$.

А изъ этого и изъ неравенствъ (1) и (2) и слѣдуетъ, что степень μ^{α} можно вычислить съ точностью до ε чрезъ потенцированіе приближеннаго значенія основанія μ на приближенное значеніе показателя α, доведя эти приближенныя значенія до достаточной точности.

§ 243. Дѣйствія надъ степенями съ ирраціональными показателями. Для распространенія правилъ о дѣйствіяхъ надъ степенями и на тѣ случаи, когда показатели этихъ степеней ирраціональны, не требуется введенія новыхъ понятій. Пояснимъ это на примѣрѣ умноженія другъ на друга степеней съ одинаковыми основаніями.

Если μ вещественное число и α и β числа ирраціональныя (оба или же и только одно изъ нихъ), то μ^{α} и μ^{β} будутъ ирраціональныя или вообще вещественныя числа. Умноженіе же такого рода чиселъ уже опредѣлено. Въ степени $\mu^{\alpha+\beta}$ сумма есть опредѣленное уже понятіе, но и выраженіе $\mu^{\alpha+\beta}$ не представляетъ понятія новаго, будучи ирраціональною (или вообще вещественною) степенью вещественнаго числа. Поэтому для распространенія правила, выраженнаго теоремою **16**, которая была доказана въ § 121 и обобщена въ § 238, и на разсматриваемый случай достаточно *дополнить* доказательство этой теоремы, доказавъ ее и для того случая, когда показатели сомножителей ирраціональны (или вообще вещественны). Это доказательство мы можемъ облечь въ такую форму:

Теорема И въ томъ случаѣ, когда числа α и β, оба или одно изъ нихъ, *ирраціональны, остается въ силѣ, что*

$$\mu^{\alpha}\,.\,\mu^{\beta}=\mu^{\alpha+\beta}.$$

Док. Пользуясь обозначеніями, введенными въ § 203, и полагая

$$\alpha=(A\,.A')$$

и

$$\beta=(B.B'),$$

мы имѣемъ

$$a<\alpha<a' \qquad (1)$$

$$b<\beta<b' \qquad (2)$$

откуда

$$a+b<\alpha+\beta<a'+b'$$

и

$$\mu^{a+b}<\mu^{\alpha+\beta}<\mu^{a'+b'} \qquad (3)$$

на основаніи теоремъ, приведенныхъ какъ слѣдствія въ §§ 215 и 241.

На основаніи послѣдней изъ этихъ теоремъ мы изъ тѣхъ же неравенствъ (1) и (2) заключаемъ, что

$$\mu^{a}<\mu^{\alpha}<\mu^{a'}$$

и

$$\mu^{b}<\mu^{\beta}<\mu^{b'}$$

откуда

$$\mu^{a}\,.\,\mu^{b}<\mu^{\alpha}\,.\,\mu^{\beta}<\mu^{a'}\,.\,\mu^{b'} \qquad (4)$$

по теоремѣ, приведенной въ § 226 какъ послѣднее слѣдствіе. Но

$$\mu^{a} \cdot \mu^{b} = \mu^{a+b}$$

и

$$\mu^{a'} \cdot \mu^{b'} = \mu^{a'+b'}.$$

Поэтому мы неравенству (4) можемъ придать видъ.

$$\mu^{a+b} < \mu^{\alpha} \cdot \mu^{\beta} < \mu^{a'+b'} \qquad (5)$$

При сравненіи неравенствъ (3) и (5) видно, что какъ нижнія, такъ и верхнія области сѣченій, которыми опредѣляются числа $\mu^{\alpha} \cdot \mu^{\beta}$ и $\mu^{\alpha+\beta}$, тождественны и что потому [§ 204]

$$\mu^{\alpha} \cdot \mu^{\beta} = \mu^{\alpha+\beta}.$$

Подобнымъ же образомъ могутъ быть дополнены также доказательства теоремъ **89** и **94** *), послѣ чего вступаютъ въ силу также для всѣхъ вообще вещественныхъ показателей и всѣ остальныя теоремы о степеняхъ въ главѣ XIX, такъ какъ доказательства этихъ послѣднихъ теоремъ основываются на теоремахъ **16**, **89** и **94**.

§ 244. **Теорема**. И въ томъ случаѣ, когда α ирраціональное число

$$1^{\alpha} = 1$$

Док. Степень 1^{α} можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$1^{\alpha} = \left(\frac{\mu}{\mu}\right)^{\alpha} = \frac{\mu^{\alpha}}{\mu^{\alpha}}.$$

Послѣднее же частное равняется 1 по опредѣленію **53**, остающемуся въ силѣ и для ирраціональныхъ чиселъ, какъ это разъяснено было въ § 236.

Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ, и въ случаѣ ирраціональности показателя

$$1^{\alpha} = 1.$$

§ 245. **0^{α} при ирраціональномъ показателѣ.** Опредѣленіе степени съ ирраціональнымъ показателемъ, данное въ § 241, непримѣнимо къ разъясненію смысла выраженія 0^{α}. Оставленіе же его безъ смысла представило бы большія неудобства.

Примемъ во вниманіе, что если n цѣлое положительное число, то

$$0^{n} = 0,$$

---

[1]) Мы предоставляемъ это сдѣлать самимъ учащимся въ видѣ упражненія.

какъ это уже разъяснено было въ § 119, если же n положительная дробь, напр. $\frac{p}{q}$, то

$$0^n = 0^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{0^p} = \sqrt[q]{0} = 0$$

на основаніи опредѣленія **96** (см. § 131). Усматривая изъ этого, что всякая положительная раціональная степень нуля есть 0, естественно ожидать, что только, если считать

$$0^{\alpha} = 0$$

и при ирраціональномъ показателѣ, не произойдетъ противорѣчій при примѣненіи доказанныхъ теоремъ.

Допустимъ, напр., что 0^{α} означаетъ нѣкоторое число, но не равняется 0, слѣдовательно, равняется нѣкоторому положительному или отрицательному вещественному числу, которое назовемъ ξ.

Въ такомъ случаѣ мы, предположивъ μ положительнымъ вещественнымъ числомъ, притомъ не равнымъ $+1$, имѣли бы:

$$\xi \cdot \mu^{\alpha} = 0^{\alpha} \cdot \mu^{\alpha} = (0 \cdot \mu)^{\alpha} = 0^{\alpha} = \xi,$$

что невозможно, такъ какъ μ^{α} не равняется **1**, и что станетъ возможнымъ только, если мы допустимъ, что

$$\xi = 0.$$

Къ тому же результату мы бы пришли, которую бы теорему о степеняхъ мы ни попробовали примѣнить къ выраженію 0^{α}.

Съ другой же стороны α-ая степень положительной правильной дроби u будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше u, и можетъ при этомъ быть приближена къ 0, на сколько угодно, такъ что u^{α} было бы приближеннымъ съ избыткомъ значеніемъ 0^{α}, которое могло бы быть вычислено съ какою угодно точностью.

На основаніи этого мы должны придать выраженію 0^{α} слѣдующій смыслъ:

Опредѣленіе. И при ирраціональномъ показателѣ должно считать

$$0^{\alpha} = 0.$$

Примѣчаніе. Изъ этого слѣдуетъ, что если α **отрицательное ирраціональное** число, то выраженіе 0^{α} должно **понимать въ смыслѣ, разъясненномъ** въ § 120 въ **примѣчаніи**.

Дѣйствительно, при иномъ пониманіи его получаются противорѣчія.

§ 246. Понятія о первыхъ пяти ариѳметическихъ дѣйствіяхъ и теоремы, относящіяся къ нимъ, распространены теперь на всѣ вещественныя числа. Въ § 111 разъяснено и указано было, что недоставало еще

только изслѣдованія относительно возможности введенія дробныхъ и ирраціональныхъ показателей степеней, чтобы теоремы, доказанныя въ первыхъ девятнадцати главахъ этой книги, пріобрѣли силу для всѣхъ вообще вещественныхъ чиселъ.

Произведя эти изслѣдованія, введя недостававшія еще понятія и дополнивъ прежнія доказательства, мы обобщили всѣ понятія о первыхъ пяти ариѳметическихъ дѣйствіяхъ и теоремы, касающіяся ихъ, настолько, что вездѣ подъ числомъ можетъ пониматься всякое вещественное число. Нѣкоторое ограниченіе осталось только для основаній степеней: къ положительнымъ вещественнымъ основаніямъ относятся всѣ произведенныя обобщенія, къ отрицательнымъ же только, если показатели степеней цѣлыя числа или дроби съ нечетнымъ числомъ въ качествѣ знаменателя. Если же знаменатель показателя степени окажется четнымъ числомъ, то ограниченіе необходимо потому, что такая степень есть корень четной степени изъ отрицательнаго числа, слѣдовательно, уже не вещественное число, а мнимое. По такой же причинѣ упомянутыя обобщенія не относятся также къ степенямъ съ отрицательнымъ основаніемъ и ирраціональнымъ показателемъ.

§ 247. **Корень съ ирраціональнымъ показателемъ.** Въ § 234 было разъяснено, какой смыслъ имѣетъ выраженіе $\frac{1}{\alpha}$· если α ирраціональное число. На основаніи этихъ разъясненій и на основаніи достигнутыхъ нами обобщеній должно быть:

$$\left(\mu^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} = \mu.$$

Такъ мы видимъ, что *и въ случаѣ ирраціональности числа α всегда имѣется число, котораго α-ая степень равна данному положительному вещественному числу μ.* Естественно его обозначить символомъ

$$\sqrt[\alpha]{\mu}$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ ввести понятіе о корнѣ съ ирраціональнымъ показателемъ, сохраняя и для него опредѣленіе **96**.

Такъ въ концѣ концовъ оказывается, что *для всѣхъ вообще вещественныхъ чиселъ остаются въ силѣ равенства:*

Опредѣленіе: $\left(\sqrt[\alpha]{\mu}\right)^{\alpha} = \mu.$

Слѣдствіе: $\sqrt[\alpha]{\mu^{\alpha}} = \mu.$

Признавая же силу ихъ только въ области вещественныхъ чиселъ мы тѣмъ самымъ исключаемъ пока упомянутые выше случаи, когда $\sqrt[\alpha]{\mu}$ означаетъ мнимое число.

На основаніи достигнутаго нами обобщенія послѣднихъ равенствъ всѣ теоремы о корняхъ и о дѣйствіяхъ надъ ними будутъ справедливы для всѣхъ вещественныхъ чиселъ, такъ какъ доказательства ихъ основываются на опредѣленіи корня.

§ 248. **Законъ непрерывности въ примѣненіи къ извлеченію корня.**

Теорема. Къ корню ирраціональной (или вообще вещественной) степени изъ ирраціональнаго (или вообще вещественнаго) числа можно приблизиться, на сколько угодно, извлекая корни приближенныхъ къ данному показателю степеней изъ приближенныхъ значеній подкоренного числа

Док. Такъ какъ

$$\sqrt[\alpha]{\mu}=\mu^{\frac{1}{\alpha}},$$

то утверждаемая истина оказывается доказанною уже вмѣстѣ съ теоремою въ § 242.

§ 249. **Ирраціональные логариѳмы.** Уже въ § 190 было объяснено, что логариѳмомъ числа p по основанію m называется показатель, на котораго нужно потенцировать m, чтобы получить p; и тамъ же уже сообщено было, что такой показатель обозначается символомъ $\log_m p$. Приведенное тамъ и повторенное здѣсь опредѣленіе логариѳма можетъ быть выражено также слѣдующимъ равенствомъ:

Опредѣленіе: $m^{\log_m p}=p$.

Легко убѣдиться, что только въ исключительныхъ случаяхъ логариѳмы будутъ раціональныя числа. Напр., логариѳмомъ числа 3 по основанію 2 должно было бы быть названо число x, удовлетворяющее условію

$$2^x=3.$$

Но $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$.

Если x будетъ цѣлое число большее, чѣмъ 2, то 2^x будетъ больше 4. Если x будетъ цѣлое отрицательное число, то 2^x будетъ правильною дробью. Взявъ x дробнымъ числомъ, напр., $x=\frac{y}{z}$, мы имѣли бы:

$$2^x=2^{\frac{y}{z}}=\sqrt[z]{2^y}.$$

то есть, мы получили бы при такомъ возвышеніи 2 въ x-ую степень корень изъ нѣкоторой цѣлой степени 2-хъ. Но такъ какъ $\frac{y}{x}$ не цѣлое число, то такой корень былъ бы ирраціональнымъ числомъ, но не 3.

Слѣдовательно, нѣтъ ни цѣлаго числа, ни дробнаго, при потенцированіи на которое 2-хъ получилось бы 3.

Но возможно сѣченіе, *опредѣляющее* число x, удовлетворяющее условію

$$2^x = 3.$$

Это сѣченіе должно быть произведено слѣдующимъ образомъ: къ одной совокупности нужно причислить всѣ раціональныя числа, при потенцированіи на которыя числа 2 получается меньше 3, къ другой всѣ раціональныя числа, при потенцированіи на которыя числа 2 получается больше 3. Схемою для образованія описанныхъ совокупностей могло бы служить неравенство:

$$2^a < 3 < 2^{a'}.$$

На какое бы раціональное число мы ни потенцировали 2, получится совершенно опредѣленно въ результатѣ или больше 3 или меньше 3, такъ какъ неравныя степени одного и того же числа не бываютъ равными (исключая, конечно, основанія 1 и 0). А такъ какъ при этомъ разность $a'-a$ можетъ стать произвольно малою [§ 206] (въ зависимости отъ этого также разность $2^{a'}-2^a$, какъ это доказано было въ § 241), то по теоремѣ, приведенной въ § 211 какъ слѣдствіе, образованныя нами совокупности составляютъ нижнюю и верхнюю области сѣченія. Назвавъ опредѣляемое имъ ирраціональное число a, мы и имѣемъ:

$$2^a = 3,$$

какъ это будетъ доказано въ общемъ видѣ въ слѣдующемъ параграфѣ. Потому мы число, опредѣленное описаннымъ сѣченіемъ, и имѣемъ право обозначить символомъ $\log_2 3$.

§ 250. **Теорема.** Всегда возможно сѣченіе, опредѣляющее такое вещественное число, при потенцированіи на которое даннаго положительнаго вещественнаго числа μ (не равнаго ни 0, ни 1) получается данное положительное вещественное число λ (не равное 0).

Док. Предполагая μ сначала вещественнымъ числомъ, бо̀льшимъ, чѣмъ 1, образуемъ двѣ совокупности раціональныхъ чиселъ слѣдующимъ образомъ: къ одной причислимъ всѣ раціональныя числа, при потенцированіи на которыя числа μ получается меньше λ, къ другой—всѣ раціональныя числа, при потенцированіи на которыя числа μ получается больше λ. Схемою для образованія описанныхъ совокупностей могло бы служить неравенство:

$$\mu^a < \lambda < \mu^{a'} \quad (1).$$

На какое бы раціональное число мы ни потенцировали μ, получится совершенно опредѣленно въ результатѣ или меньше λ или больше λ, такъ какъ при возвышеніи одного и того же числа (исключая, конечно, числа 1 и 0) въ неодинаковыя степени никогда не получается одного и того же результата [§ 130 и § 241].

Такъ каждому раціональному числу указывается мѣсто въ одной изъ образованныхъ нами совокупностей или въ другой.

При этомъ въ нихъ есть такія числа a и a', что разность a' a можетъ оказаться произвольно малою [§ 206], а въ зависимости отъ этого произвольно малою и разность $\mu^{a'}-\mu^{a}$, какъ это выяснено было при доказательствѣ теоремы въ § 241.

Слѣдовательно, эти совокупности ооразуютъ нижнюю и верхнюю области сѣченія.

Назвавъ α число, опредѣляемое имъ, возвысимъ μ въ α-ую степень.

Если α окажется раціональнымъ числомъ, то, на основаніи понятія о раціональномъ сѣченіи, α должно быть какъ разъ тѣмъ числомъ, при потенцированіи на которое получается λ, такъ что для этого случая мы уже доказали, что

$$\mu^{\alpha}=\lambda.$$

Если же α ирраціональное число, то возвышеніе μ въ α-ую степень произведемъ по правилу, содержащемуся въ опредѣленіи въ § 241. Такъ какъ

$$a\leqq\alpha<a',$$

то по теоремѣ, приведенной въ томъ же параграфѣ какъ слѣдствіе,

$$\mu^{a}<\mu^{\alpha}<\mu^{a'}. \qquad (2)$$

При этомъ, какъ это разъяснено было при доказательствѣ теоремы въ § 241, разность $\mu^{a'}-\mu^{a}$ можетъ стать произвольно малою, а при этомъ условіи, какъ разъяснено было тамъ же, должны имѣться такого свойства раціональныя числа c и c', изъ которыхъ $c<\mu^{a}$, $c'>\mu^{a'}$, что и разность c'- c будетъ произвольно малою.

Поэтому, сравнивая неравенства (1) и (2) между собою, мы по теоремѣ въ § 206 заключаемъ, что дѣйствительно

$$\mu^{\alpha}\ \lambda.$$

Такъ же теорема съ соотвѣтственными незначительными измѣненіями доказывается и для того случая, когда $0<\mu<1$.

Слѣдствіе. Всегда есть раціональное или можетъ быть создано сѣченіемъ ирраціональное число, при потенцированіи на которое положительнаго вещественнаго числа μ получится положительное вещественное число λ.

Короче послѣднюю истину можно выразить такъ:

Слѣдствіе. Всегда можетъ быть найдено вещественное число, при потенцированіи на которое положительнаго вещественнаго числа μ получится положительное вещественное число λ

Поэтому, каковы бы ни были абсолютныя или положительныя вещественныя числа λ и μ, число, обозначаемое символомъ

$$\log_{\mu}\lambda,$$

будетъ имѣть всегда смыслъ и означать вещественное число; и только случай $\mu = 1$ имѣетъ нѣкоторый особый смыслъ, требующій особаго изслѣдованія и разъясненія.

Особенно важно отмѣтить, что для всѣхъ вообще положительныхъ или абсолютныхъ вещественныхъ чиселъ λ и μ остается въ силѣ равенство:

Опредѣленіе: $\mu^{\log_{\mu}\lambda} = \lambda$.

На немъ основываются доказательства всѣхъ теоремъ о логариѳмахъ и дѣйствіяхъ надъ ними. Потому послѣ всякаго такого доказательства необходимо будетъ доказанную теорему признать справедливою для всѣхъ вообще положительныхъ или абсолютныхъ вещественныхъ чиселъ, при чемъ каждый логариѳмъ самъ можетъ быть вообще вещественнымъ числомъ.

§ 251. **Третье расширеніе значенія буквъ.** Послѣ всѣхъ сдѣланныхъ нами въ этой главѣ обобщеній, при помощи которыхъ мы достигли того, что безъ нарушенія основныхъ законовъ всѣхъ семи ариѳметическихъ дѣйствій эти дѣйствія могутъ производиться надъ всѣми вообще вещественными числами, буквы во всѣхъ алгебраическихъ выраженіяхъ могутъ означать и ирраціональныя числа. Только надъ тѣми степенями, корнями и логариѳмами, которыя не означаютъ вещественныхъ чиселъ и о которыхъ мы упоминали, гдѣ слѣдуетъ, мы еще не имѣемъ права производить дѣйствія, такъ какъ возможность введенія понятій о дѣйствіяхъ надъ мнимыми числами нами еще не изслѣдована.

§ 252. **Законъ непрерывности въ примѣненіи къ вычисленію логариѳма.**

Теорема. Къ логариѳму ирраціональнаго (или вообще вещественнаго) числа по ирраціональному (или вообще вещественному) основанію можно

приблизиться, на сколько угодно, вычисляя логариөмы приближенныхъ значеній этого числа по приближеннымъ значеніямъ основанія.

Док. Если мы, полагая

$$\alpha-(A, A')$$
$$\mu-(M, M'),$$

будемъ пользоваться обозначеніями, введенными въ § 203, и если λ μ и α имѣютъ смыслъ, указываемый слѣдующими равенствами:

$$l=m^{a};\quad \lambda=\mu^{\alpha},\quad l'=m'^{a'};$$

то безъ дальнѣйшихъ объясненій на основаніи доказанныхъ до сихъ поръ теоремъ будутъ понятны смыслъ и справедливость неравенствъ:

$$m^{a}<\mu^{a}<\mu^{\alpha}<\mu^{a'}<m'^{a'}$$
$$a<\alpha<a'$$

и

$$a' \quad a<\varepsilon.$$

Но по опредѣленію логариөма изъ приведенныхъ выше равенствъ слѣдуетъ, что

$$a-\log_m l$$
$$\alpha=\log_\mu \lambda$$
$$a'-\log_{m'} l'.$$

Подставивъ эти выраженія вмѣсто a, α и a' въ послѣднія два неравенства, мы видимъ, что

$$\log_m l<\log_\mu \lambda<\log_{m'} l'$$

и

$$\log_{m'} l'-\log_m l<\varepsilon.$$

Легко можетъ быть также доказано, что и разности $\log_{m'} l'-\log_{m'} l$, $\log_m l' \quad \log_m l$ и $\log_m l' \quad \log_{m'} l$ могутъ быть сдѣланы произвольно малыми.

А изъ этого и изъ послѣднихъ двухъ неравенствъ и слѣдуетъ, что $\log_\mu \lambda$ можетъ быть вычисленъ съ точностью до ε чрезъ вычисленіе логариөма приближеннаго значенія λ по основанію, которое есть приближеніое значеніе μ, если только эти приближенія будутъ взяты съ достаточною точностью.

§ 253. **Заключеніе.** Если требуется произвести нѣсколько различныхъ дѣйствій надъ ирраціональными или вообще вещественными числами, то порядокъ ихъ можетъ быть указанъ соотвѣтствующею формулою, самыя же дѣйствія должно всегда производить такимъ образомъ, что сначала производится одно дѣйствіе, затѣмъ, согласно указанію, надъ полу-

ченнымъ результатомъ и другимъ или другими данными числами другое дѣйствіе и т. д. Поэтому **и къ вычисленію всякой сложной формулы относится законъ непрерывности.** На немъ и на достигнутыхъ нами обобщеніяхъ **зиждется** слѣдующій **важный законъ,** являющійся результатомъ изслѣдованій этой главы:

Слѣдствіе. Всякое равенство и неравенство, котораго справедливость доказана для раціональныхъ чиселъ, справедливо также для чиселъ ирраціональныхъ и вообще вещественныхъ.

ГЛАВА XXIV.

Дѣйствія надъ корнями.

§ 254. **Важныя предварительныя замѣчанія.** Само собою разумѣется, что доказательства теоремъ о дѣйствіяхъ надъ какими бы то ни было выраженіями должны основываться на опредѣленіяхъ этихъ выраженій и на опредѣленіяхъ этихъ дѣйствій. Въ предыдущей главѣ мы понятіе о корнѣ обобщили настолько, что въ немъ и подкоренное число и показатель могутъ быть всякимъ вещественнымъ числомъ при единственномъ условіи, чтобы и самый корень при этомъ былъ вещественнымъ числомъ. Вслѣдствіе этого, какъ тамъ же было выяснено, выраженіе $\sqrt[n]{a}$ для насъ еще не имѣетъ вполнѣ опредѣленнаго смысла только. если при отрицательномъ a показатель n или четное число, или дробь съ четнымъ числителемъ, или ирраціональное число, а также еще, если $n=0$ при любомъ значеніи a. Возможность обобщеній, соотвѣтствующихъ первымъ тремъ изъ перечисленныхъ случаевъ, будетъ разсматриваться въ слѣдующей главѣ, а послѣдній случай въ концѣ этой. Вообще же въ этой главѣ мы будемъ оставаться въ области вещественныхъ чиселъ.

Давъ въ предыдущей главѣ опредѣленія всѣхъ дѣйствій надъ вещественными числами, мы вмѣстѣ съ тѣмъ доказали возможность производить ихъ надъ всякими вещественными числами и вложили смыслъ во всякое алгебраическое выраженіе, какія бы вещественныя числа ни означали всѣ встрѣчающіяся въ немъ буквы и оно само.

Не менѣе важно предпослать предстоящимъ доказательствамъ, что опредѣленіе **96¹** и слѣдствіе изъ него **96²**, какъ это разъяснено было въ той же главѣ, остаются въ силѣ для всѣхъ вещественныхъ значеній показателя и подкоренного числа, при которыхъ и самый корень остается вещественнымъ.

Но такъ какъ иногда бываетъ необходимо отказаться отъ изученія подробной теоріи ирраціональныхъ чиселъ, то мы въ этой главѣ кратко упоминаемъ еще разъ о введеніи ирраціональныхъ показателей, введеніе же

дробныхъ показателей, о которыхъ говорилось уже въ предыдущей главѣ, мы здѣсь разсматриваемъ подробно.

§ 255. **Умноженіе корней съ одинаковыми показателями и извлеченіе корня изъ произведенія.**


98 **Теорема.** Корни съ одинаковыми показателями умножаютъ, умножая ихъ подкоренныя числа[1]).

Утв. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Док. Обозначивъ $\sqrt[n]{a}$ буквою x, $\sqrt[n]{b}$ буквою y, мы изъ равенствъ

$$\sqrt[n]{a} = x$$

$$\sqrt[n]{b} = y$$

на основаніи опредѣленія корня [96^a] имѣемъ:

$$x^n = a$$
$$y^n = b$$

Умноживъ эти равенства, мы, по теоремѣ VII, получаемъ:

$x^n \cdot y^n = ab$, а отсюда, по теоремѣ 89,

$(xy)^n = ab$. Такъ мы видимъ, что xy есть число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, даетъ ab; но это можетъ быть выражено и такъ:

$$xy = \sqrt[n]{ab}$$

Подставивъ въ это равенство $\sqrt[n]{a}$ вмѣсто x и $\sqrt[n]{b}$ вмѣсто y, мы убѣждаемся, что и въ самомъ дѣлѣ

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Такъ же теорема доказывается и для всякаго большаго числа сомножителей.

---

[1]) Менѣе удобно для запоминанія, но зато вполнѣ точно, эту теорему можно было бы формулировать такъ:

Произведеніе корней съ одинаковыми показателями равняется корню съ тѣмъ же показателемъ и подкореннымъ числомъ, равнымъ произведенію подкоренныхъ чиселъ сомножителей.

Если мы доказанное равенство напишемъ (теорема V) такимъ образомъ:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

то получаемъ:

Слѣдствіе. Изъ произведенія извлекаютъ корень, извлекая его изъ каждаго сомножителя. 99

§ 256. **О знакахъ корней.** Если n четное число, то и $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ могутъ быть каждый и положительнымъ и отрицательнымъ числомъ, слѣдовательно, лѣвая часть доказаннаго только что равенства

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

можетъ быть и положительная и отрицательная величина. Но въ такомъ случаѣ и правая часть есть корень съ четнымъ показателемъ и потому тоже или положительная или отрицательная величина, такъ что равенство во всякомъ случаѣ справедливо.

Напр.,

$$\sqrt{9} = \pm 3,$$
$$\sqrt{25} = \pm 5.$$

Слѣдовательно,

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = (\pm 3) \cdot (\pm 5) = \pm 15;$$

но и

$$\sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{225} = \pm 15.$$

Впослѣдствіи же мы увидимъ, что корни могутъ имѣть и болѣе двухъ значеній, но вещественныхъ всегда только не болѣе двухъ, о которыхъ потому въ этой главѣ (на основаніи остающагося еще пока въ силѣ соглашенія въ § 132) только и можетъ быть рѣчь. Такъ же легко, какъ въ разсмотрѣнномъ случаѣ, и въ теоремахъ, имѣющихъ еще быть доказанными, распространить справедливость теоремъ на оба вещественныя значенія корней съ четными показателями. Поэтому мы ради удобства и остальныя теоремы въ этой главѣ будемъ доказывать, не упоминая о возможности двухъ знаковъ въ значеніяхъ корней.

§ 257. **Вынесеніе множителей изъ-подъ знака радикала.** При примѣненіи послѣдней теоремы (99) можетъ встрѣтиться случай, что корни изъ сомножителей будутъ отчасти раціональны. Такъ, напр.,

$$\sqrt[3]{125 \cdot 27 \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Въ такомъ случаѣ говорятъ, что сомножители 5 и 3 вынесены изъ-подъ знака корня. Такое преобразованіе бываетъ часто необходимо для упрощенія формулъ, и чтобы его сдѣлать, разлагаютъ выраженіе подъ знакомъ корня подходящимъ образомъ на сомножителей.

Примѣры.

1) $\sqrt{98}=\sqrt{49\,.\,2}=\sqrt{49}\,.\,\sqrt{2}=7\,.\,\sqrt{2}.$

2) $\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^5\,.\,2}=2\sqrt[5]{2}.$

3) $\sqrt[3]{1080}=\sqrt[3]{2^3\,.\,3^3\,.\,5}=2\,.\,3\,.\,\sqrt[3]{5}=6\sqrt[3]{5}.$

4) $\sqrt{20}+3\sqrt{45}-\sqrt{605}+2\sqrt{125}=$

$\sqrt{4\,.\,5}+3\sqrt{9\,.\,5}-\sqrt{121\,.\,5}+2\sqrt{25\,.\,5}=$

$2\sqrt{5}+3\,.\,3\sqrt{5}-11\sqrt{5}+2\,.\,5\sqrt{5}=$

$2\sqrt{5}+9\sqrt{5}-11\sqrt{5}+10\sqrt{5}=10\sqrt{5}.$

Выносить сомножителей изъ-подъ знака корня приходится и можно, конечно, и въ буквенныхъ выраженіяхъ, какъ мы это показываемъ въ слѣдующихъ строкахъ:

Примѣры.

1) $\sqrt[4]{48a^5b^{10}c^3}=\sqrt[4]{2^4\,.\,3\,.\,a^4\,.\,a\,.\,(b^2)^4\,.\,b^2\,.\,c^3}=2ab^2\sqrt[4]{3ab^2c^3}.$

2) $\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}.$

3) $\sqrt[p]{a^{p+q}}=\sqrt[p]{a^p\,.\,a^q}=a\sqrt[p]{a^q}.$

4) $\sqrt[3]{a^4bc}-\sqrt[3]{8ab^4c}+\sqrt[3]{27abc^4}=a\sqrt[3]{abc}-2b\sqrt[3]{abc}+3c\sqrt[3]{abc}=$

$(a-2b+3c)\sqrt[3]{abc}.$

§ 258. **Подведеніе множителей подъ знакъ радикала.** Иногда приходится производить преобразованіе обратное тому, которое было объяснено въ предыдущемъ параграфѣ. Оно можетъ быть всегда сдѣлано при посредствѣ теоремы **98** послѣ предварительнаго примѣненія слѣдствія **96^1** и поясняется приведенными ниже примѣрами, въ которыхъ показывается, **какъ сомножители, стоящіе передъ знакомъ корня, могутъ быть подведены подъ него.**

Примѣры.

1) $3\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{9^6}\,.\,\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{3^6\,.\,5}=\sqrt[6]{3645}.$

2) $2a^2b^3c\sqrt[7]{2ac^2}=\sqrt[7]{2^7\,.\,a^{14}b^{21}c^7}\,.\,\sqrt[7]{2ac^2}=\sqrt[7]{2^8a^{15}b^{21}c^9}=\sqrt[7]{256a^{15}b^{21}c^9}.$

§ 259. **Преобразованіе суммы и разности двухъ квадратныхъ корней.** Представивъ сумму и разность корней $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ по теоремѣ **96**[5] въ видѣ $\sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2}$, раскрывъ подъ знакомъ корня *скобки* и получивъ при этомъ

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}},$$

мы убѣждаемся, что такимъ пріемомъ сумма или разность двухъ квадратныхъ корней всегда можетъ быть представлена въ видѣ одного корня. При извѣстныхъ условіяхъ такимъ преобразованіемъ достигается упрощеніе даннаго выраженія

Примѣры:

1) $\sqrt{5}+\sqrt{3} = \sqrt{5+3+2\sqrt{15}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}-2\sqrt{16-7}} = \sqrt{8-2\sqrt{9}} = \sqrt{2}$.

§ 260. **Преобразованіе обратное предыдущему.** Написавъ равенство, полученное въ предыдущемъ параграфѣ, въ такомъ видѣ

$$\sqrt{a+b \pm \sqrt{4ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b},$$

мы заключаемъ, что корень вида

$$\sqrt{m \pm \sqrt{n}}$$

можетъ быть замѣненъ суммою или разностью двухъ корней. Ясно, что квадратный корень изъ бинома $m \pm \sqrt{n}$ будетъ $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, если

$$m = a + b$$

и

$$n = 4ab.$$

Эти условія будутъ выполнены, если

$$a = \frac{m + \sqrt{m^2-n}}{2}$$

$$b = \frac{m - \sqrt{m^2-n}}{2},$$

такъ какъ дѣйствительно сумма этихъ выраженій равна m, а учетверенное ихъ произведеніе равно n. (Какъ можно найти a и b, учитъ § 561).

Слѣдовательно,

$$\sqrt{m+\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-n}}{2}} + \sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-n}}{2}},$$

и равнымъ образомъ

$$\sqrt{m-\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-n}}{2}} - \sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-n}}{2}}.$$

Въ справедливости послѣднихъ двухъ равенствъ мы можемъ также убѣдиться, возвысивъ правыя части ихъ въ квадратъ. Такъ какъ при этомъ получается $m + \sqrt{n}$ и $m - \sqrt{n}$, то по опредѣленію корня и должно быть:

$$\sqrt{m \pm \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-n}}{2}} \pm \sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-n}}{2}}.$$

Разсмотрѣннымъ преобразованіемъ достигается упрощеніе даннаго выраженія, если разность m^2-n есть квадратъ раціональнаго числа или алгебраическое выраженіе, изъ котораго извлекается корень.

Примѣры:

1) $\sqrt{41+12\sqrt{5}}=\sqrt{41+\sqrt{720}}=\sqrt{\frac{41+\sqrt{1681-720}}{2}}+\sqrt{\frac{41-\sqrt{1681-720}}{2}}=$

$$\sqrt{\frac{41+31}{2}}+\sqrt{\frac{41-31}{2}}=6+\sqrt{5}.$$

2) $\sqrt{8a^2+2b^2+2a\sqrt{7(a^2+2b^2)}}=\sqrt{m+\sqrt{n}}$

$m=8a^2+2b^2$

$n=28a^2(a^2+2b^2)=28a^4+56a^2b^2$

$m^2=64a^4+32a^2b^2+4b^4$

$m^2-n=36a^4-24a^2b^2+4b^4=(6a^2-2b^2)^2.$

Слѣд.,

$$\sqrt{8a^2+2b^2+2a\sqrt{7(a^2+2b^2)}}=\sqrt{\frac{8a^2+2b^2+(6a^2-2b^2)}{2}}+\sqrt{\frac{8a^2+2b^2-(6a^2-2b^2)}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{14a^2}{2}}+\sqrt{\frac{2a^2+4b^2}{2}}=\sqrt{7a^2}+\sqrt{a^2+2b^2}.$$

§ 261. **Дѣленіе корней съ одинаковыми показателями и извлеченіе корня изъ частнаго.**

100 **Теорема.** Корни съ одинаковыми показателями дѣлятъ другъ на друга, дѣля другъ на друга ихъ подкоренныя числа *).

Утв. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$

Док. Обозначивъ $\sqrt[n]{a}$ буквою x, $\sqrt[n]{b}$ буквою y, мы изъ равенствъ

$$\sqrt[n]{a}=x$$
$$\sqrt[n]{b}=y$$

на основаніи опредѣленія корня [**96**[1]] имѣемъ:

$$x^n=a$$
$$y^n=b$$

Раздѣливъ эти равенства другъ на друга, мы, по теоремѣ VII, получаемъ:

$\frac{x^n}{y^n}=\frac{a}{b}$, а отсюда, по теоремѣ **91**,

*) Въ формулировкѣ вполнѣ точной эту теорему можно было бы выразить такъ:

Частное двухъ корней съ одинаковыми показателями равняется корню съ тѣмъ же показателемъ и подкореннымъ числомъ, равнымъ частному отъ дѣленія подкоренного числа дѣлимаго на подкоренное число дѣлителя.

$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}$. Такъ мы видимъ, что $\frac{x}{y}$ есть число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, даетъ $\frac{a}{b}$; но это можетъ быть выражено и такъ:

$$\frac{x}{y} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Подставивъ въ это равенство $\sqrt[n]{a}$ вмѣсто x, $\sqrt[n]{b}$ вмѣсто y, мы убѣждаемся, что и въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Читая доказанное равенство въ обратномъ порядкѣ:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

мы получаемъ:

Слѣдствіе. Изъ частнаго извлекаютъ корень, извлекая его изъ дѣлимаго и изъ дѣлителя. 

§ 262. **Уничтоженіе ирраціональности въ знаменателѣ.** Вычисленіе приближенныхъ значеній частнаго, въ которомъ дѣлитель есть ирраціональный корень, или выраженіе, содержащее ирраціональные корни, въ общемъ не такъ удобно, какъ вычисленіе такихъ значеній частнаго, если дѣлитель его раціональное число. Поэтому часто отъ знака корня въ дѣлителѣ избавляются, расширяя частное подходящимъ образомъ.

Такъ, въ частномъ вида $\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}}$ корень въ дѣлителѣ исчезнетъ, если это частное расширить на $\sqrt[n]{b^{n-p}}$, такъ какъ при такомъ преобразованіи получается:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^p}\cdot\sqrt[n]{b^{n-p}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-p}}}{b}.$$

Примѣры.

$$1)\ \frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{3\sqrt{15}}{(\sqrt{15})^2}=\frac{3\sqrt{15}}{15}=\frac{1}{5}\cdot\sqrt{15}.$$

$$2)\ \frac{5}{\sqrt[5]{8}}=\frac{5}{\sqrt[5]{2^3}}=\frac{5\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}}=\frac{5\sqrt[5]{4}}{2}=2\tfrac{1}{2}\sqrt[5]{4}$$

Если же дѣлитель частнаго есть двучленъ, содержащій ирраціональные корни (многочленъ можетъ быть всегда также разсматриваемъ какъ двучленъ), то подходящихъ множителей для такого расширенія, при которыхъ эти корни исчезнутъ, можно найти на основаніи теоремъ **52, 70, 71.**

Примѣры.

$$1)\ \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{12(\sqrt{21}+3)}{7-3}=3(\sqrt{21}+3).$$

$$2)\ \frac{1}{5+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{5+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(5+\sqrt{2}-\sqrt{3})(5+\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{5+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(5+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{5+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{25+10\sqrt{2}+2-3}=\frac{5+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{24+10\sqrt{2}}=\frac{(5+\sqrt{2}+\sqrt{3})(12-5\sqrt{2})}{2(12+5\sqrt{3})(12-5\sqrt{2})}$$

$$=\frac{50-13\sqrt{2}+12\sqrt{3}-5\sqrt{6}}{188}.$$

$$3)\ \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\left[(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\right]}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}}{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}.$$

§ 263. **Извлеченіе корня изъ степени и возвышеніе корня въ степень.**

102 **Теорема.** Изъ степени можно извлечь корень, извлекая его изъ основанія

Утв. $\sqrt[p]{a^q}=\left(\sqrt[p]{a}\right)^q.$

Док. $\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[p]{\left[\left(\sqrt[p]{a}\right)^p\right]^q}$ [опред. **96**^{6}]

$= \sqrt[p]{\left[\left(\sqrt[p]{a}\right)^q\right]^p}$ [теор. **95**]

$= \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$ [по теор. **96**^{2}]

Заключая, по теоремѣ V, изъ доказаннаго равенства, что должно быть также:

$$\left(\sqrt[p]{a}\right)^q = \sqrt[p]{a^q}.$$

мы получаемъ:

Слѣдствіе. Корень можно возвысить въ какую-либо степень, возвышая въ эту степень его подкоренное число. **103**

§ 264. **Послѣдовательное извлеченіе корней изъ корней.**

Теорема. Корень изъ корня равенъ корню съ показателемъ равнымъ произведенію показателей этихъ корней. **104**

Утв. $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$.

Док. Обозначивъ $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}$ буквою x, мы изъ равенства

$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = x$, по опредѣленію **96**^{2}, заключаемъ, что должно быть:

$\sqrt[q]{a} = x^p$, а отсюда по тому же опредѣленію, что должно быть:

$a = (x^p)^q$

$= x^{pq}$ [теор. **94**].

Такъ мы видимъ, что x есть число, которое, будучи возвышено въ pq-ую степень, даетъ a; но это можетъ быть выражено и такъ:

$$\sqrt[pq]{a}=x$$

———{ Слѣд., по теор. VI:

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}=\sqrt[pq]{a}$$

По доказанной теоремѣ

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}}=\sqrt[mn]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}=\sqrt[mnp]{\sqrt[q]{a}}=\sqrt[mnpq]{a}.$$

Слѣдовательно, по теоремѣ V,

$$\sqrt[mnpq]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}}.$$

Выражаемая этимъ равенствомъ истина, справедливая для всякаго числа сомножителей въ показателѣ корня, можетъ быть формулирована такъ:

105 **Слѣдствіе.** Если нужно изъ числа извлечь корень степени, указанной произведеніемъ, то можно извлечь изъ него сначала корень степени, указанной однимъ сомножителемъ, изъ результата корень степени, указанной другимъ сомножителемъ, и т. д. до послѣдняго.

106 § 265. **Теорема.** Отъ порядка, въ которомъ извлекается корень изъ корня, величина результата не зависитъ.

Утв. $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}=\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}.$

Док. $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}=\sqrt[pq]{a}$

$$\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[qp]{a}=\sqrt[pq]{a}$$

———{Слѣд., по теор. VI:

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}=\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}.$$

107 **Слѣдствіе.** Если корень нужно извлечь изъ корня, то его можно извлечь изъ подкоренного числа послѣдняго.

§ 266. **Важное преобразованіе корня.** **108**

Теорема. Величина корня не измѣнится, если мы показателя корня и показателя подкоренного числа на одно и то же число умножимъ или на одно и то же число раздѣлимъ.

I. Утв. $\sqrt[p]{a^q}=\sqrt[pn]{a^{qn}}$

Док. Обозначивъ $\sqrt[p]{a^q}$ буквою x, мы по опредѣленію корня изъ равенства

$\sqrt[p]{a^q}=x$ заключаемъ, что

$a^q=x^p$ Возвысивъ это равенство въ n-ую степень (теор. VII), мы по теоремѣ **94** получаемъ:

$a^{qn}=x^{pn}$ и видимъ такимъ образомъ, что x есть число, которое, будучи возвышено въ pn-ую степень, даетъ a^{qn}. Но это можетъ быть выражено и такъ:

$\sqrt[pn]{a^{qn}}=x$

{Слѣд., по теор. VI:

$\sqrt[p]{a^q}=\sqrt[pn]{a^{qn}}$

II. Утв. $\sqrt[p]{a^q}=\sqrt[p:m]{a^{q:m}}$

Док. При условіи, что m содержится въ p и въ q, мы выраженіе $\sqrt[p]{a^q}$ при помощи доказанной только-что первой части теоремы можемъ всегда представить полученнымъ чрезъ такое преобразованіе:

$$\sqrt[p:m]{a^{q:m}}=\sqrt[(p:m)m]{a^{(q:m)m}}=\sqrt[p]{a^q}$$

изъ чего и слѣдуетъ справедливость II утвержденія.

По введеніи дробныхъ показателей упоминаніе приведеннаго здѣсь условія сдѣлается излишнимъ.

Примѣчаніе.

При преобразованіяхъ корня, о которыхъ говорится въ доказанной теоремѣ, измѣняется число значеній его, какъ это будетъ подробно разсмотрѣно въ слѣдующей главѣ. Имѣя пока возможность показать это только

на вещественныхъ значеніяхъ, сравнимъ для примѣра корни $\sqrt[3]{2^6}$ и $\sqrt[3\cdot 2]{2^{6\cdot 2}} = \sqrt[6]{2^{12}}$: первый изъ нихъ имѣетъ только одно вещественное значеніе 4 а второй два, +4 и —4.

§ 267. **Приведеніе корней къ общему показателю.** Пользуясь послѣднею теоремою, можно корни съ различными показателями преобразовать такъ, что послѣ этого у нихъ окажется одинъ и тотъ же показатель. Этотъ новый показатель будетъ кратнымъ всѣхъ данныхъ. Такое преобразованіе будетъ достигнуто въ наименьшихъ возможныхъ числахъ, если общимъ показателемъ преобразованныхъ корней будетъ избрано общее наименьшее кратное показателей данныхъ корней.

Приводить корни къ общему показателю приходится преимущественно въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется произведеніе или частное корней съ различными показателями замѣнить однимъ корнемъ.

Примѣры.

1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 3^3} = \sqrt[15]{864}$.

2) $\sqrt[18]{a^p} \cdot \sqrt[24]{a^q} \cdot \sqrt[20]{a^r} = \sqrt[360]{a^{20p}} \cdot \sqrt[360]{a^{15q}} \cdot \sqrt[360]{a^{18r}} = \sqrt[360]{a^{20p+15q+18r}}$

3) $\dfrac{\sqrt[16]{a^3}}{\sqrt[36]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[144]{a^{27}}}{\sqrt[144]{a^{20}}} = \sqrt[144]{\dfrac{a^{27}}{a^{20}}} = \sqrt[144]{a^7}$

109 § 268. **Другая возможность извлеченія корня изъ степени.**

Теорема. Мы можемъ извлечь корень изъ степени, дѣля или показателя степени на показателя корня или же показателя корня на показателя степени.

I. Предп. p содержится въ q

Утв. $\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{q}{p}}$.

Док. $\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[p]{a^{\frac{q}{p}\cdot p}}$ **[опред. 53^{6}]**

$= \sqrt[p]{\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^p}$ **[слѣдствіе изъ теор. 94]**

[теор. 96^{2}].

II. Предп. q содержится въ p

Утв. $\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[\frac{p}{q}]{a}$

Док. $\sqrt[p]{a^q} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$ [теор. **102**]

$= \left(\sqrt[q\frac{p}{q}]{a}\right)^q$ [опред. **53**^{б}]

$= \left(\sqrt[q]{\sqrt[\frac{p}{q}]{a}}\right)^q$ [теор. **105**]

$= \sqrt[\frac{p}{q}]{a}$ [опред. **96**^{б}]

§ 269. **Введеніе возвышенія въ дробную степень.** По первоначальному опредѣленію возвышенія въ степень [§ 16] показателемъ ея можетъ быть только абсолютное цѣлое число, притомъ не меньшее, чѣмъ 2. Первое расширеніе понятія о степени состояло во введеніи возвышенія въ 1-ую степень [§ 21]. Затѣмъ оно было вновь расширено: были введены показатель 0 и цѣлые отрицательные показатели [§ 120]. Послѣдняя же теорема (**109**) содержитъ указаніе, въ какомъ смыслѣ слѣдовало бы расширить понятіе о степени введеніемъ дробныхъ показателей, если это только вообще окажется возможнымъ. Такъ какъ такіе показатели ни въ какомъ смыслѣ еще не примѣнялись, то можно было бы согласиться понимать $\sqrt[p]{a^q}$ подъ $a^{\frac{q}{p}}$. Но отъ такого соглашенія получится польза только въ томъ случаѣ, если примѣненіе къ степенямъ съ дробными показателями теоремъ о степеняхъ будетъ давать вѣрные результаты; и потому изслѣдованіе этого вопроса должно предшествовать осуществленію проектируемаго новаго расширенія понятія о степени. Но такому изслѣдованію будетъ равносильно дополненіе доказательствъ теоремъ о степеняхъ доказательствами справедливости ихъ и въ случаѣ дробныхъ показателей. Возможностью этихъ дополненій и будетъ доказана допустимость введенія степеней съ дробными показателями. Избирая послѣдній способъ разсужденій, мы должны будемъ начать съ опредѣленія вводимаго вновь понятія.

Опредѣленіе: Возвысить число въ дробную степень (или потенцировать его на дробь) значитъ возвысить его въ степень, указанную числителемъ ея, и изъ результата извлечь корень степени, указанной знаменателемъ ея. **110**

Короче, въ знакахъ:

Опредѣленіе: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ **110'**

Упоминаемыя же выше дополненія къ доказательствамъ могутъ быть даны въ слѣдующемъ видѣ:

§ 270. **Второе дополненіе къ доказательству теоремы 16*)**

Утв. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Док. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p}$ [определ. **110**]

$= \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}}$ [теор. **108**]

$= \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}}$ [теор. **98**]

$= \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$ [теор. **16**]

Съ другой стороны

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} \quad \text{[определ. 110].}$$

[Слѣд., по теор. VI

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Такимъ же образомъ могутъ быть дополнены доказательства и всѣхъ остальныхъ теоремъ, доказанныхъ въ главѣ XIX и этой, въ которыхъ встрѣчаются степени. Но во избѣжаніе длиннотъ предоставляемъ самимъ учащимся дать эти дополненія въ видѣ упражненія.

§ 271. **Корни съ дробными показателями.** Если возвысить $a^{\frac{m}{n}}$ въ $\left(\frac{n}{m}\right)$-ую степень, то получается.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}} = a.$$

Такимъ образомъ оказывается, что $a^{\frac{m}{n}}$ есть число, которое, будучи возвышено въ $\left(\frac{n}{m}\right)$-ую степень, даетъ a, и которое потому на основаніи опредѣленія корня можетъ быть обозначено символомъ $\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что будетъ только послѣдовательно, если мы, введя возвышеніе въ дробную степень, введемъ также понятіе о корнѣ съ дробнымъ показателемъ, опредѣляя его такъ:

*) Первое дополненіе дано въ § 121.

Опредѣленіе: $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{a^m}$ 111

§ 272. **Степени и корни съ ирраціональными показателями.** Послѣ введенія дробныхъ показателей степеней и корней естественно пойти еще далѣе и ввести для нихъ и ирраціональныхъ показателей. Достиженіе этого расширенія понятія о степени и корнѣ сопряжено съ нѣсколько бо́льшими трудностями, вслѣдствіе чего оно и разсмотрѣно нами, хотя и нѣсколько внѣ очереди, въ предыдущей главѣ, которая знакомитъ съ однимъ изъ способовъ введенія понятій о дѣйствіяхъ надъ ирраціональными числами вообще.

Въ той же главѣ доказано, что, по достиженіи и указаннаго въ этомъ параграфѣ расширенія понятій о дѣйствіяхъ, во всѣхъ выраженіяхъ, въ которыхъ встрѣчаются знаки дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня, буквы могутъ означать какія угодно вещественныя числа при соблюденіи единственнаго условія, чтобы ни эти выраженія, ни части ихъ не означали мнимыхъ величинъ

§ 273. **Извлеченіе корней изъ неравенствъ.**

Теорема 1. При равныхъ положительныхъ показателяхъ корень изъ большаго положительнаго числа больше.

Предп. $a > b$, при чемъ $b > 0$ (слѣд., и $a > 0$);

$$n > 0$$

Утв. $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Док. (отъ противнаго) *).

Допустимъ, что

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$

или

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Тогда, возвысивъ допущенное равенство въ n-ую степень, мы по теоремѣ VII имѣли бы

$$a = b;$$

а возвысивъ допущенное неравенство въ n-ую степень, мы по теоремѣ 1 въ § 130 имѣли бы

$$a < b.$$

---

*) См. стр 226

Но то и другое противорѣчитъ предположенію.

Слѣдовательно, оба допущенія невозможны, а справедливо утвержденіе, что

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Слѣдствіе 1. При положительномъ не измѣняющемся показателѣ корень изъ положительнаго числа измѣняется въ томъ же смыслѣ, въ которомъ измѣняется это число.

Слѣдствіе 2. При положительномъ показателѣ всякій корень изъ правильной дроби есть также правильная дробь и всякій корень изъ неправильной дроби есть также неправильная дробь.

Теорема 2. При извлеченіи корня изъ равныхъ положительныхъ чиселъ, большихъ 1 получается больше тамъ, гдѣ показатель меньше.

Предп. $a = b$, при чемъ $a > 1$ (слѣд. и $b > 1$)
$m > n$.

Утв. $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{b}$

Док. (отъ противнаго).

Допустимъ, что

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{b}$$

или

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}$$

Тогда, возвысивъ первую часть допущеннаго равенства въ m-ую степень, а вторую въ n-ую, мы по теоремѣ 2 въ § 130 имѣли бы

$$a > b,$$

а возвысивъ въ тѣ же степени первую и вторую часть допущеннаго неравенства, мы по теоремѣ 4 въ томъ же § 130 имѣли бы

$$a > b$$

Но это противорѣчитъ предположенію.

Слѣдовательно, оба допущенія невозможны, а справедливо утвержденіе, что

$$\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Слѣдствіе. Корень изъ числа большаго 1 измѣняется въ смыслѣ противоположномъ тому, въ которомъ измѣняется показатель.

Теорема 3. При извлеченіи корня изъ равныхъ положительныхъ чиселъ меньшихъ 1 получается больше тамъ, гдѣ показатель больше

Док. Теорема эта можетъ быть доказана отъ противнаго совершенно такъ же, какъ предыдущая.

Слѣдствіе. Корень изъ положительнаго числа меньшаго 1 измѣняется въ томъ же смыслѣ, въ которомъ измѣняется показатель

Теорема 4. При извлеченіи корней положительныхъ степеней изъ положительныхъ чиселъ бóльшихъ 1 получается больше тамъ, гдѣ основаніе большее и притомъ показатель меньшій

Предп. $a > b$, $b > 1$ (слѣд., и $a > 1$),
$m < n$, при чемъ $m > 0$ (слѣд., и $n > 0$)

Утв. $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}$

Док. (отъ противнаго).

Если бы мы допустили, что

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{b}$$

или что

$$\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{b}$$

то, возвысивъ лѣвыя части этого равенства и неравенства въ m-ую степень, а правыя въ n-ую, мы бы на основаніи предположенія въ первомъ случаѣ по теоремѣ 2, а во второмъ по теоремѣ 4 въ § 130 получили

$$a < b,$$

что противорѣчитъ предположенію.

Слѣдовательно, оба сдѣланныя допущенія невозможны, а справедливо утвержденіе, что

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}$$

Теорема 5. При извлеченіи корней положительныхъ степеней изъ положительныхъ чиселъ меньшихъ 1 получается больше тамъ, гдѣ основаніе большее и притомъ показатель большій

Док. Теорема эта можетъ быть доказана отъ противнаго совершенно такъ же, какъ предыдущая.

Изъ всѣхъ доказанныхъ въ этомъ параграфѣ теоремъ и слѣдствій изъ нихъ легко выводится слѣдующее важное заключеніе:

Слѣдствіе. Всѣ предложенія о потенцированіи неравенствъ (§ 130) остаются въ силѣ и для дробныхъ показателей.

На основаніи же приведеннаго въ § 253 слѣдствія мы заключаемъ, что упомянутыя предложенія остаются въ силѣ и для ирраціональныхъ показателей. А потому мы имѣемъ:

Слѣдствіе. Степени измѣняются въ зависимости отъ измѣненія ихъ основаній и показателей одинаковымъ образомъ для всѣхъ вещественныхъ чиселъ.

§ 274. **Предѣльныя значенія степени.**

Теорема 1. Если

$$a > 1,$$

то

$$a^{+\infty} = +\infty$$
$$a^{-\infty} = 0.$$

Док. Что $a > 1$, мы можемъ выразить, полагая

$$a = 1 + \delta,$$

и δ нѣкоторымъ положительнымъ числомъ. По вспомогательной же теоремѣ, доказанной на стр. 266,

$$(1+\delta)^n > 1 + n\delta.$$

Но какъ бы мало ни было положительное число δ, всегда при безграничномъ возрастаніи n произведеніе $n\delta$ въ концѣ концовъ можетъ стать больше всякаго заданнаго числа. Слѣдовательно, и подавно степень $(1+\delta)^n$ при безграничномъ возрастаніи показателя безгранично увеличивается, ибо хотя примѣненная здѣсь вспомогательная теорема доказана была нами только для того случая, что n положительное *цѣлое* число, но на основаніи теоремы, приведенной въ концѣ предыдущаго параграфа какъ слѣдствіе, сказанное объ увеличеніи степени a^n должно остаться справедливымъ и въ томъ случаѣ, если бы показатель n принималъ при увеличеніи своемъ и дробныя или ирраціональныя значенія.

Получившійся результатъ нашего разсужденія принято выражать такъ:

$$a^{+\infty} = +\infty.$$

Доказательство же второго утвержденія основывается на равенствѣ

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

При безграничномъ увеличенiи числа m знаменатель дроби $\frac{1}{a^m}$, как мы убѣдились въ первой части этого доказательства, безгранично увеличивается, слѣдовательно, дробь безгранично уменьшается, приближаясь къ 0 (см. § 117). А это и принято выражать символами:

$$a^{-\infty}=0.$$

Теорема 2. Если

$$0<a<1$$

то

$$a^{+\infty}=0$$
$$a^{-\infty}=+\infty.$$

Док. Число a будетъ удовлетворять условiямъ

$$0<a<1,$$

если мы, предположивъ b положительнымъ числомъ *бо́льшимъ* 1, положимъ

$$a=\frac{1}{b}$$

Въ такомъ случаѣ будетъ

$$a^n=\frac{1}{b^n}$$

По послѣдней же теоремѣ будетъ

$$b^n=+\infty \text{ при } n=+\infty$$

и

$$b^n=0 \text{ при } n=-\infty;$$

слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ [§ 117]

$$a^{+\infty}=\frac{1}{+\infty}=0 \qquad \text{въ первомъ случаѣ}$$

и

$$a^{-\infty}=\frac{1}{0}=+\infty \qquad \text{во второмъ случаѣ.}$$

§ 275. **Еще нѣкоторые виды неопредѣленностей.** Къ неопредѣленностямъ, разсмотрѣннымъ въ § 118, мы должны теперь добавить выраженiя

$$0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty \text{ и } \sqrt[0]{1},$$

которыя также неопредѣленны, какъ видно изъ слѣдующихъ разъясненiй.

1) Въ равенствѣ

$$\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}$$

лѣвая часть при $a=0$ превращается въ $\frac{0}{0}$, правая же въ 0^0. Поэтому, разсуждая такимъ же образомъ, какъ въ § 118, мы заключаемъ, что выраженіе 0^0 такъ же, какъ и $\frac{0}{0}$, неопредѣленно, т. е. можетъ означать всякое число.

2) Въ равенствѣ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

лѣвая часть при $n=0$ и $b=0$ превращается въ ∞^0, правая же въ выраженіе $\frac{1}{0^0}$, которое вслѣдствіе неопредѣленности знаменателя и само должно быть неопредѣленнымъ. Слѣдовательно, всякое выраженіе, которое при какихъ-либо значеніяхъ буквъ принимаетъ видъ ∞^0, дѣлается при этихъ значеніяхъ неопредѣленнымъ. Другими словами, и ∞^0 есть одинъ изъ видовъ неопредѣленности.

3) Въ равенствѣ

$$\left(\frac{a}{a}\right)^n = \frac{a^n}{a^n}$$

лѣвая часть, равная всегда 1^n, при $n=\infty$ превращается въ 1^∞, правая же въ $\frac{0}{0}$, если $a<1$, и въ $\frac{\infty}{\infty}$, если $a>1$, т. е. въ обоихъ случаяхъ въ выраженія, означающія неопредѣленность. Слѣдовательно и 1^∞ есть одинъ изъ видовъ неопредѣленности.

4) Въ равенствѣ

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

лѣвая часть при $a=1$ и $n=0$ превращается въ $\sqrt[0]{1}$, правая же въ выраженіе 1^∞, означающее, какъ мы только-что разъяснили, неопредѣленность. Слѣдовательно, и $\sqrt[0]{1}$ есть одинъ изъ видовъ неопредѣленности.

ГЛАВА XXV.

Комплексныя числа.

§ 276. **Цѣль введенія мнимыхъ чиселъ.** Въ §§ 138 и 139 было указано на то, что символъ $\sqrt[n]{a}$ будетъ имѣть смыслъ при всѣхъ значеніяхъ a только по введеніи двухъ новыхъ родовъ чиселъ, чиселъ ирраціональныхъ и мнимыхъ. Подробному изученію первыхъ была посвящена XXIII глава.

Теперь же намъ предстоитъ и по отношенію къ мнимымъ числамъ заняться изслѣдованіемъ аналогичнымъ всѣмъ тѣмъ, которыя мы уже производили, когда расширяли понятіе о числѣ (см. главы V, XI, XX, XXIII).

Припомнимъ, что разность $a - b$ пріобрѣла не ограниченный ничѣмъ смыслъ послѣ введенія отрицательныхъ чиселъ вмѣстѣ съ 0, что частному $\frac{a}{b}$ былъ приданъ смыслъ для всякихъ значеній a и b (только дѣленіе на 0 не было допущено) введеніемъ дробей, и что смыслъ корня $\sqrt[n]{a}$ былъ обобщенъ введеніемъ иррацiональныхъ чиселъ, но что этого оказалось недостаточно для того, чтобы онъ имѣлъ смыслъ всегда. Ясно, что обнаружившійся уже въ достаточной степени общій планъ, по которому возводится зданіе общей ариѳметики, оказался бы нарушеннымъ, если бы не достигнуто было приданіе смысла символу $\sqrt[n]{a}$ и въ томъ единственномъ случаѣ, который остался въ сущности еще совсѣмъ почти нами не выясненнымъ, а именно, въ случаѣ, когда a отрицательное, а n четное число. На этомъ основаніи введеніе мнимыхъ чиселъ должно быть признано желательнымъ. Но оно было бы по меньшей мѣрѣ излишнимъ, если бы природа ихъ оказалась такою, что надъ ними нельзя было бы производить ариѳметическихъ дѣйствій по правиламъ, не нарушающимъ установленныхъ уже нами общихъ законовъ, которымъ эти дѣйствія подчиняются. Однако, въ послѣдующемъ будутъ доказаны не только возможность распространенія и на мнимыя числа понятій о дѣйствіяхъ, но и польза отъ такихъ обобщеній для теоріи и даже извѣстный реальный смыслъ, который можетъ быть приданъ какъ мнимымъ числамъ, такъ и дѣйствіямъ надъ ними.

§ 277. **Мнимая единица.** Простѣйшій видъ мнимаго числа есть квадратный корень изъ отрицательнаго числа, напр., $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-\frac{4}{25}}$ и т. п. Собственно нѣсколько преждевременно называть числами символы въ родѣ тѣхъ, которые мы только-что привели какъ примѣры, такъ какъ пока нами выяснена только желательность введенія еще чиселъ новаго рода. Но допустивъ, что въ такіе символы можетъ быть вложенъ смыслъ и позволивъ себѣ на основаніи этого преобразованія ихъ по правиламъ, установленнымъ для вещественныхъ чиселъ, мы можемъ представить приведенныя выраженія въ такомъ видѣ:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9\cdot(-1)} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} = 3\sqrt{-1},$$

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5\cdot(-1)} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{-1},$$

$$\sqrt{-\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{4}{25}\cdot(-1)} = \sqrt{\frac{4}{25}}\cdot\sqrt{-1} = \frac{2}{5}\sqrt{-1}$$

Общее же правило этихъ преобразованій мы можемъ выразить такимъ образомъ:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a\,(-1)} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1}$$

или

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2\,.\,(-1)} = \sqrt{b^2}\,.\,\sqrt{-1} = b\sqrt{-1}$$

А если мы всѣ полученные результаты возвысимъ въ квадратъ по правиламъ, установленнымъ въ главѣ XIX для возвышенія выраженій въ степень, полагая при этомъ

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1,$$

то получимъ -9, -5, $-\frac{4}{25}$, $-a$ и $-b^2$, чѣмъ по общему опредѣленію корня [96] подтверждается, что произведенныя нами преобразованія допустимы и для тѣхъ чиселъ (мнимыхъ), которыя мы собираемся теперь ввести.

Изъ этихъ преобразованій мы видимъ, что квадратный корень изъ всякаго отрицательнаго числа можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія выраженія $\sqrt{-1}$ на нѣкоторое вещественное число. Мы постепенно убѣдимся, что всѣ корни четныхъ степеней изъ отрицательныхъ чиселъ и всѣ рѣшительно выраженія, въ которыхъ встрѣчаются такіе корни, могутъ быть преобразованы въ выраженія, въ которыхъ единственнымъ не вещественнымъ числомъ окажется $\sqrt{-1}$, встрѣчающійся всего только одинъ разъ. Потому символъ $\sqrt{-1}$ получилъ особое названіе, знаменитымъ же математикомъ Гауссомъ для него введено и особое обозначеніе: $\sqrt{-1}$ называютъ мнимою единицею и обозначаютъ буквою i.

Съ введеніемъ этихъ названій соединяется введеніе новаго понятія: создается число новаго рода, которому присваивается свойство, что квадратъ его равенъ -1.

Сказанное можетъ быть выражено слѣдующими очень важными равенствами:

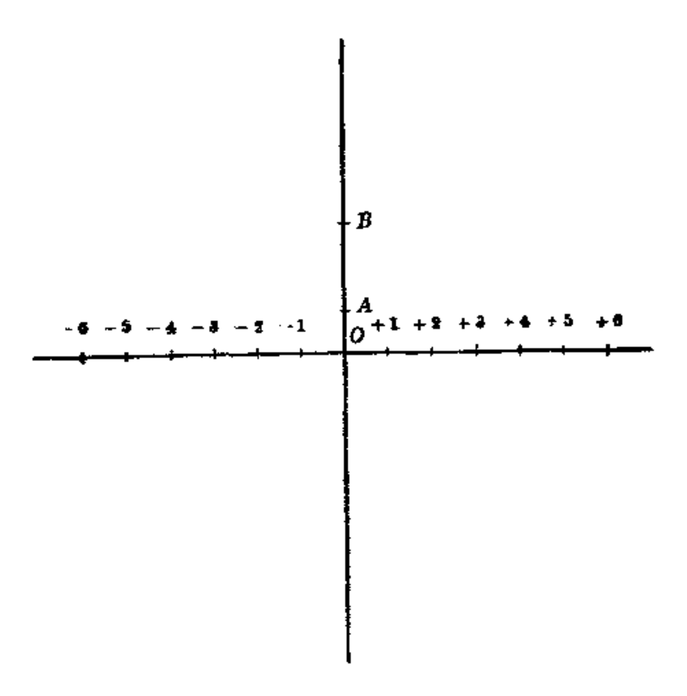
112 **Опредѣленіе:** $\sqrt{-1} = i$

112a **Слѣдствіе:** $i^2 = -1$.

§ 278. **Геометрическое изображеніе мнимой единицы и вообще мнимаго квадратнаго корня.** Въ геометріи доказывается, что квадратъ числа, выражающаго длину перпендикуляра, возставленнаго въ полукругѣ къ

діаметру, равняется произведенію чиселъ, выражающихъ (въ той же линейной мѣрѣ) длину обоихъ отрѣзковъ этого діаметра, на которые онъ дѣлится основаніемъ этого перпендикуляра.

Еели мы на прямой чиселъ [§ 192] изъ точки O опишемъ полукругъ радіусомъ равнымъ разстоянію отъ O до точки, соотвѣтствующей числу $+1$, и возставимъ къ этой прямой въ O перпендикуляръ, то квадратъ числа выражающаго длину его, долженъ равняться произведенію чиселъ, выражающихъ длину отрѣзковъ діаметра отъ O до полукруга, т. е. произведенію $(+1) . (-1)$. А такъ какъ это произведеніе равно -1, то относительно построеннаго перпендикуляра можно будетъ сказать, что онъ содержитъ $\sqrt{-1}$ такихъ отрѣзковъ m, которые откладываются на прямой чиселъ для изображенія цѣлыхъ чиселъ, другими словами, что длина этого перпендикуляра OA выражается числомъ i.



Если бы мы на прямой чиселъ изъ точки O описали полукругъ радіусомъ, равнымъ $3m$, то онъ пересѣкт бы продолженіе перпендикуляра OA въ точкѣ B, которой разстояпіе отъ O на основаніи такихъ же, какъ въ первомъ случаѣ, разсужденій нужно было бы выразить числомъ, котораго квадратъ равенъ произведенію $(+3) . (-3)$, другими словами числомъ $\sqrt{-9}$ или $3i$. А это вполнѣ согласно съ тѣмъ, что отрѣзокъ OB въ 3 раза больше отрѣзка OA.

Чтобы изобразить геометрически число $\sqrt{-5}$, можно на прямой чиселъ полукругъ описать радіусомъ $3m$ изъ точки, соотвѣтствующей числу -2. Въ такомъ случаѣ отрѣзки діаметра, на которые онъ дѣлится возставленнымъ уже перпендикуляромъ, нужно будетъ выразить числами $+1$ и -5, слѣдовательно длину отрѣзка, отсѣкаемаго полукругомъ отъ перпендикуляра, числомъ $\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$, причемъ не трудно убѣдиться, что онъ въ $\sqrt{5}$ разъ больше отрѣзка OA, являющагося изображеніемъ мнимой единицы.

Такіе же перпендикуляры, какіе мы построили, возможны и на другой сторонѣ прямой чиселъ, и чтобы отличить первые отъ вторыхъ, логично длину первыхъ выразить числами $+i$, $+3i$ и $+\sqrt{5}\,.\,i$ длину же послѣднихъ числами $-i$, $-3i$ и $-\sqrt{5}\,.\,i$.

Представивъ же себѣ построенный нами перпендикуляръ продолженнымъ въ обѣ стороны безгранично, мы могли бы его назвать прямою мнимыхъ чиселъ, которая бы изображала получающійся новый запасъ чиселъ: положительныхъ мнимыхъ и отрицательныхъ мнимыхъ.

§ 279. **Комплексныя числа.** При описанныхъ въ § 277 преобразованіяхъ тѣхъ особыхъ выраженій, о которыхъ тамъ была рѣчь, получающіеся результаты только въ исключительныхъ случаяхъ будутъ произведеніями i на какое-либо вещественное число. Обыкновенно же послѣ такихъ преобразованій будутъ получаться выраженія вида $A+Bi$, гдѣ A и B какія-либо вещественныя числа. Предстоящими разсужденіями будетъ постепенно доказываться, что на выраженія такого рода могутъ быть распространены понятія объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ съ сохраненіемъ основныхъ законовъ, касающихся этихъ дѣйствій. Въ слѣдующемъ же параграфѣ будетъ показано, что такого рода выраженіямъ можетъ быть также дано геометрическое толкованіе.

Въ виду всего этого мы такимъ выраженіямъ присваиваемъ названіе чиселъ и опредѣляемъ ихъ такъ:

113 **Опредѣленіе.** Выраженіе $a+bi$, въ которомъ a и b какія-либо вещественныя числа, а i мнимая единица, называется комплекснымъ числомъ.

Въ немъ a называется его вещественною частью, bi его мнимою частью, b коэффиціентомъ единицы i.

Это опредѣленіе необходимо дополнить приводимыми ниже разъясненіями нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, при чемъ удобно уже тутъ ввести понятіе объ умноженіи мнимаго числа на 0.

114 **Опредѣленіе.** Комплексное число называется чисто мнимымъ числомъ, когда его вещественная часть равна 0.

115 **Опредѣленіе.** Произведеніе мнимаго числа на 0 должно считать равнымъ 0.

Слѣдствіе. Комплексное число, въ которомъ коэффиціентъ мнимой единицы равенъ 0, есть вещественное число. **116**

Опредѣленіе. Числа вида $a+bi$ и $a-bi$, то есть комплексныя числа, отличающіяся другъ отъ друга только знакомъ передъ мнимою частью, называются *сопряженными*. **117**

Опредѣленіе. Числа вида $a+bi$ и $-a-bi$, то есть комплексныя числа, отличающіяся другъ отъ друга только знаками предъ вещественною и мнимою частью, называются *равными и противоположными*. **118**

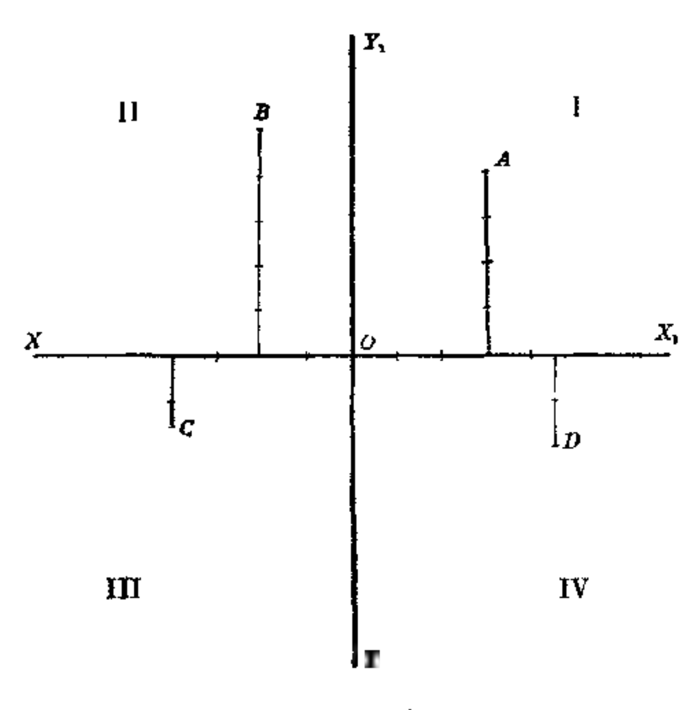
Важное замѣчаніе. Комплексное число $a+bi$ можетъ быть каждымъ вещественнымъ числомъ, если $b=0$, и каждымъ мнимымъ квадратнымъ корнемъ, если $a=0$. Потому **комплексныя числа**, обнимая и всѣ числа, которыя нами введены были до сихъ поръ, **представляютъ собою самый общій видъ чиселъ**.

§ 280. **Плоскость чиселъ.** Наглядное геометрическое изображеніе имѣющагося у насъ запаса чиселъ при помощи прямой чиселъ, къ которой въ § 278 прибавилась прямая чистыхъ мнимыхъ чиселъ, полезно теперь дополнить геометрическимъ изображеніемъ комплексныхъ чиселъ, чтобы имѣть представленіе о томъ, въ какой мѣрѣ возрастаетъ запасъ чиселъ съ введеніемъ послѣднихъ, и чтобы провѣрить геометрически смыслъ введенія дѣйствій надъ ними. Указаніе же относительно возможности и способа такого изображенія можетъ быть почерпнуто изъ разсужденій въ названномъ параграфѣ, и изображаются комплексныя числа геометрически такъ:

Въ концѣ отрѣзка, изображающаго вещественную часть комплекснаго числа, возставляется къ прямой чиселъ перпендикуляръ, изображающій его мнимую часть. Ломаная линія, состоящая изъ упомянутыхъ отрѣзка и перпендикуляра, и служитъ изображеніемъ комплекснаго числа, конецъ же перпендикуляра называется точкою, соотвѣтствующею этому числу.

Во избѣжаніе недоразумѣній упомянемъ, хотя на это и указывается уже въ § 278, что перпендикуляры, изображающіе мнимыя части комплексныхъ чиселъ, должны быть возставляемы къ прямой чиселъ вверхъ или внизъ отъ нея, смотря по тому, положительна ли эта часть комплекснаго числа или отрицательна.

Построивъ прямую чиселъ XX_1 и перпендикулярную къ ней прямую чистыхъ мнимыхъ чиселъ YY_1, мы видимъ, что вся плоскость ими дѣлится



на четыре части, которыя называются четвертями первой (I) второй (II), третьей (III) и четвертой (IV) въ томъ порядкѣ, который указанъ въ чертежѣ. Въ немъ же мы приводимъ примѣры изображенія комплексныхъ чиселъ: точка A въ первой четверти изображаетъ число $3+4i$, точка B во второй четверти число $-2+5i$, точка C въ третьей четверти число $-4-1\frac{1}{2}i$, точка D въ четвертой четверти число $4\frac{1}{2}-2i$.

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что отъ знаковъ предъ вещественной и мнимой частями комплекснаго числа зависитъ, въ которой четверти находится точка, соотвѣтствующая ему.

Такъ какъ изъ каждой точки плоскости возможенъ на прямую чиселъ перпендикуляръ, то ясно, что *каждая точка плоскости соотвѣтствуетъ какому-либо комплексному числу. Вся же плоскость со всѣми ея точками является изображеніемъ всего запаса всѣхъ вообще существующихъ чиселъ, и если ею пользуются для этой цѣли, то ее называютъ* ***плоскостью чиселъ.***

§ 281. **Дѣйствія надъ мнимыми числами.** Вводя дѣйствія надъ комплексными числами, мы напередъ должны ожидать, что при этомъ не создастся противорѣчій и несообразностей только въ томъ случаѣ, если мы дадимъ такія опредѣленія этихъ дѣйствій, что преобразованія надъ выраженіями, содержащими комплексныя числа, можно будетъ производить по установленнымъ уже нами для вещественныхъ чиселъ правиламъ, полагая, конечно, при этомъ

$$i^2 = -1.$$

Только будучи введены въ такомъ смыслѣ, дѣйствія надъ комплексными числами войдутъ стройно въ систему общей ариѳметики и заполнятъ оставшіеся еще пока пробѣлы.

Выполненными же считаются обыкновенно предписанныя какія-либо дѣйствія надъ комплесными числами по полученіи результата также въ видѣ комплекснаго числа.

§ 282. **Сложеніе комплексныхъ чиселъ.** На основаніи разсужденій въ предыдущемъ параграфѣ мы вводимъ сложеніе двухъ и нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ въ смыслѣ, выражаемомъ слѣдующими двумя равенствами:

Опредѣленіе:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Опредѣленіе:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)+(a_3+b_3i)+\ldots+(a_n+b_ni)=$$
$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)i \quad ^{*)}$$

Изъ этихъ же опредѣленій вытекаютъ слѣдующія истины:

Слѣдствіе 1. Комплексное число можетъ быть названо суммою его вещественной и его мнимой части.

Слѣдствіе 2. Сумма двухъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ есть число вещественное.

Слѣдствіе 3. Сумма двухъ равныхъ и противоположныхъ комплексныхъ чиселъ равна 0 (ср. **28** и **29**)

§ 283. **Равенство комплексныхъ чиселъ.** Сложивъ равенство

$$a+bi=c+di$$

съ равенствомъ

$$-c-bi=-c-bi,$$

мы получаемъ равенство:

$$a-c=(d-b)i.$$

Но такъ какъ вещественное число не можетъ равняться мнимому, такъ же, какъ по природѣ своей не могутъ равняться иррацiональное число

---

*) Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что и для комплексныхъ чиселъ остаются въ силѣ перемѣстительный и сочетательный законы сложенія

раціональному, дробное число цѣлому, отрицательное положительному, то послѣднее равенство возможно только при условіи, что и

$$a-c=0$$

и

$$d-b=0,$$

другими словами, только при условіи, что

$$a=c$$

и

$$d=b.$$

Этимъ разсужденіемъ указывается, что понятіе о равенствѣ комплексныхъ чиселъ можетъ быть введено только въ такомъ смыслѣ:

119 **Опредѣленіе.** Два комплексныхъ числа называются и могутъ считаться равными только, если ихъ вещественныя части равны между собою и ихъ мнимыя части равны между собою (другими словами, если въ нихъ равны также коэффиціенты мнимыхъ единицъ).

Слѣдствіе. Равенство

$$a+bi=0$$

возможно только при условіи, что и

$$a=0$$

и

$$b=0.$$

Примѣчаніе. Понятія «больше» и «меньше» на комплексныя числа не распространены.

§ 284. **Вычитаніе комплексныхъ чиселъ.** Преобразовавъ въ соотвѣтствіи съ высказанными въ § 281 положеніями выраженіе $(a+bi)-(c+di)$, мы находимъ:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Сложивъ же полученное комплексное число $(a-c)+(b-d)i$ съ $c+di$, мы получаемъ $a+bi$ и убѣждаемся такимъ образомъ, что всегда можетъ быть найдено число, которое, будучи сложено съ $c+di$, дастъ $a+bi$. Изъ этого же мы заключаемъ, что безъ какихъ бы то ни было препятствій можетъ быть введено вычитаніе комплексныхъ чиселъ, съ сохраненіемъ общаго опредѣленія этого дѣйствія:

Опредѣленіе. Вычесть комплексное число $c+di$ изъ комплекснаго числа $a+bi$ значитъ найти число, которое, будучи сложено съ $c+di$, дастъ $a+bi$.

Вслѣдствіе того, что опредѣленія сложенія и вычитанія комплексныхъ чиселъ вполнѣ согласованы съ понятіями о тѣхъ же дѣйствіяхъ надъ вещественными числами, всѣ теоремы, относящіяся къ сложенію и вычитанію, пріобрѣтаютъ силу и для комплексныхъ чиселъ.

Между прочимъ на основаніи этого всякая разность двухъ комплексныхъ чиселъ можетъ разсматриваться какъ сумма уменьшаемаго и комплекснаго числа, равнаго и противоположнаго вычитаемому; всякій же многочленъ, имѣющій членами комплексныя числа, всегда можетъ быть представленъ въ видѣ суммы комплексныхъ чиселъ или разсматриваемъ какъ таковой.

§ 285. **Умноженіе комплексныхъ чиселъ.** Опредѣленія умноженія на абсолютное цѣлое число, на дробь и на относительныя раціональныя числа безъ какихъ бы то ни было препятствій остаются примѣнимыми и въ томъ случаѣ, когда множимое комплексное число.

Теорема о томъ, что распредѣлительный законъ умноженія остается въ силѣ и для ирраціональнаго множителя, и послѣднее слѣдствіе въ главѣ объ ирраціональныхъ числахъ содержатъ указаніе, что умноженіе комплекснаго числа и на ирраціональное число (μ) должно быть опредѣлено равенствомъ:

$$\mu(a+bi)=\mu a+\mu bi.$$

Что же касается умноженія на комплексное число, то положеніями, высказанными въ § 281, указывается, что оно должно быть введено въ слѣдующемъ смыслѣ:

Опредѣленіе. Подъ произведеніемъ комплексныхъ чиселъ $a+bi$ и $c+di$ другъ на друга должно понимать комплексное число, получающееся чрезъ преобразованіе выраженія $(a+bi)(c+di)$ по правилу умноженія многочленовъ другъ на друга съ соблюденіемъ условія, что $i^2=-1$.

Это опредѣленіе можетъ быть выражено также слѣдующимъ равенствомъ:

Опредѣленіе:

$$(a+bi)(c+di)=ac+bdi^2+adi+bci=(ac-bd)+(ad+bc)i \text{ *)}.$$

Ясно, что произведеніе двухъ комплексныхъ чиселъ можетъ быть умножено по тому же опредѣленію на третье комплексное число и т. д., и что данное опредѣленіе умноженія можетъ быть распространено и на произвольное количество комплексныхъ сомножителей.

*) Произведя согласно данному опредѣленію умноженіе $(c+di)(a+bi)$, мы убѣждается, что и для комплексныхъ чиселъ остается въ силѣ перемѣстительный законъ умноженія.

Примѣры.

1) $(3-8i)\left(\frac{3}{4}+i\right)=2\frac{1}{4}-6i+3i-8i^2=10\frac{1}{4}-3i$.

2) $\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-5}=-\sqrt{15}$, такъ какъ

$\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-5}=(0+\sqrt{3}\,.\,i)\,(0+\sqrt{5}\,.\,i)=\sqrt{15}\,.\,i^2=-\sqrt{15}$

3) $(x+\sqrt{-5})\,(x-\sqrt{-5})=(x+\sqrt{5}\,.\,i)\,(x-\sqrt{5}\,.\,i)=x^2-5i^2=x^2+5$

§ 286. **Знакъ произведенія двухъ чистыхъ мнимыхъ чиселъ.** Если бы мы позволили себѣ въ послѣднемъ примѣрѣ считать: $\sqrt{-5}\,.\,\sqrt{-5}=\sqrt{(-5)(-5)}=\sqrt{+25}=5$, то получили бы невѣрный результатъ x^2-5, ибо

$$x^2-5=(x+\sqrt{5})\,(x-\sqrt{5}).$$

Въ поясненіе же того, что должно считать

$$\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-5}=-\sqrt{15},$$

произведемъ слѣдующее преобразованіе.

$$\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-5}=\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{(-3)\,.\,\frac{5}{3}}=\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$=(\sqrt{-3})^2\,.\,\sqrt{\frac{5}{3}}=-3\sqrt{\frac{5}{3}}=-\sqrt{\frac{9\,.\,5}{3}}=-\sqrt{15}$$

Если бы мы себѣ позволили считать $\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-5}=\sqrt{(-3)\,(-5)}=\sqrt{15}$, то получилась бы несообразность, что $\sqrt{15}=-\sqrt{15}$.

Такія несообразности устраняются только, если при умноженіи чистыхъ мнимыхъ чиселъ другъ на друга будетъ соблюдаться правило, удобнѣе всего выражаемое слѣдующимъ равенствомъ:

Слѣдствіе: $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$.

Въ соотвѣтствіи съ этимъ необходимо считать:

Слѣдствія:

$$\left(+\sqrt{-a}\right)\left(+\sqrt{-b}\right)=-\sqrt{ab}$$
$$\left(+\sqrt{-a}\right)\left(-\sqrt{-b}\right)=+\sqrt{ab}$$
$$\left(-\sqrt{-a}\right)\left(+\sqrt{-b}\right)=+\sqrt{ab}$$
$$\left(-\sqrt{-a}\right)\left(-\sqrt{-b}\right)=-\sqrt{ab}$$

Примѣчаніе. Приведенныя правила необходимо соблюдать и въ тѣхъ случаяхъ, когда a и b относительныя числа.

§ 287. Умноженіе суммы комплексныхъ чиселъ.

Теорема. И въ томъ случаѣ, когда k, z_1, z_2, z_3, ... z_n комплексныя числа,

$$k(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) = kz_1 + kz_2 + \ldots + kz_n \quad *)$$

Предп.
$$k = m + ni$$
$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$
$$\cdots$$
$$z_n = a_n + b_n i.$$

Утв. $k(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) = kz_1 + kz_2 + \ldots + kz_n$.

Док. Для произведенія суммы двухъ комплексныхъ слагаемыхъ на комплексное число мы на основаніи опредѣленій сложенія и умноженія комплексныхъ чиселъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} k(z_1 + z_2) &= (m + ni)[(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)] \\ &= (m + ni)[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i] \\ &= m(a_1 + a_2) - n(b_1 + b_2) + [m(b_1 + b_2) + n(a_1 + a_2)]i \\ &= ma_1 + ma_2 - nb_1 - nb_2 + (mb_1 + mb_2 + na_1 + na_2)i; \end{aligned}$$

съ другой стороны:

$$\begin{aligned} kz_1 + kz_2 &= (m + ni)(a_1 + b_1 i) + (m + ni)(a_2 + b_2 i) \\ &= ma_1 - nb_1 + na_1 i + mb_1 i + ma_2 - nb_2 + na_2 i + mb_2 i \\ &= ma_1 + ma_2 - nb_1 - nb_2 + (mb_1 + mb_2 + na_1 + na_2)i. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ VI, оказывается, что

$$k(z_1 + z_2) = kz_1 + kz_2,$$

то есть, что теорема справедлива для указаннаго выше случая.

Чтобы доказать справедливость ея для трехъ комплексныхъ слагаемыхъ, назовемъ комплексное число равное $z_1 + z_2$ буквою x. Тогда основываясь на доказанномъ уже случаѣ теоремы, мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} k(z_1 + z_2 + z_3) &= k(x + z_3) \\ &= kx + kz_3 \\ &= k(z_1 + z_2) + kz_3 \\ &= kz_1 + kz_2 + kz_3. \end{aligned}$$

---

*) Другими словами, и для комплексныхъ чиселъ остается въ силѣ распредѣлительный законъ умноженія.

Такимъ же образомъ можно перейти отъ случая умноженія суммы трехъ комплексныхъ слагаемыхъ къ случаю, когда слагаемыхъ четыре, и т. д., изъ чего слѣдуетъ, что утвержденіе справедливо для произведенія суммы всякаго числа комплексныхъ слагаемыхъ на комплексное число.

§ 288. **Разложеніе суммы двухъ квадратовъ на двучленныхъ множителей.** По введеніи понятія объ умноженіи на комплексное число дѣлается возможнымъ невыполнимое безъ этого разложеніе суммы двухъ квадратовъ на двучленныхъ сомножителей: безъ дальнѣйшихъ объясненій понятно, что

$$a^2+b^2=(a+bi)(a-bi).$$

Слѣдствіе. Произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ есть вещественное число.

§ 289. **Дѣленіе комплексныхъ чиселъ.** Преобразовавъ выраженіе $\frac{a+bi}{c+di}$ при посредствѣ расширенія его на $c-di$, мы получаемъ:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i.$$

Умноживъ же полученное выраженіе на $c+di$, мы находимъ:

$$\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i\right)(c+di)=\frac{ac^2+bcd+bcdi^2-ad^2i^2+acdi+bd^2i+bc^2i-acdi}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac^2+bcd-bcd+ad^2+b(c^2+d^2)i}{c^2+d^2}=\frac{a(c^2+d^2)+b(c^2+d^2)i}{c^2+d^2}=a+bi.$$

Такъ мы убѣждаемся, что всегда можетъ быть найдено комплексное число, которое, будучи умножено на $c+di$, дастъ $a+bi$.

Слѣдовательно, ничто не препятствуетъ тому, чтобы введено было и дѣленіе комплексныхъ чиселъ другъ на друга, притомъ съ сохраненіемъ общаго опредѣленія этого дѣйствія:

Опредѣленіе. Раздѣлить комплексное число $a+bi$ на комплексное число $c+di$ значитъ найти число, которое, будучи умножено на $c+di$, дастъ $a+bi$.

Примѣчаніе. Какъ прежде былъ признанъ недопустимымъ одинъ случай дѣленія [§ 116], такъ и тутъ должно считать недопустимымъ дѣленіе на $c+di$ въ томъ случаѣ, когда и

$$c=0$$

и

$$d=0$$

Послѣ введенія умноженія комплексныхъ чиселъ, вполнѣ согласованнаго съ понятіемъ объ умноженіи вещественныхъ чиселъ другъ на друга, и послѣ распространенія общаго опредѣленія дѣленія и на комплексныя числа *всѣ теоремы объ умноженіи и дѣленіи и о дѣйствіяхъ надъ частными пріобрѣтаютъ силу и для этого послѣдняго рода чиселъ*

Примѣры.

Преобразованіе частнаго съ комплекснымъ дѣлителемъ въ комплексное число удобнѣе всего произвести чрезъ расширеніе на комплексное число сопряженное съ дѣлителемъ.

1) $$\frac{9}{2+\sqrt{-5}}=\frac{9(2-\sqrt{-5})}{(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})}=\frac{9(2-\sqrt{-5})}{4-5i^2}=\frac{9(2-\sqrt{-5})}{9}=2-\sqrt{-5}=2-\sqrt{5}\,.\,i\,.$$

2) $$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$$

3) $$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}\,.\,i}{\sqrt{b}\,.\,i}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Формулировать обнаруживающуюся послѣднимъ преобразованіемъ истину!

§ 290. **Возвышеніе комплексныхъ чиселъ въ степень.** Безъ какихъ бы то ни было трудностей понятіе о возвышеніи въ цѣлую положительную степень, въ томъ числѣ и въ первую, можетъ быть распространено и на тотъ случай, когда основаніе степени комплексное число. Равнымъ образомъ не вызываетъ ни противорѣчій, ни несообразностей распространеніе на тотъ же случай понятій о степеняхъ съ показателемъ 0 и отрицательными показателями.

Введеніе этихъ понятій опредѣляется слѣдующими равенствами, въ которыхъ буква n означаетъ абсолютное цѣлое число:

Опредѣленія:

$$(a+bi)^n=\underbrace{(a+bi)(a+bi)(a+bi)\ldots(a+bi)}_{n\text{ сомножителей}}.$$

$$(a+bi)^1=a+bi.$$

$$(a+bi)^0=1.$$

$$(a+bi)^{-n}=\frac{1}{(a+bi)^n}.$$

§ 291. **Цѣлыя степени мнимой единицы.** Если возвысимъ мнимую единицу въ 1-ую, 2-ую, 3-ю и т. д. степени, то получаемъ:

$$\begin{aligned}
&i^1=i\\
&i^2=-1 \qquad\qquad\qquad [112^*]\\
&i^3=i^2\,.\,i=(-1)\,.\,i=-i\\
&i^4=i^3\,.\,i=(-i)\,.\,i=-i^2=-(-1)=+1\\
&i^5=i^4\,.\,i=(+1)\,.\,i=i\\
&i^6=i^5\,.\,i=i\,.\,i=i^2=-1
\end{aligned}$$

и т. д.

И такъ какъ для всякаго цѣлаго n

$$i^{4n}=(i^4)^n=(+1)^n=1,$$

то должно быть:

$$\begin{aligned}
&i^{4n+1}=i^{4n}\,.\,i=(+1)\,.\,i=i\\
&i^{4n+2}=i^{4n}\,.\,i^2=(+1)\,.\,i^2=(+1)(-1)=-1\\
&i^{4n+3}=i^{4n}\,.\,i^3=(+1)\,.\,(-i)=-i.
\end{aligned}$$

Всякое же цѣлое число есть непремѣнно или кратное 4-хъ или на 1 или на 2 или на 3 больше такого кратнаго. Поэтому всякая цѣлая степень мнимой единицы только и можетъ равняться или $+1$, или i, или -1, или $-i$, а которому именно изъ этихъ значенiй, это въ общемъ видѣ выражаютъ слѣдующiя доказанныя выше равенства, въ которыхъ n можетъ означать и отрицательное цѣлое число:

$$\begin{aligned}
&i^{4n}=+1.\\
&i^{4n+1}=i\\
&i^{4n+2}=-1\\
&i^{4n+3}=-i.
\end{aligned}$$

Примѣры.

1) $i^{75}=-i$, такъ какъ чрезъ дѣленiе 75 на 4 мы узнаемъ, что $75=4.18+3$.

2) $i^{-17}=i^{-4.5+3}=-i$.

§ 292. **Извлеченiе корня изъ комплекснаго числа.** Ниже будетъ показано, что есть способъ всегда найти комплексное число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, дастъ любое данное комплексное число. Поэтому общее опредѣленiе корня n-ой степени можетъ быть распространено и на тотъ случай, что подкоренная величина есть комплексное число:

Опредѣленiе. Извлечь корень n-ой степени изъ $a+bi$ значитъ найти число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, дастъ $a+bi$.

Послѣ же согласованія понятій о возвышеніи въ степень комплекснаго числа и извлеченія корня изъ комплекснаго числа съ таковыми же понятіями въ области вещественныхъ чиселъ и **всѣ теоремы о степеняхъ и корняхъ пріобрѣтаютъ силу и для тѣхъ случаевъ, когда основанія степеней и подкоренныя величины суть комплексныя числа.**

Изображеніе же корня изъ комплекснаго числа въ видѣ комплекснаго числа алгебраически возможно только въ исключительныхъ случаяхъ. Такъ, напр., $\sqrt{a+bi}$ можетъ быть приведенъ къ этому виду при помощи формулы, выведенной въ § 260 для преобразованія корня изъ двучлена въ сумму и разность двухъ корней. При помощи ея мы получаемъ:

$$\sqrt{a\pm bi}=\sqrt{a+\sqrt{-b^2}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Такъ какъ

$$\sqrt[4]{a+bi}=\sqrt{\sqrt{a+bi}}$$

$$\sqrt[8]{a+bi}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{a+bi}}}$$

и т. д.,

то послѣдовательнымъ примѣненіемъ указаннаго способа можно было бы преобразовать въ комплексное число корни 4-ой, 8-ой и т. д. степени изъ комплекснаго числа, вообще корни, имѣющіе показателями какую-либо степень 2-хъ.

Но рѣшеніе задачи, состоящей въ такомъ преобразованіи, въ сильной степени упрощается и притомъ дѣлается возможнымъ въ общемъ видѣ, если прибѣгнуть къ помощи тригонометріи. Примѣненіе тригонометрическихъ функцій оказалось вообще весьма удобнымъ вспомогательнымъ средствомъ при выполненіи дѣйствій второго (умноженіе и дѣленіе) и третьяго (возвышеніе въ степень и извлеченіе корня) разряда надъ комплексными [redacted]

§ 293. **Свѣдѣнія, которыя необходимо предположить извѣстными изъ тригонометріи.** Для предстоящихъ еще въ этой главѣ разсужденій мы должны предположить извѣстными изъ тригонометріи опредѣленія тригонометрическихъ функцій, обычай писать $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ и т. д. вмѣсто $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$ и т. д. и слѣдующія теоремы и формулы:

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

3) Значеніе любой тригонометрической функціи не измѣняется, если къ углу прибавляется или отъ него отнимается произвольное кратное 360°. такъ что, напр.,

$$\sin \alpha = \sin (\alpha \pm k.\ 360^\circ),$$
$$\cos \alpha = \cos (\alpha \pm k.\ 360^\circ),$$

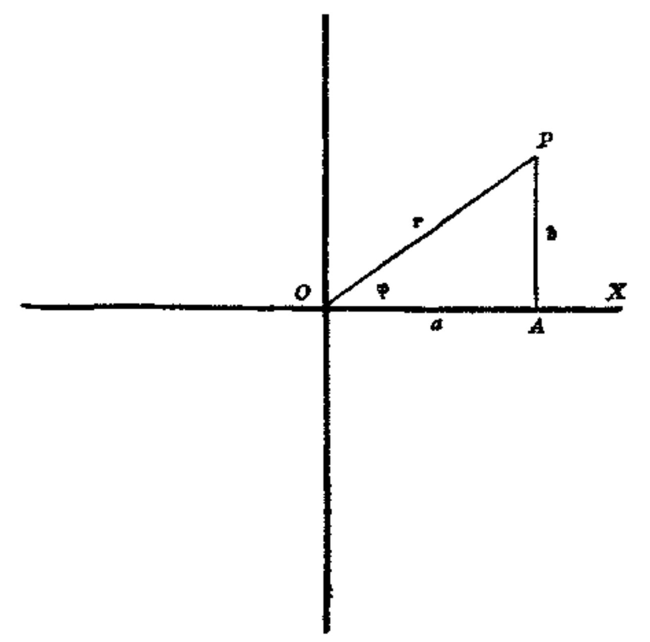
при условіи, что k цѣлое число.

4) $\cos (180^\circ \quad \alpha) = -\cos \alpha.$
5) $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
6) $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
7) $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$
8) $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \ c\ s \beta + \sin \alpha \sin \beta$
9) $\sin (-\alpha) = -\sin \alpha.$
10) $\cos (-\alpha) = \cos \alpha.$

11) По даннымъ двумъ сторонамъ (b и c) и заключенному между ними углу (α) третья сторона треугольника вычисляется по формулѣ:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}.$$

§ 294. **Тригонометрическій видъ комплекснаго числа.** Какъ разъяснено было въ § 280, для геометрическаго изображенія числа $a+bi$ откладывается на прямой чиселъ OX отъ точки O, соотвѣтствующей числу 0, отрѣзокъ OA, содержащій произвольно избранную линейную мѣру a разъ, и возставляется къ OA перпендикуляръ AP, содержащій эту мѣру b разъ, получающаяся же такимъ образомъ точка P называется точкою, соотвѣтствующею числу $a+bi$. Если мы число, показывающее, сколько разъ упомянутая линейная мѣра содержится въ гипотенузѣ OP треугольника OAP, обозначимъ буквою r, уголъ же POA назовемъ φ, то на основаніи опредѣленій тригонометрическихъ функцій, называемыхъ синусомъ и косинусомъ.



$$a = r \cos \varphi$$
$$b = r \sin \varphi,$$

а потому

$$a+bi=r\cos\varphi+i\,r\sin\varphi$$

или

$$a+bi=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Послѣднее выраженіе называется тригонометрическимъ видомъ комплекснаго числа $a+bi$.

Въ немъ r выражаетъ разстояніе точки P, соотвѣтствующей числу $a+bi$ или $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, отъ O, а φ есть уголъ, образуемый отрѣзкомъ OP съ прямою чиселъ OX.

Такъ вообще тригонометрическимъ видомъ комплекснаго числа указывается въ плоскости чиселъ положеніе точки, соотвѣтствующей этому числу, разстояніемъ ея отъ точки, соотвѣтствующей числу 0, и угломъ, образуемымъ отрѣзкомъ, выражающимъ это разстояніе, съ прямою чиселъ.

Если мы въ комплексномъ числѣ $a+bi$ представимъ себѣ a и b измѣняющимися такъ, что въ тригонометрическомъ видѣ этого числа φ останется безъ измѣненія, а будетъ измѣняться только r [1]), то всѣ точки, соотвѣтствующія получающимся такимъ образомъ комплекснымъ числамъ, будутъ находиться на одной и той же прямой, образующей съ прямою чиселъ уголъ φ. Если же мы a и b представимъ себѣ измѣняющимися такъ, что въ тригонометрическомъ видѣ этого числа r останется безъ измѣненія [2]), а будетъ измѣняться только φ, то точки, соотвѣтствующія получающимся такимъ образомъ комплекснымъ числамъ, будутъ всѣ отстоять на одномъ и томъ же разстояніи отъ O и потому находиться на одной и той же окружности. Такъ мы видимъ, что r и φ вмѣстѣ указываютъ *направленіе*, въ которомъ нужно, исходя изъ O, искать точку соотвѣтствующую числу $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, и *разстояніе* этой точки отъ O. Такимъ образомъ комплексныя числа въ тригонометрическомъ видѣ являются числами, выражающими и длину нѣкотораго отрѣзка и его направленіе, и составляютъ потому нѣкоторымъ образомъ обобщеніе понятія объ относительныхъ числахъ, выражающихъ также и длину и направленіе отрѣзковъ, но только на прямой чиселъ. Въ числѣ $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ длину выражаетъ r, направленіе же указывается выраженіемъ $\cos\varphi+i\sin\varphi$. Напримѣръ, числу $6(\cos 200^\circ+i\sin 200^\circ)$ соотвѣтствуетъ точка, лежащая въ III четверти, разстояніе ея отъ 0 выражается числомъ 6, и чтобы достигнуть ея, нужно изъ O пройти путь, равный этому разстоянію, по направленію, образующему съ прямою OX уголъ въ 200° или, что то же самое, съ продолженіемъ ея влѣво уголъ въ 20°.

---

[1]) Геометрія учитъ, что это произойдетъ тогда, когда a и b будутъ, измѣняясь увеличиваться или уменьшаться всегда въ одинаковое число разъ.

[2]) Геометрія учитъ, что для этого достаточно, чтобы оставалось

$$a^2+b^2=r^2$$

Если мы въ числѣ $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ возьмемъ $\varphi=0$, то оно превратится въ r, такъ какъ

$$\cos 0^\circ=1$$

и

$$\sin 0^\circ=0,$$

а если мы въ немъ возьмемъ $\varphi=180^\circ$, то оно превратится въ $-r$, такъ какъ

$$\cos 180^\circ=-1$$

и

$$\sin 180^\circ=0$$

Такимъ образомъ положительныя и отрицательныя числа являются частными случаями общаго вида чиселъ, выражающихъ въ плоскости чиселъ и длину и направленіе.

Изъ сказаннаго дѣлается яснымъ, почему множитель r получилъ названіе **абсолютнаго значенія** комплекснаго числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ или же **модуля** его. Уголъ же φ называется **амплитудою** или **фазою** этого числа.

Что же касается нахожденія модуля и амплитуды при преобразованіи даннаго комплекснаго числа $a+bi$ въ тригонометрическій видъ, то ихъ вычисляютъ слѣдующимъ образомъ:

Какъ разъяснено было въ § 283, равенство

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

возможно только при условіи, что

$$a=r\cos\varphi$$
$$b=r\sin\varphi.$$

Если мы эти послѣднія два равенства возвысимъ въ квадратъ и послѣ этого сложимъ ихъ, то получится:

$$a^2=r^2\cos^2\varphi$$
$$b^2=r^2\sin^2\varphi$$
$$a^2+b^2=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$
$$=r^2,$$

такъ какъ

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

Слѣдовательно,

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Послѣ подстановки этого выраженія вмѣсто r въ выраженія для a и b, мы для опредѣленія угла φ получаемъ равенства

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

изъ которыхъ тригонометрія учитъ находить уголъ φ.

Важно замѣтить, что модуль

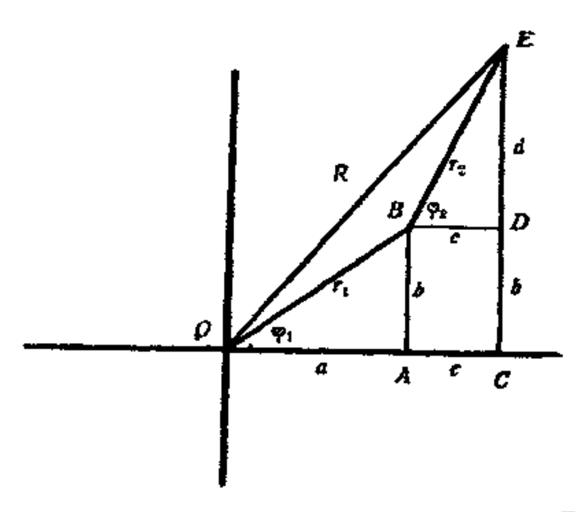
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

всегда разсматривается какъ абсолютное число. Амплитуда же можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ угломъ, смотря потому, будетъ ли онъ полученъ чрезъ вращеніе прямой изъ положенія OX до положенія OP въ направленіи противоположномъ движенію стрѣлокъ часовъ, или же въ томъ же направленіи, въ которомъ движутся эти стрѣлки.

§ 295. **Геометрическое толкованіе сложенія комплексныхъ чиселъ.** Суммою чиселъ $a+bi$ и $c+di$ названо было [§ 282] комплексное число $(a+c)+(b+d)i$. Чтобы изобразить послѣднее въ плоскости чиселъ, нужно на прямой чиселъ отложить отрѣзокъ, изображающій число $a+c$, и возставить въ концѣ этого отрѣзка перпендикуляръ, соотвѣтствующій числу $b+d$.

Такъ получится точка, которую бы мы могли также получить, отложивъ отъ точки, соотвѣтствующей числу $a+bi$, отрѣзокъ c, параллельный прямой чиселъ, и возставивъ къ нему въ концѣ его отрѣзокъ d, другими словами, изобразивъ геометрически число $c+di$, исходя изъ точки, соотвѣтствующей первому слагаемому, какъ будто бы она была изображеніемъ 0 въ плоскости чиселъ. Такое геометрическое толкованіе сложенія комплексныхъ чиселъ вполнѣ соотвѣтствуетъ изображенію этого дѣйствія надъ вещественными числами на прямой чиселъ.

Безъ дальнѣйшихъ объясненій легко себѣ представить, какъ изложеннымъ способомъ можетъ быть изображена геометрически сумма и трехъ и четырехъ и т. д. комплексныхъ чиселъ.



Остается провѣрить, примѣнимо ли описанное изображеніе сложенія комплексныхъ чиселъ и къ тригонометрическому виду ихъ. Назвавъ буквами A, B, C и E точки, соотвѣтствующія числамъ a, $a+bi$, $a+c$ и $(a+c)+(b+d)i$, и буквою D основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ B на EC (или, что то же самое, конецъ отрѣзка, проведеннаго изъ B параллельно къ прямой чиселъ и равнаго AC), и полагая

$$a+bi = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$c+di = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

слѣдовательно, имѣя [опредѣленіе 119]

$$a = r_1 \cos\varphi_1$$
$$b = r_1 \sin\varphi_1$$
$$c = r_2 \cos\varphi_2$$
$$d = r_2 \sin\varphi_2 ,$$

мы легко изъ чертежа убѣждаемся, что φ_1 и φ_2 суть углы BOA и EBD, и что отрѣзки OB и BE изображають модули r_1 и r_2.

Если мы обозначимъ буквами R и ψ модуль и амплитуду суммы чиселъ $r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, другими словами, если мы положимъ

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)+r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=R(\cos\psi+i\sin\psi)$$

или

$$(r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2)+(r_1\sin\varphi_1+r_2\sin\varphi_2)i=R(\cos\psi+i\sin\psi),$$

то по опредѣленію 119 должно быть:

$$r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2=R\cos\psi \qquad (1)$$
$$r_1\sin\varphi_1+r_2\sin\varphi_2=R\sin\psi. \qquad (2)$$

Возвысивъ послѣднія два равенства въ квадратъ и сложивъ ихъ, мы получаемъ:

$$r_1^2\cos^2\varphi_1+2r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2+r_2^2\cos^2\varphi_2+$$
$$r_1^2\sin^2\varphi_1+2r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+r_2^2\sin^2\varphi_2=R^2(\cos^2\psi+\sin^2\psi)$$

или

$$r_1^2(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1)+r_2^2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)+$$
$$2r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=R^2$$

или

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)=R^2,$$

а отсюда

$$R=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},$$

вмѣсто чего можно было бы также писать:

$$R=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos[180^\circ-(\varphi_2-\varphi_1)]}$$

Продолживъ прямую OB, мы видимъ, что уголъ смежный съ OBE равенъ $\varphi_2-\varphi_1$, и что, слѣдовательно,

$$OBE=180^\circ-(\varphi_2-\varphi_1).$$

Такимъ образомъ оказывается, что модуль R выражается тою же формулою, которою должна быть выражена сторона OE въ треугольникѣ OBE.

Раздѣливъ же равенство (2) на равенство (1), мы получаемъ

$$\frac{r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2}{r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2} = \operatorname{tng} \psi$$

Но чертежъ показываетъ, что числитель въ лѣвой части этого равенства выражаетъ длину отрѣзка EC, а знаменатель длину отрѣзка OC, такъ какъ

$$CD = AB$$

и

$$BD - AC$$

И изъ чертежа же видно, что

$$\operatorname{tng} EOC = \frac{CE}{OC}$$

Слѣдовательно, уголъ EOC есть амплитуда ψ суммы комплексныхъ чиселъ $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Такъ оказывается, что, изобразивъ геометрически сумму двухъ комплексныхъ чиселъ въ алгебраическомъ видѣ, мы получаемъ въ то же время и изображенiе тригонометрическаго вида суммы этихъ чиселъ.

Произведеннымъ нами изслѣдованiемъ указывается слѣдующее правило для геометрическаго изображенiя суммы нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ, данныхъ въ тригонометрическомъ видѣ:

Нужно построить амплитуду и модуль одного слагаемаго; исходя изъ точки, соотвѣтствующей этому числу, какъ будто бы она была изображенiемъ 0, нужно построить амплитуду и модуль второго слагаемаго (считая амплитуду отъ прямой, параллельной прямой чиселъ); исходя изъ точки, соотвѣтствующей изображенной уже суммѣ двухъ слагаемыхъ, нужно построить амплитуду и модуль третьяго слагаемаго и т. д.

§ 296. Геометрическое толкованiе вычитанiя комплексныхъ чиселъ. Въ § 284 было разъяснено, что вычесть комплексное число можно, прибавляя число равное и противоположное ему. И такъ какъ вслѣдствiе этого каждое вычитанiе комплексныхъ чиселъ можетъ быть сведено къ сложенiю такого рода чиселъ, то нѣтъ надобности въ особомъ правилѣ для геометрическаго изображенiя вычитанiя ихъ.

Такъ, напр., разность комплексныхъ чиселъ $4\frac{1}{3} - 2i$ и $-1\frac{1}{2} + i$ будетъ изображена геометрически, если мы вмѣсто

$$\left(4\frac{1}{3} - 2i\right) - \left(-1\frac{1}{2} + i\right)$$

изобразимъ

$$\left(4\frac{1}{3} - 2i\right) + \left(1\frac{1}{2} - i\right),$$

т. е., если мы въ точкѣ, соотвѣтствующей числу $4\frac{1}{3}$, къ прямой чиселъ построимъ внизъ отъ нея перпендикуляръ длиною въ 2 отрѣзка, равныхъ мѣрѣ, избранной для изображенія числа 1, если мы затѣмъ отъ конца этого перпендикуляра проведемъ вправо параллельно прямой чиселъ отрѣзокъ длиною въ $1\frac{1}{2}$ такихъ мѣры и, наконецъ, внизъ отъ послѣдняго отрѣзка построимъ къ нему въ концѣ его перпендикуляръ длиною въ 1 такую мѣру. Конецъ послѣдняго перпендикуляра и будетъ точка, соотвѣтствующая изображенной разности комплексныхъ чиселъ. Вмѣстѣ же съ нею будутъ опредѣлены геометрически и модуль и амплитуда этой разности.

§ 297. **Тригонометрическій видъ произведенія комплексныхъ чиселъ.** Умноженіе комплексныхъ чиселъ дѣлается въ высшей степени удобнымъ при примѣненіи слѣдующаго предложенія:

Теорема. Модуль произведенія комплексныхъ чиселъ равенъ произведенію модулей сомножителей, амплитуда же его—суммѣ амплитудъ сомножителей.

Утв. $r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\,.\,\ldots\,.\,r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)$
$=r_1r_2\,.\ldots.\,r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)]$.

Док. Перемножая постепенно данныхъ сомножителей между собою, мы при умноженіи первыхъ двухъ другъ на друга получаемъ:

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)i]=$$
$$r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Доказавъ такимъ образомъ справедливость теоремы для произведенія двухъ комплексныхъ чиселъ, мы можемъ продолжать перемноженіе, пользуясь уже ею. Такъ мы получаемъ:

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\,.\,r_3(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3)$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\,.\,r_3(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3)$$
$$=r_1r_2r_3[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)].$$

Ясно, что умножая такимъ же образомъ это произведеніе на $r_4(\cos\varphi_4+i\sin\varphi_4)$, новое на $r_5(\cos\varphi_5+i\sin\varphi_5)$ и т. д., мы, наконецъ, получимъ:

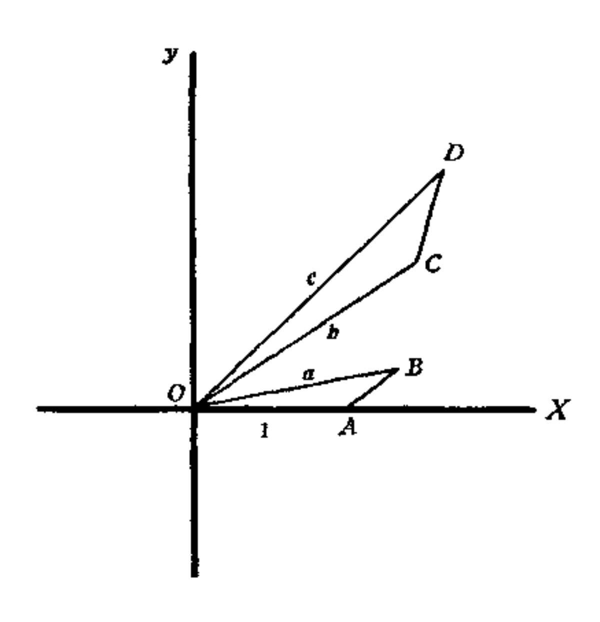
$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\,.\,\ldots\,.\,r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)$$
$$=r_1r_2\ldots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)],$$

что и требовалось доказать [1]).

---

[1]) Изъ этой теоремы слѣдуетъ, между прочимъ, что и для комплексныхъ чиселъ остается въ силѣ сочетательный законъ умноженія.

§ 298. **Геометрическое толкованіе умноженія комплексныхъ чиселъ другъ на друга.** По теоремѣ, доказанной въ предыдущемъ параграфѣ, модуль произведенія двухъ комплексныхъ чиселъ $a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ и $b(\cos\beta+i\sin\beta)$ есть ab. Чтобы изобразить его геометрически, мы откладываемъ на прямой чиселъ отрѣзокъ OA, равный линейной мѣрѣ, служащей для изображенія числа 1, строимъ уголъ $BOA=\alpha$ и откладываемъ на его сторонѣ отрѣзокъ OB, равный a такимъ мѣрамъ. Затѣмъ мы строимъ уголъ $COA=\beta$ и уголъ $DOC=\alpha$, откладываемъ на сторонѣ послѣдняго отрѣзокъ OC, равный b упомянутымъ выше мѣрамъ и строимъ еще, наконецъ, уголъ OCD равный углу OAB.



Тогда, какъ это доказывается въ геометріи, получившіеся треугольники OAB и OCD будутъ подобны и вслѣдствіе этого будетъ, если мы буквою c обозначимъ содержащееся въ OD число отрѣзковъ, равныхъ мѣрѣ, избранной нами для изображенія 1,

$$\frac{c}{b}=\frac{a}{1}.$$

Изъ послѣдняго же равенства слѣдуетъ, что

$$c=ab,$$

т. е., что OD есть изображеніе модуля произведенія комплексныхъ чиселъ $a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ и $b(\cos\beta+i\sin\beta)$.

А такъ какъ отрѣзокъ OD образуетъ съ прямою чиселъ уголъ $\alpha+\beta$, то D и есть точка, соотвѣтствующая этому произведенію.

§ 299. **Тригонометрическій видъ частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ.** Дѣленіе двухъ комплексныхъ чиселъ въ значительной мѣрѣ упрощается, если эти числа представлены въ тригонометрическомъ видѣ, такъ какъ въ такомъ случаѣ къ выполненію этого дѣйствія можетъ быть примѣнено слѣдующее предложеніе:

Теорема. Модуль частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ равенъ частному отъ дѣленія модуля дѣлимаго на модуль дѣлителя, амплитуда же его равна разности амплитудъ этихъ чиселъ.

Утв. $\dfrac{a(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{b(\cos\beta + i\sin\beta)} = \dfrac{a}{b}\cdot[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]$.

Док. Расширяя частное $\dfrac{a(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{b(\cos\beta + i\sin\beta)}$ на $\cos\beta - i\sin\beta$,

мы получаемъ:

$$\frac{a(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{b(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{a(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{b(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta)}$$

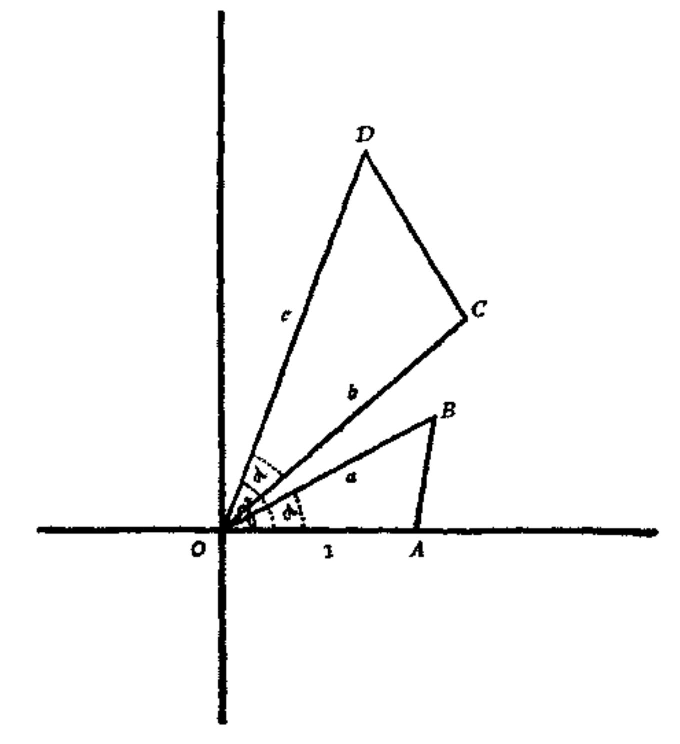
$$= \frac{a(\cos\alpha\cos\beta - i^2\sin\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta - i\cos\alpha\sin\beta)}{b(\cos^2\beta - i^2\sin^2\beta)}$$

$$= \frac{a[\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)i]}{b(\cos^2\beta + \sin^2\beta)}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)],$$

что и требовалось доказать.

§ 300. **Геометрическое толкованіе дѣленія двухъ комплексныхъ чиселъ другъ на друга.** Согласно съ теоремою, доказанною въ предыдущемъ параграфѣ, частное отъ дѣленія двухъ комплексныхъ чиселъ $c(\cos\gamma + i\sin\gamma)$ и $a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ можетъ быть геометрически изображено слѣдующимъ образомъ:



Отложивъ на прямой чиселъ отрѣзокъ OA, равный линейной мѣрѣ, избранной для изображенія числа 1, и построивъ уголъ $BOA=\alpha$, мы откладываемъ на сторонѣ этого угла отрѣзокъ OB, равный a названнымъ мѣрамъ. Построивъ углы DOA равный γ и DOC равный α, мы откладываемъ

отрѣзокъ OD, равный c такимъ же мѣрамъ, и строимъ уголъ ODC, равный углу OBA. Тогда, какъ извѣстно изъ геометріи, треугольники ODC и OBA должны быть подобны, а вслѣдствіе этого должно быть если мы буквою b обозначимъ число упоминавшихся выше мѣръ, содержащееся въ OC,

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{a} .$$

Изъ послѣдняго же равенства слѣдуетъ что

$$b = \frac{c}{a} ,$$

т. е., что OC есть изображеніе модуля частнаго названныхъ выше комплексныхъ чиселъ. А такъ какъ отрѣзокъ OC образуетъ съ прямою чиселъ уголъ $\gamma - \alpha$, то C и должна быть точка, соотвѣтствующая числу

$$\frac{c(\cos\gamma + i\sin\gamma)}{a(\cos\alpha + i\sin\alpha)} .$$

Въ описанномъ нами только-что построеніи нами избраны такія обозначенія буквами, чтобы при сравненіи этого чертежа съ тѣмъ, которымъ геометрически пояснялось умноженіе комплексныхъ чиселъ, видно было, что дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію

§ 301. **Тригонометрическій видъ цѣлой положительной степени комплекснаго числа.** Изъ теоремы объ умноженіи между собою комплексныхъ чиселъ въ тригонометрическомъ видѣ вытекаетъ слѣдующее весьма важное предложеніе, здѣсь пока еще разсматриваемое только для случая, что показатель цѣлое положительное число:

Теорема. $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Док. Въ § 297 было доказано, что

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2) \cdot \ldots \cdot r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n) =$$
$$r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)].$$

Если мы положимъ

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$$

и

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi,$$

то и получаемъ:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Примѣчаніе 1.

Въ частномъ случаѣ, когда $r=1$, изъ послѣдняго равенства получается такъ называемая ф о р м у л а М у а в р а:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Примѣчаніе 2.

Чрезъ подстановку въ выраженіе $r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ значеній 1 и 0 вмѣсто n весьма легко убѣдиться, что приведенныя въ § 290 опредѣленія возвышенія комплексныхъ чиселъ въ степени 1-ую и 0-ую могутъ безъ какихъ-либо противорѣчій разсматриваться какъ частные случаи доказанной здѣсь теоремы.

§ 302. **Тригонометрическій видъ корня изъ комплекснаго числа.** Преобразованіе корня изъ комплекснаго числа въ комплексное число можетъ быть произведено при помощи теоремы, доказанной въ предыдущемъ параграфѣ. Предполагая n цѣлымъ положительнымъ числомъ и обозначивъ буквами x и ξ модуль и амплитуду комплекснаго числа равнаго $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$, мы это число можемъ найти слѣдующимъ образомъ.

Мы возвышаемъ равенство

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = x(\cos\xi + i\sin\xi) \tag{1}$$

въ n-ую степень, примѣняя при этомъ упомянутую теорему:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x^n(\cos n\xi + i\sin n\xi).$$

По опредѣленію **119** послѣднее равенство возможно только при условіи, что

$$r\cos\varphi = x^n\cos n\xi \tag{2}$$

и

$$r\sin\varphi = x^n\sin n\xi. \tag{3}$$

Возвысивъ послѣднія два равенства въ квадратъ и сложивъ ихъ, мы получаемъ:

$$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = x^{2n}(\cos^2 n\xi + \sin^2 n\xi)$$

или

$$r^2 = x^{2n},$$

а отсюда

$$x = \sqrt[2n]{r^2} = \sqrt[n]{r}.$$

Подставивъ это выраженіе вмѣсто x въ равенства (2) и (3) и раздѣливъ каждое изъ нихъ на r, мы для опредѣленія угла ξ получаемъ равенства:

$$\cos\varphi = \cos n\xi$$
$$\sin\varphi = \sin n\xi.$$

Если же и синусы и косинусы двухъ угловъ равны между собою, то эти углы или равны или отличаются другъ отъ друга на произвольное крат-

ное 360°. Сказанное можетъ быть выражено слѣдующимъ равенствомъ:

$$n\xi = \varphi + k\,360^\circ,$$

въ которомъ k можетъ означать любое положительное или отрицательное цѣлое число. А изъ него мы узнаемъ, что

$$\xi = \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Подставляя полученныя для x и ξ выраженія въ равенство (1), мы и находимъ:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)\right]. \qquad (4)$$

Такъ какъ k можетъ быть любое положительное или отрицательное цѣлое число, то полученный результатъ замѣчателенъ тѣмъ, что въ найденномъ комплексномъ числѣ амплитуда можетъ имѣть безконечно большое число различныхъ значеній. Но при $k = n$ и при всѣхъ значеніяхъ k кратныхъ n косинусы и синусы этихъ амплитудъ будутъ соотвѣтственно равны $\cos\frac{\varphi}{n}$ и $\sin\frac{\varphi}{n}$; во всѣхъ случаяхъ, когда k будетъ на 1 больше названныхъ значеній, косинусы и синусы въ найденномъ комплексномъ числѣ будутъ соотвѣтственно равны $\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 1 \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)$ и $\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 1 \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)$; во всѣхъ же случаяхъ, когда k будетъ на 2 больше названныхъ значеній, тѣ же тригонометрическія функціи будутъ равны $\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)$ и $\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)$ и т. д. Такъ въ концѣ концовъ оказывается, что, какія бы цѣлыя значенія ни принимало k, выраженіе

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)\right]$$

можетъ имѣть только n различныхъ значеній, все тѣ же, которыя получаются при k равномъ 0, 1, 2 и т. д. до $k = n - 1$, и притомъ все въ одномъ и томъ же порядкѣ, если значенія k будутъ увеличиваться все на 1.

При помощи теоремы, доказанной въ предыдущемъ параграфѣ, и 3-ей изъ теоремъ, приведенныхъ въ § 293, легко убѣдиться, что каждое изъ n значеній разсматриваемаго выраженія, будучи возвышено въ n-ую степень, дастъ $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, и потому съ одинаковымъ правомъ можетъ быть названо корнемъ n-ой степени изъ $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Важно привести еще здѣсь слѣдующее заключенiе, вытекающее изъ разсужденiй этого параграфа: всѣ n значенiй $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$ могли бы быть также получены, если бы мы въ выраженiи

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]$$

взяли сначала k равнымъ любому цѣлому числу и затѣмъ увеличили $(n-1)$ разъ k на 1.

А изъ этого далѣе слѣдуетъ что въ послѣднемъ выраженiи мы подъ $\frac{\varphi}{n}$ могли бы понимать любую изъ амплитудъ, удовлетворяющихъ равенству (4).

§ 303. **Число значенiй корня.** При $\varphi=0$ (а также при φ равномъ любому кратному 360°) выраженiе $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ превращается въ r, т. е., оно означаетъ нѣкоторое абсолютное или положительное число. Если же $\varphi=180^\circ$ (или же если эта амплитуда равна какому-либо нечетному кратному 180°), то $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=-r$, означаетъ, слѣдовательно, нѣкоторое отрицательное число. Легко также опредѣлить, при какихъ значенiяхъ φ это выраженiе будетъ означать чистое мнимое число. Убѣждаясь здѣсь такимъ образомъ вновь, что комплексное число есть самый общiй видъ числа [§ 279], мы изъ разсужденiй предыдущаго параграфа заключаемъ, что **корень n-ой степени изъ всякаго числа имѣетъ n различныхъ значенiй.**

Только $\sqrt[n]{0}$ имѣетъ одно значенiе, а именно только значенiе 0.

§ 304. **Корень изъ вещественнаго числа.** Если a есть положительное вещественное число, то написавъ для отысканiя модуля и амплитуды $\sqrt[n]{a}$ равенство:

$$\sqrt[n]{a}=x(\cos\xi+i\sin\xi),$$

мы способомъ, описаннымъ въ § 302, находимъ

$$x=\sqrt[n]{a},$$

а для опредѣленiя амплитуды получаемъ равенства:

$$\cos n\xi=1$$
$$\sin n\xi=0,$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что

$$\xi=0^\circ+k\cdot\frac{360^\circ}{n}$$

или проще

$$\xi = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$$

При $k = n - 1$

$$\cos k \cdot \frac{360^\circ}{n} = \cos (n-1) \frac{360^\circ}{n} = \cos\left(360^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \cos\left(\frac{360^\circ}{n} - 360^\circ\right) = \cos 1 \cdot \frac{360^\circ}{n},$$

и

$$\sin k \cdot \frac{360^\circ}{n} = \sin (n-1) \frac{360^\circ}{n} = \sin\left(360^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{360^\circ}{n} - 360^\circ\right) = -\sin 1 \cdot \frac{360^\circ}{n}$$

Такимъ же образомъ оказывается, что

$$\cos (n-2) \cdot \frac{360^\circ}{n} = \cos 2 \cdot \frac{360^\circ}{n},$$

$$\sin (n-2) \cdot \frac{360^\circ}{n} = -\sin 2 \cdot \frac{360^\circ}{n},$$

что

$$\cos (n-3) \cdot \frac{360^\circ}{n} = \cos 3 \cdot \frac{360^\circ}{n},$$

$$\sin (n-3) \cdot \frac{360^\circ}{n} = -\sin 3 \cdot \frac{360^\circ}{n}$$

и т. д.

То есть, оказывается, что 2-е и n-ое, 3-е и $(n-1)$-е, 4-е и $(n-2)$-ое и т. д. значенія $\sqrt[n]{a}$ суть попарно сопряженныя комплексныя числа.

И если n четное число, то, дойдя до $k = \frac{n}{2}$, мы получаемъ для $\sqrt[n]{a}$ значеніе $x(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -x$

Такъ мы убѣждаемся, что, если n четное число, то $\sqrt[n]{a}$ имѣетъ два вещественныхъ значенія (первое и $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-ое), которыя притомъ равны и противоположны другъ другу. При нечетномъ же n разсматриваемый корень имѣетъ вещественныхъ значеній только одно, а именно первое, получающееся при $k=0$.

При извлеченіи корня n-ой степени изъ отрицательнаго числа, напр., изъ $-b$, мы полагая

$$\sqrt[n]{-b} = y (\cos \eta + i \sin \eta)$$

находимъ тѣмъ же изложеннымъ въ § 302 способомъ

$$\rho=\sqrt[n]{b}$$

и

$$\cos n\eta=-1$$
$$\sin n\eta=0,$$

откуда

$$\eta=\frac{180^\circ}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}.$$

Подвергая это выраженіе такому же изслѣдованію, какому мы выше подвергли выраженіе для ξ, мы приходимъ къ заключенію, что если n четное число, то $\sqrt[n]{-b}$ имѣетъ $\frac{n}{2}$ паръ сопряженныхъ комплексныхъ значеній и ни одного вещественнаго, и что если n нечетное число, то этотъ корень имѣетъ $\frac{n-1}{2}$ паръ сопряженныхъ комплексныхъ значеній и одно вещественное, получающееся при $k=\frac{n-1}{2}$. Дѣйствительно, подставляя въ равенство

$$\sqrt[n]{-b}=\sqrt[n]{b}\left[\cos\left(\frac{180^\circ}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)+i\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]$$

$\frac{n-1}{2}$ вмѣсто k, мы получаемъ:

$$\sqrt[n]{-b}=\sqrt[n]{b}\left[\cos\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)+i\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]$$
$$=\sqrt[n]{b}\left[\cos\frac{180^\circ+(n-1)180^\circ}{n}+i\sin\frac{180^\circ+(n-1)180^\circ}{n}\right]$$
$$=\sqrt[n]{b}\left(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ\right)$$
$$=\sqrt[n]{b}\left(-1+i\,.\,0\right)$$
$$=-\sqrt[n]{b}.$$

§ 305. **Понятіе объ общемъ корнѣ.** Чтобы указать, что подъ **корнемъ** n**-ой** степени изъ нѣкотораго числа z желаютъ **понимать всѣ** n **значеній**, которыя, будучи возвышены въ n-ую степень, дадутъ z, **знакъ радикала** снабжаютъ внутри звѣздочкою и пишутъ такъ: $\sqrt[n]{*z}$.

Символъ $\sqrt[n]{*z}$ называется **общимъ корнемъ** n**-ой** степени изъ числа z.

Какъ разъяснено было въ предыдущихъ параграфахъ, всякое число можетъ быть представлено въ тригонометрическомъ видѣ, и потому мы можемъ положить:

$$\sqrt[n]{^*z}=\sqrt[n]{^*r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$
$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right],$$

сохраняя за r, φ и k все тотъ же смыслъ, въ которомъ эти буквы нами уже примѣнялись. Изъ всѣхъ n значеній, выражаемыхъ послѣднею формулою то, которое получается при $k=0$, называется **главнымъ значеніемъ** корня n-ой степени изъ z. И его мы и будемъ обыкновенно обозначать и обозначали уже символомъ $\sqrt[n]{z}$ во всѣхъ случаяхъ, кромѣ одного, когда при нечетномъ n подкоренная величина z есть вещественное отрицательное число. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ $\sqrt[n]{z}$ означаетъ единственное вещественное значеніе, удовлетворяющее опредѣленію корня. Такъ, напр.,

$$\sqrt[4]{16}=2,$$

тогда какъ

$$\sqrt[4]{^*16}$$

означаетъ и $+2$, и $+2i$, и -2, и $-2i$;

$$\sqrt[3]{-125}=-5,$$

тогда какъ $\sqrt[3]{^*-125}$ означаетъ и $5(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$, и $5(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$, и $5(\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ)$ или, что то же самое, и $\frac{5}{2}(1+i\sqrt{3})$, и -5, и $\frac{5}{2}(1-i\sqrt{3})$.

§ 306. **Общій корень n-ой степени изъ единицы.** Если мы указаннымъ въ § 302 способомъ преобразуемъ $\sqrt[n]{^*1}$ въ тригонометрическій комплексный видъ, то получимъ:

$$\sqrt[n]{^*1}=\cos k\cdot\frac{360^\circ}{n}+i\sin k\cdot\frac{360^\circ}{n}.$$

По теоремѣ же, доказанной въ § 297, выраженіе

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)\right]$$

можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos k\cdot\frac{360^\circ}{n}+i\sin k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)$$

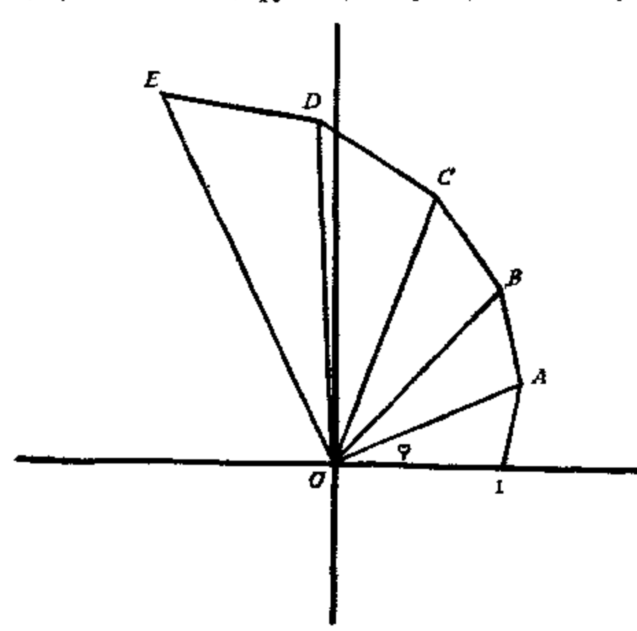
Поэтому общій корень изъ любого числа можетъ быть изображенъ также слѣдующимъ образомъ:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos k\cdot\frac{360^\circ}{n}+i\sin k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right)$$

А такъ какъ [см. § 302] подъ выраженіемъ $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$ мы имѣемъ право понимать любое изъ n чиселъ, которыя, будучи возвышены въ n-ую степень, даютъ $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то для полученія всѣхъ n значеній общаго корня n-ой степени изъ какого-либо числа мы выводимъ слѣдующее указаніе, представляющее большое удобство при вычисленіяхъ:

120 **Правило.** Чтобы получить всѣ n значеній общаго корня n-ой степени изъ нѣкотораго числа, достаточно одинъ который-нибудь изъ нихъ умножить на всѣ значенія общаго корня n-ой степени изъ единицы.

§ 307 **Геометрическое толкованіе возвышенія комплекснаго числа въ степень.** Если мы точку на прямой чиселъ, соотвѣтствующую числу $+1$, обозначимъ цыфрою 1, точку же, соотвѣтствующую числу $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, назовемъ A, то согласно правилу, данному въ § 298 для изображенія произведенія двухъ комплексныхъ чиселъ, точкою, соотвѣтствующею 2-ой степени этого комплекснаго числа, должна быть вершина B треугольника OBA, подобнаго треугольнику $OA1$. По тому же правилу точкою, соотвѣтствующею 3-ей степени числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, будетъ вершина C треугольника OCB, также подобнаго $OA1$. Продолжая такимъ же образомъ строить треугольники ODC, OED и т. д. подобные $OA1$, слѣдовательно, и всѣмъ предыдущимъ, мы получимъ точки, соотвѣтствующія 4-ой,



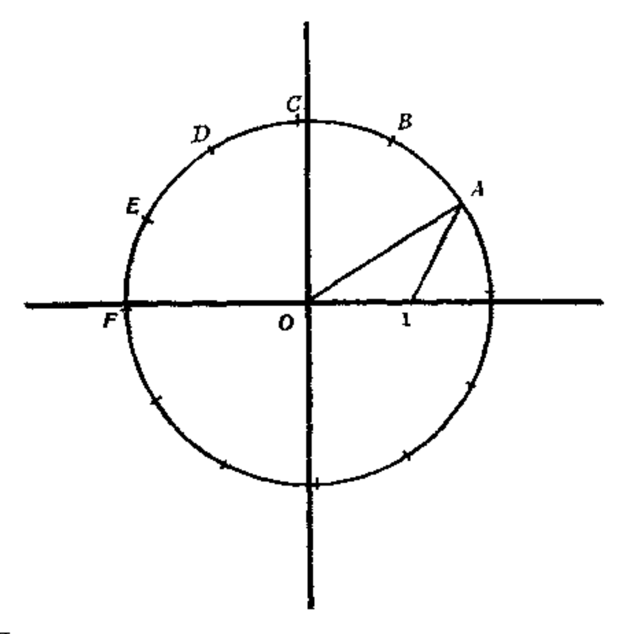
5-ой и т. д. степенямъ того же комплекснаго числа. Точка же A должна соотвѣтствовать 1-ой степени его, а точка 1 его нулевой степени, въ полномъ соотвѣтствіи съ опредѣленіями, данными въ § 290.

Въ частномъ случаѣ, когда модуль r комплекснаго числа окажется равнымъ 1, всѣ точки, соотвѣтствующія цѣлымъ положительнымъ (а также нулевой) степенямъ этого числа, будутъ лежать на одной и той же окружности, имѣющей O центромъ и отрѣзокъ, избранный для изображенія числа 1, радіусомъ.

§ 308. **Геометрическое толкованіе извлеченія корня изъ комплекснаго числа.** Въ § 306 было доказано, что общій корень n-ой степени изъ комплекснаго числа можетъ быть представленъ въ такомъ видѣ:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$
$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos k\cdot\frac{360^\circ}{n} + i\sin k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right).$$

Для геометрическаго изображенія главнаго значенія этого корня, должно построить треугольникъ $OA1$, имѣющій уголъ $AO1 = \frac{\varphi}{n}$, сторону $O1$ равную отрѣзку, избранному для изображенія числа 1, и сторону OA равную $\sqrt[n]{r}$ такимъ отрѣзкамъ. Остальныя же $(n-1)$ значеній общаго корня n-ой степени изъ $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ должны быть изображены геометрически слѣдующимъ образомъ: нужно описать изъ O, какъ центра, радіусомъ OA окружность и раздѣлить ее, начиная отъ A, на n равныхъ частей; точки дѣленія вмѣстѣ съ A и будутъ соотвѣтствовать всѣмъ n значеніямъ разсматриваемаго общаго корня



Въ частномъ случаѣ, когда $\varphi = 0$, выраженіе $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ будетъ означать положительное вещественное число, и точка A совпадетъ съ прямою чиселъ, расположеніе же точекъ дѣленія на окружности подтвердитъ все

сказанное объ общемъ корнѣ изъ положительнаго числа въ § 304. Равнымъ образомъ распредѣленіе точекъ дѣленія на окружности въ частномъ случаѣ, когда $\varphi=180^\circ$, подтвердитъ все сказанное тамъ объ общемъ корнѣ изъ отрицательнаго числа.

Примѣчаніе. Для насъ здѣсь безразлично, могутъ ли углы $\frac{\varphi}{n}$ и $\frac{360^\circ}{n}$ быть построены при помощи циркуля и линейки, или ихъ нужно строить при помощи какихъ-либо другихъ инструментовъ, напр., транспортира.

§ 309. **Обобщеніе теоремы Муавра**. Слѣдуя общему плану, по которому возводится зданіе общей ариѳметики, мы и относительно теоремы, доказанной въ § 301, должны убѣдиться, не можетъ ли она быть обобщена такъ, что окажется справедливою не только для цѣлыхъ положительныхъ показателей и показателя 0, но и для всякихъ другихъ показателей.

1) Въ томъ случаѣ, когда n дробное число, можно это сдѣлать явнымъ, полагая

$$n=\frac{p}{q}.$$

Въ такомъ случаѣ будетъ:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=[r(\cos\xi+i\sin\xi)]^{\frac{p}{q}}.$$

И если мы положимъ

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{\frac{p}{q}}=x(\cos\xi+i\sin\xi),$$

то должно быть:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^p=[x(\cos\xi+i\sin\xi)]^q.$$

Отсюда же по теоремѣ, доказанной въ § 301 для цѣлыхъ показателей, слѣдуетъ, что должно быть:

$$r^p(\cos p\varphi+i\sin p\varphi)=x^q(\cos q\xi+i\sin q\xi).$$

Изъ этого равенства опредѣляются x и ξ способомъ, указаннымъ въ § 302, такъ:

$$r^p\cos p\varphi=x^q\cos q\xi$$
$$r^p\sin p\varphi=x^q\sin q\xi$$

$$r^{2p}(\cos^2 p\varphi+\sin^2 p\varphi)=x^{2q}(\cos^2 q\xi+\sin^2 q\xi)$$

или

$$r^{2p}=x^{2q}$$
$$x=\sqrt[2q]{r^{2p}}=\sqrt[q]{r^p}=r^{\frac{p}{q}};$$

и

$$q\xi = p\varphi + k \cdot 360^\circ,$$

слѣд.,

$$\xi = \frac{p}{q} \cdot \varphi + k \cdot \frac{360^\circ}{q}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что во всякомъ случаѣ (при $k=0$)

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^{\frac{p}{q}}(\cos \frac{p}{q} \cdot \varphi + i \sin \frac{p}{q} \cdot \varphi),$$

хотя кромѣ значенія, приведеннаго въ правой части этого равенства, есть еще $(q-1)$ значеній, которыя также равны $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n$.

А такъ какъ и

$$r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^{\frac{p}{q}}(\cos \frac{p}{q} \cdot \varphi + i \sin \frac{p}{q} \cdot \varphi),$$

то, по теоремѣ VI, оказывается, что и въ томъ случаѣ, когда n положительное дробное число,

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

2) Если n ирраціональное число, напримѣръ ν, то, какъ бы мало оно ни отличалось отъ нѣкоторой дроби $\frac{p}{q}$, всегда останутся въ силѣ всѣ приведенныя въ п. 1 этого параграфа равенства. Потому мы въ полномъ согласіи съ примѣнявшимся нами способомъ перехода отъ дѣйствій надъ раціональными числами къ тѣмъ же дѣйствіямъ надъ числами ирраціональными (гл. XXIII), можемъ обобщить теорему Муавра, допуская и ирраціональнаго показателя:

Опредѣленіе. $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ и въ томъ случаѣ, когда n ирраціональное число.

3) Если, наконецъ, n какое-либо отрицательное вещественное число, напр., $-\mu$, то

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-\mu}$$

$$= \frac{1}{[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^\mu}$$ (по опредѣленію, данному въ § 290)

$$= \frac{1}{r^\mu(\cos \mu\varphi + i \sin \mu\varphi)} = \frac{\cos \mu\varphi - i \sin \mu\varphi}{r^\mu(\cos^2 \mu\varphi - i^2 \sin^2 \mu\varphi)}$$

$$= \frac{\cos \mu\varphi - i \sin \mu\varphi}{r^\mu(\cos^2 \mu\varphi + \sin^2 \mu\varphi)} = \frac{1}{r^\mu} \cdot (\cos \mu\varphi - i \sin \mu\varphi).$$

Но и

$$r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^{-\mu}[\cos(-\mu\varphi) + i \sin(-\mu\varphi)]$$

$$= \frac{1}{r^{\mu}}(\cos \mu\varphi - i \sin \mu\varphi).$$

Такимъ образомъ и для этого случая, по теоремѣ VI, слѣдуетъ, что

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Слѣдовательно, вообще:

121 **Теорема.** $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

Примѣчаніе. Обобщить эту теорему и для комплекснаго показателя здѣсь не представляется возможнымъ потому, что тригонометрія разсматриваетъ только тригонометрическія функціи угловъ или дугъ, которыя не могутъ быть комплексными.

§ 310. **Число значеній степени и корня съ ирраціональнымъ показателемъ.** Если β ирраціональное число, то, полагая

$$\sqrt[\beta]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = x(\cos \xi + i \sin \xi),$$

мы, какъ въ § 302, находимъ

$$x = \sqrt[\beta]{r}$$

и

$$\xi = \frac{\varphi}{\beta} + \frac{k}{\beta} \cdot 360^\circ.$$

Такъ какъ въ послѣднемъ выраженіи въ частномъ $\frac{k}{\beta}$ дѣлимое k цѣлое число, дѣлитель же β число ирраціональное, то это частное никогда не можетъ оказаться ни цѣлымъ числомъ, ни дробью. Слѣдовательно, ни при одномъ изъ значеній k не можетъ получиться такого значенія ξ, при которомъ бы повторилось которое-либо изъ значеній $\cos \xi$ и $\sin \xi$. А изъ этого мы должны заключить, что

$$\sqrt[\beta]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[\beta]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{\beta} + \frac{k}{\beta} \cdot 360^\circ\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{\beta} + \frac{k}{\beta} \cdot 360^\circ\right)\right]$$

имѣетъ безконечное число значеній. Но корень $\sqrt[\beta]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$ есть степень $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{\frac{1}{\beta}}$, гдѣ $\frac{1}{\beta}$ есть также ирраціональное число, которое бы мы могли обозначить буквою α. Изъ этого слѣдуетъ, что и всякая степень съ ирраціональнымъ показателемъ имѣетъ безконечное число значеній.

Все изложенное мы можемъ резюмировать такъ:

Теорема. Въ случаѣ ирраціональнаго показателя какъ степень всякаго числа, такъ и корень изъ любого числа (исключая 0) имѣютъ безконечное число значеній.

§ 311. **Понятіе о совершенномъ равенствѣ.** Въ § 266 доказана была теорема:

$$\sqrt[p]{a^q}=\sqrt[pn]{a^{qn}}$$

Если подъ радикалами, встрѣчающимися въ этомъ равенствѣ, понимать общіе корни, подъ p, q и n цѣлыя числа, подъ a же любое число (комплексное, вещественное или мнимое), то лѣвая часть равенства имѣетъ p различныхъ значеній, правая же ихъ имѣетъ pn, при чемъ каждое изъ p значеній лѣвой части встрѣчается и въ правой, но въ правой имѣются еще такія значенія (ихъ всего, конечно, $pn-p$), которыхъ въ лѣвой части нѣтъ. Поэтому приведенное равенство называется несовершеннымъ. Понятно, что и равенство

$$\sqrt[p]{a^q}=\sqrt[p\cdot m]{a^{q\cdot m}}$$

должно быть несовершеннымъ.

Если же каждое изъ значеній лѣвой части какого-либо равенства встрѣчается и въ правой его части и наоборотъ, то равенство называется совершеннымъ.

Такъ, напр.,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

равенство совершенное.

Изъ сказаннаго здѣсь слѣдуетъ, что при преобразованіи корня по теоремѣ **108** число значеній его измѣняется, и что, слѣдовательно, теорема эта *безусловно* справедлива только для ариѳметическихъ корней, для общихъ же *условно* въ указанномъ выше смыслѣ.

ГЛАВА XXVI.

Понятіе о логариѳмѣ.

§ 312. **О числѣ обратныхъ дѣйствій *).** Происхожденіе вычитанія отъ сложенія можетъ быть наглядно пояснено слѣдующими равенствами:

$$a+b=c\begin{cases}a=c-b\\ b=c-a.\end{cases}$$

---

*) Рекомендуемъ составлять съ учащимися при объясненіи происхожденія логариѳма таблицу всѣхъ дѣйствій [§ 351].

Отысканіе какъ одного, такъ и другого слагаемаго по даннымъ суммѣ и одному изъ слагаемыхъ приводитъ къ одному и тому же обратному дѣйствію. Причина этому заключается въ теоремѣ 2.

Происхожденіе дѣленія отъ умноженія поясняется слѣдующими равенствами

$$ab = c \begin{cases} a = \dfrac{c}{b} \\ b = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

И здѣсь отысканіе какъ одного, такъ и другого сомножителя по даннымъ произведенію и одному изъ сомножителей приводитъ къ одному и тому же обратному дѣйствію. Объясняется же это теоремою 4.

Но не всегда множитель и множимое могутъ быть замѣнены другъ другомъ. При умноженіи именованнаго числа послѣднее можетъ быть только множимымъ, множителемъ же можетъ быть только отвлеченное число. Переходъ отъ такого умноженія къ обратному дѣйствію мы можемъ пояснить такого рода примѣромъ:

$$3 \,.\, 5 \text{ дюймовъ} = 15 \text{ дюймамъ} \begin{cases} 15 \text{ дюймовъ} : 3 = 5 \text{ дюймамъ} \\ 15 \text{ дюймовъ} : 5 \text{ дюймовъ} = 3. \end{cases}$$

Мы тутъ видимъ два различныхъ обратныхъ дѣйствія: первое есть дѣленіе именованнаго числа на отвлеченное, второе—дѣленіе именованнаго числа на именованное. Какъ извѣстно изъ ариѳметики, оба эти дѣленія производятся не одинаково. Первое изъ этихъ дѣйствій можно назвать дѣленіемъ на части, второе—опредѣленіемъ, сколько разъ одно именованное число содержится въ другомъ, или опредѣленіемъ отношенія этихъ именованныхъ чиселъ другъ къ другу. Причина, почему теперь получается отъ умноженія два обратныхъ дѣйствія, заключается въ томъ, что теперь недопустима замѣна множимаго множителемъ, а множителя множимымъ.

Переходя къ разсмотрѣнію дѣйствій обратныхъ возвышенію въ степень, необходимо принять во вниманіе, что 2^3 не равняется 3^2, 3^5 не равняется 5^3, и вообще a^b въ общемъ не равняется b^a, т. е., что основаніе степени и ея показатель не могутъ быть замѣнены другъ другомъ. На основаніи предыдущихъ разсужденій мы изъ этого должны заключить, что отъ возвышенія въ степень слѣдуетъ ожидать происхожденія двухъ обратныхъ дѣйствій, смотря по тому, будетъ ли отыскиваться основаніе ея по ея величинѣ и ея показателю или же ея показатель по ея величинѣ и ея основанію. Дѣйствіе, получающееся въ первомъ случаѣ, есть, какъ мы знаемъ, извлеченіе корня (см. главу XX). Написавъ равенства:

$$2^3 = 8$$
$$3^5 = 243$$

и тому подобныя, легко убѣдиться, что показатель степени не можетъ быть найденъ по даннымъ величинѣ ея и ея основанію чрезъ извлеченіе корня. Задача, состоящая въ такого рода отысканіи показателя степени, приводитъ къ новому дѣйствію, также обратному возвышенію въ степень,—къ логариѳмированію.

§ 313. Опредѣленія вводимыхъ понятій.

Опредѣленіе. Логариѳмировать число b по основанію a значитъ найти показателя, указывающаго, въ которую степень нужно возвысить a, чтобы получить b. 

Задачу: «логариѳмировать число b по основанію a» пишутъ такъ:

$$\log_a b \text{ или } {}^a\log b \text{ или } \log^a b \text{ или}$$

$$\underset{a}{\big/\!\!\underline{\;\;b\;}} \quad {}^{*)}.$$

Такъ же пишется и результатъ этого дѣйствія.

Число a въ этомъ выраженіи называется основаніемъ логариѳма, число b—логариѳмируемымъ числомъ, результатъ же логариѳмированія—логариѳмомъ. Поэтому и **выраженіе $\log_a b$ называется логариѳмомъ** (логариѳмомъ числа b по основанію a или при основаніи a).

Опредѣленіе. $\log_a b$ означаетъ показателя, указывающаго, въ которую степень нужно возвысить a, чтобы получить b. 

Это опредѣленіе логариѳма выражается слѣдующимъ равенствомъ:

---

*) Послѣдній знакъ, самый удобный изъ всѣхъ, образованъ изъ латинской буквы L и примѣняется въ слѣдующихъ изъ извѣстныхъ намъ книгъ:

A. Paulson. Lehrbuch der Planimetrie. 1876.

A. F. G. Th. Gauss. Die Hauptsätze der Elementarmathematik. 1-ое изд. 1873 г., 2-ое изд. 1885 г

П. И. Матковскій. Начала алгебры. 1890 г.

P. Crantz. Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. 1906 г.



Опредѣленіе: $a^{\log_a b} = b$ или $a^{\diagup\!\!\!\!\!\!\Lambda_a b} = b$.

Какъ слѣдствіе изъ опредѣленія логариѳма получается слѣдующая теорема:



Слѣдствіе: $\log_a (a^b) = b$ или $\diagup\!\!\!\!\!\!\Lambda_a\, a^b = b$,

такъ какъ символомъ $\log_a (a^b)$ обозначается показатель, указывающій въ которую степень нужно возвысить a, чтобы получить a^b, но b и есть показатель такого свойства.

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ мы видимъ, что если мы число b сначала логариѳмируемъ по основанію a, а затѣмъ на результатъ потенцируемъ число a, или если мы сначала на b потенцируемъ число a, а полученный результатъ затѣмъ логариѳмируемъ по основанію a, то эти два дѣйствія взаимно уничтожаются, т. е., получается число b.

Происхожденіе отъ возвышенія въ степень обратныхъ дѣйствій—извлеченія корня и логариѳмированія—можетъ быть выражено слѣдующими равенствами:

$$a^n = b \begin{cases} a = \sqrt[n]{b} \\ n = \diagup\!\!\!\!\!\!\Lambda_a b \text{ или } n = \log_a b. \end{cases}$$

§ 314. Логариѳмъ основанія и логариѳмъ числа 1.

Теорема 1. При всякомъ основаніи логариѳмъ основанія равенъ 1.

Док. $\log_a a = 1$,

такъ какъ при всякомъ значеніи a

$$a^1 = a.$$

Теорема 2 При всякомъ основаніи логариѳмъ 1 равенъ 0.

Док. $\log_a 1 = 0$,

такъ какъ при всякомъ значеніи a

$$a^0 = 1.$$

Примѣчаніе.

О случаѣ, когда $a = 0$, будетъ особо рѣчь позднѣе

Примѣры.

1) $\log_2 8 = 3$, такъ какъ $2^3 = 8$

2) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$*) $= -2$, такъ какъ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$

3) $\log_{625} 3125 = \frac{5}{4}$, такъ какъ $625^{\frac{5}{4}} = \left(\sqrt[4]{625}\right)^5 = 5^5 = 3125$.

4) $\log_{\frac{16}{81}} \frac{27}{8}$*) $= -\frac{3}{4}$, такъ какъ $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{81}{16}\right)^{+\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{\frac{81}{16}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

5) $\log_2 1 = \log_5 1 = \log_{\frac{3}{5}} 1 = 0$.

§ 315. **Теорема**. Степень числа логариѳмируютъ по степени того же числа, дѣля показателя первой на показателя второй.

Утв. $\log_{a^n} (a^m)$*) $= \frac{m}{n}$.

Док. Справедливость утвержденія слѣдуетъ изъ того, что и въ самомъ дѣлѣ

$$(a^n)^{\frac{m}{n}} = a^m.$$

Примѣръ.

$$\log_{\frac{16}{81}} \frac{27}{8}\text{*)} = \log_{\left(\frac{2}{3}\right)^4} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\text{*)} = -\frac{3}{4}.$$

§ 316. **$\log_a b$ только въ исключительныхъ случаяхъ можетъ быть раціональнымъ числомъ.** Въ примѣрахъ, приведенныхъ въ концѣ предыду-

*) Несравненно удобнѣе было бы здѣсь пользоваться знакомъ $\wedge$—

щаго параграфа, логариѳмы -раціональныя числа. Легко убѣдиться, что въ нихъ во всѣхъ основаніе логариѳма и логариѳмируемое число могутъ быть при помощи раціональныхъ показателей представлены какъ степени одного и того же числа. Но это можетъ быть сдѣлано только въ исключительныхъ случаяхъ и, напр., въ выраженіи $\log_3 5$ этого намъ достигнуть не удастся. Логариѳмы какихъ чиселъ при основаніи 3 будутъ раціональны, это можно усмотрѣть изъ слѣдующей таблички:

$$\log_3 1=0,$$

$$\log_3 3=1 \quad ; \quad \log_3 \frac{1}{3}=-1;$$

$$\log_3 9=2 \quad , \quad \log_3 \frac{1}{9}=-2$$

$$\log_3 27=3 \quad ; \quad \log_3 \frac{1}{27}=-3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\log_3 (3^n)=n \quad ; \quad \log_3 \frac{1}{3^n}=\log_3 (3^{-n})=-n.$$

Согласно опредѣленію логариѳма и на основаніи теоремы, приведенной въ § 130 какъ слѣдствіе изъ теоремы 2, число, обозначаемое символомъ $\log_3 5$ должно быть больше 1, но меньше 2. Но дробью оно быть не можетъ, такъ какъ всякая дробная степень 3-хъ будетъ неизбѣжно числомъ ирраціональнымъ.

Въ параграфѣ же 250 было доказано, что, если a и b вещественныя числа, $\log_a b$ всегда означаетъ нѣкоторое вещественное число. И такъ какъ нѣтъ ни одного ни цѣлаго ни дробнаго числа, при потенцированіи на которое получилось бы 5, то символъ $\log_3 5$ означаетъ нѣкоторое вполнѣ опредѣленное ирраціональное число, которое могло бы быть вычислено приближенно со всякою желательною степенью точности, между прочимъ также способомъ, изложеннымъ въ § 207.

§ 317. **Примѣръ вычисленія приближенныхъ значеній ирраціональнаго логариѳма.** Такъ какъ при способѣ такого вычисленія, упомянутомъ въ концѣ предыдущаго параграфа, знаменатели приближенныхъ значеній будутъ степени 2-хъ, то примѣненіе его можетъ быть облегчено предварительнымъ вычисленіемъ таблицы корней 2-ой, 4-ой, 8-ой и т. д. степеней изъ основанія логариѳма. При составленіи ея придется послѣдовательно извлекать все только квадратные корни: корень изъ основанія, изъ этого результата корень, изъ новаго результата опять квадратный корень и т. д.

Если мы, напр., пожелаемъ вычислить приближенныя значенія $\log_3 5$, то описанная вспомогательная табличка будетъ содержать слѣдующія числа:

$\sqrt{3}=1,7320508$

$$\sqrt[4]{3}=\sqrt{1,7320508}=1,3160740$$
$$\sqrt[8]{3}=\sqrt{1,3160740}=1,147203$$
$$\sqrt[16]{3}=\sqrt{1,147203}=1,071075$$
$$\sqrt[32]{3}=\sqrt{1,071075}=1,034928$$
$$\sqrt[64]{3}=\sqrt{1,034928}=1,017314.$$

и т. д.

Какъ уже упомянуто было выше, первыя приближенныя значенія $\log_3 5$ суть 1 и 2, слѣдующее же $\frac{3}{2}$ есть приближенное значеніе этого числа съ избыткомъ, такъ какъ

$$3^{\frac{3}{2}}=3^{1\frac{1}{2}}=3\ .\ 3^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{3}=5,\ 196\ldots$$

Слѣдующее приближеніе $\frac{\frac{3}{2}+1}{2}=\frac{5}{4}$ есть приближенное значеніе этого числа

съ недостаткомъ, такъ какъ

$$3^{\frac{5}{4}}=3^{1\frac{1}{4}}=3\sqrt[4]{3}=3\ .\ 1,316\ldots=3,\ 948\ldots$$

Слѣдующее приближенное значеніе $\frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2}=\frac{11}{8}$ также меньше $\log_3 5$, такъ

какъ

$$3^{\frac{11}{8}}=3^{\frac{5}{4}+\frac{1}{8}}=3,948\ldots\ .\ 1,147=4,527\ldots$$

Такимъ же образомъ должны быть вычисляемы и слѣдующія приближенныя значенія $\log_3 5$, другими словами, и слѣдующіе показатели степеней числа 3, приближающихся разсматриваемымъ способомъ къ 5 то съ одной, то съ другой стороны. Для болѣе удобнаго обозрѣнія хода этихъ вычисленій мы помѣщаемъ ниже табличку, составленную по образцу таблички въ § 207,

съ прибавленіемъ графы для указанія, какимъ способомъ опредѣляется классъ вычисленнаго приближеннаго значенія.

Приближенныя значенія $\log_3 5$. Съ недостаткомъ: I классъ.	Съ избыткомъ: II классъ.	Ариѳметическія среднія.	Опредѣленіе класса приближеннаго значенія
1	2	$\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$	$3^{\frac{3}{2}}=3\,.\sqrt{3}=5,196\ldots$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{\frac{3}{2}+1}{2}=\frac{5}{4}$	$3^{\frac{5}{4}}=3\,.\sqrt[4]{3}=3,948\ldots$
$\frac{5}{4}$		$\frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2}=\frac{11}{8}$	$3^{\frac{11}{8}}=3^{\frac{5}{4}+\frac{1}{8}}=3^{\frac{5}{4}}\,.\sqrt[8]{3}=4,529$
$\frac{11}{8}$		$\frac{\frac{11}{8}+\frac{3}{2}}{2}=\frac{23}{16}$	$3^{\frac{23}{16}}=3^{\frac{11}{8}+\frac{1}{16}}=3^{\frac{11}{8}}\,.\sqrt[16]{3}=4,851\ldots$
$\frac{23}{16}$		$\frac{\frac{23}{16}+\frac{3}{2}}{2}=\frac{47}{32}$	$3^{\frac{47}{32}}=3^{\frac{23}{16}+\frac{1}{32}}=3^{\frac{23}{16}}\,\sqrt[32]{3}=5,020\ldots$
	$\frac{47}{32}$	$\frac{\frac{47}{32}+\frac{23}{16}}{2}=\frac{93}{64}$	$3^{\frac{93}{64}}=3^{\frac{47}{32}-\frac{1}{64}}=\frac{3^{\frac{47}{32}}}{\sqrt[64]{3}}=4,9\ldots$
$\frac{93}{64}$			

Этою табличкою уже съ достаточной наглядностью указывается, при помощи какихъ пріемовъ она могла бы быть продолжена до полученія приближеннаго значенія $\log_3 5$ съ такою точностью, какая будетъ желательна.

Существуютъ способы и болѣе удобнаго и быстраго вычисленія приближенныхъ значеній ирраціональныхъ логариѳмовъ, но они разсматриваются на болѣе высокой ступени математики.

§ 318. Логариѳмы, которые въ элементарной математикѣ не разсматриваются. Символъ $\log_3(-25)$ долженъ былъ бы означать показателя

степени числа 5, равной—25. Но всякая цѣлая степень положительнаго числа есть число положительное. Но нѣтъ и дроби, нѣтъ и ирраціональнаго числа, при потенцированіи на которыя числа 5 получилось бы 25. Только если принять въ соображеніе, что квадратный корень изъ положительнаго числа можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ числомъ, и что согласно съ этимъ

$$5^{\frac{4}{2}}=\sqrt{5^4}=\pm 5^2=\pm 25,$$

то можно было бы сказать, что

$$\log_5(-25)=\frac{4}{2}=\log_5(+25),$$

не имѣя, однако, права сократить частное $\frac{4}{2}$, такъ какъ 5^2 имѣетъ только одно значеніе, а $5^{\frac{4}{2}}$ два. Но теорія такихъ вещественныхъ значеній логариѳмовъ отрицательныхъ чиселъ при положительномъ основаніи и подобныхъ же логариѳмовъ положительныхъ чиселъ при отрицательномъ основаніи пока еще не разработана, и мы не считаемъ себя въ правѣ знакомить съ нею впервые въ этой именно книгѣ. Высшею же математикою доказывается, что всякій логариѳмъ положительнаго числа по положительному основанію кромѣ одного вещественнаго значенія имѣетъ еще безконечное число мнимыхъ значеній, и что равнымъ образомъ имѣетъ безконечное число мнимыхъ значеній и всякій логариѳмъ отрицательнаго числа по положительному основанію и всякій логариѳмъ по отрицательному основанію. Ограничиваясь этимъ указаніемъ, приведемъ только еще нѣсколько примѣровъ вещественныхъ логариѳмовъ, у которыхъ основаніе и логариѳмируемая величина разнозначныя числа, и поясннмъ примѣрами, что также логариѳмы мнимыхъ и комплексныхъ чиселъ при вещественномъ основаніи могутъ быть вещественными.

Такъ какъ

$$9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=\pm 3,$$

$$256^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{256}=\begin{cases}+4 \text{ или}\\ -4 \text{ или}\\ +4i \text{ или}\\ -4i,\end{cases}$$

$$125^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{125}=\begin{cases}+5 \text{ или}\\ 5\cdot\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ или}\\ 5\cdot\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\end{cases}$$

[см § 305],

$$(-49)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-49}=+7i$$

то, по опредѣленію логариѳма, должно быть

$$\log_9(+3)=\log_9(-3)=\frac{1}{2},$$

$$\log_{256}(+4)=\log_{256}(-4)=\log_{256}(+4i)$$
$$=\log_{256}(-4i)=\frac{1}{4},$$

$$\log_{125}5=\log_{125}\left(5\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)=$$
$$\log_{125}\left(5\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)=\frac{1}{3},$$

$$\log_{(-49)}(+7i)=\log_{(-49)}(-7i)=\frac{1}{2}.$$

Такъ какъ можно считать вполнѣ изслѣдованными только логариѳмы положительныхъ чиселъ по положительному основанію, то и мы послѣдуемъ обычаю принимать въ логариѳмахъ и основанія и логариѳмируемыя величины положительными и вещественными во всѣхъ случаяхъ, когда нами не будетъ особо оговорено, что они могутъ быть и отрицательными или комплексными.

Переходя же къ разсмотрѣнію дѣйствій надъ логариѳмами, мы должны предпослать, что о допустимости производства такихъ дѣйствій все сказано уже въ главѣ XXIII и кратко упомянуто еще въ концѣ § 254.

ГЛАВА XXVII.

Логариѳмированіе выраженій и дѣйствія надъ логариѳмами.



§ 319. **Теорема.** Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.

Утв. $\log_a (bc)=\log_a b+\log_a c$.

Док. Обозначивъ $\log_a b$ буквою x и $\log_a c$ буквою y, мы изъ равенствъ

$$\log_a b=x$$
$$\log_a c=y$$

на основаніи опредѣленія логариѳма [122²] имѣемъ:

$$a^x = b$$
$$a^y = c$$

Умноживъ эти равенства, мы, по теор. VII, получаемъ:

$a^x \cdot a^y = bc$, а отсюда по теоремѣ 16

$a^{x+y} = bc$. Такъ мы видимъ, что $x+y$ есть показатель, указывающій, въ которую степень нужно возвысить a, чтобы получить bc; но это можетъ быть выражено и такъ:

$$\log_a (bc) = x+y.$$

Подставивъ въ послѣднее равенство $\log_a b$ вмѣсто x, $\log_a c$ вмѣсто y, мы убѣждаемся, что и въ самомъ дѣлѣ

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Такъ же теорема доказывается и для всякаго большаго числа сомножителей.

Если мы доказанное равенство напишемъ [теорема V] такимъ образомъ:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc),$$

то получаемъ:

Слѣдствіе. Сумма логариѳмовъ съ одинаковыми основаніями равняется логариѳму съ тѣмъ же основаніемъ и логариѳмируемымъ числомъ, равнымъ произведенію логариѳмируемыхъ чиселъ слагаемыхъ.  124

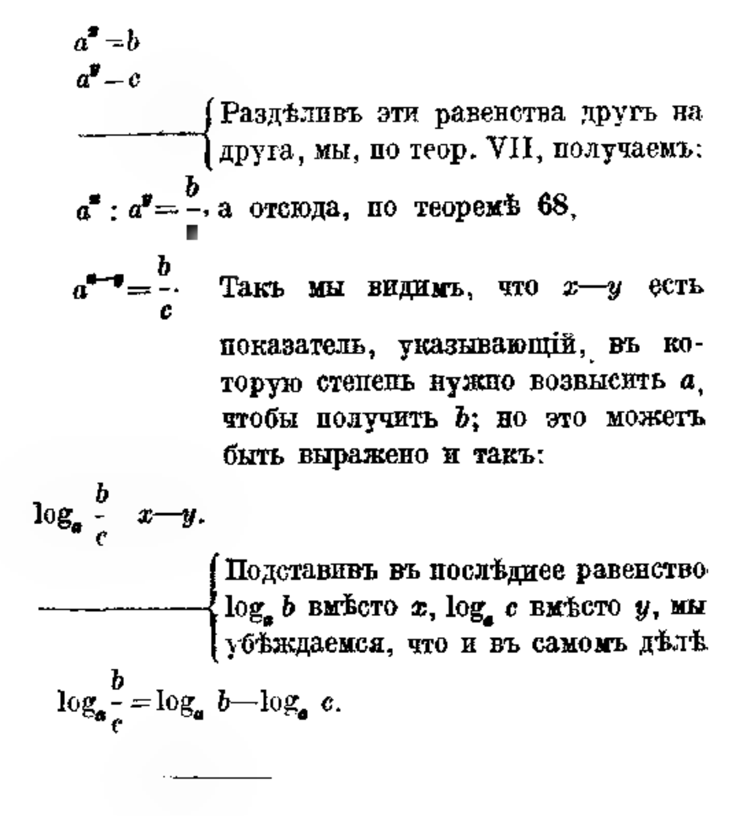
§ 320. **Теорема**. Логариѳмъ частнаго равняется логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя.  125

Утв. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$

Док. Обозначивъ $\log_a b$ буквою x и $\log_a c$ буквою y, мы изъ равенствъ

$$\log_a b = x$$
$$\log_a c = y$$

на основаніи опредѣленія логариѳма имѣемъ:



$$a^x=b$$
$$a^y=c$$

Раздѣливъ эти равенства другъ на друга, мы, по теор. VII, получаемъ:

$a^x : a^y=\frac{b}{c}$, а отсюда, по теоремѣ 68,

$a^{x-y}=\frac{b}{c}$. Такъ мы видимъ, что $x-y$ есть показатель, указывающій, въ которую степень нужно возвысить a, чтобы получить b; но это можетъ быть выражено и такъ:

$$\log_a \frac{b}{c}=x-y.$$

Подставивъ въ послѣднее равенство $\log_a b$ вмѣсто x, $\log_a c$ вмѣсто y, мы убѣждаемся, что и въ самомъ дѣлѣ

$$\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c.$$

Если написать [теор. V] доказанное равенство такъ:

$$\log_a b-\log_a c=\log_a (b : c),$$

то получается:

126 **Слѣдствіе**. Разность двухъ логариѳмовъ съ одинаковыми основаніями равняется логариѳму съ тѣмъ же основаніемъ и логариѳмируемымъ числомъ, равнымъ частному отъ дѣленія логариѳмируемаго числа уменьшаемаго на логариѳмируемое число вычитаемаго.

127 § 321. **Теорема**. Логариѳмъ степени равняется логариѳму ея основанія, умноженному на ея показателя.

Утв. $\log_a (b^n)=n \cdot \log_a b$.

Док. Обозначивъ $\log_a b$ буквою x, мы изъ равенства

$$\log_a b=x$$

по опредѣленію логариѳма имѣемъ:

$a^x = b$. Если мы обѣ части этого равенства возвысимъ въ n-ую степень, то [по теоремѣ VII] получаемъ:

$(a^x)^n = b^n$, а отсюда, по теоремѣ **94**,

$a^{nx} = b^n$. Такъ мы видимъ, что nx есть показатель, указывающій, въ которую степень нужно возвысить a, чтобы получить b^n; но это можетъ быть выражено и такъ:

$\log_a (b^n) = nx$.

Подставивъ въ это равенство $\log_a b$ вмѣсто x, мы и получаемъ:

$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$

Если мы напишемъ [теор. V] доказанное равенство такъ:

$$n \cdot \log_a b = \log_a (b^n),$$

то получаемъ:

Слѣдствіе. Логариѳмъ можно умножить на какое-либо число, потенцируя на него логариѳмируемое число. **128**

§ 322. **Теорема.** Логариѳмъ корня равняется логариѳму его подкоренной величины, дѣленному на показателя этого корня. **129**

Утв. $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$.

Док. $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a \left(b^{\frac{1}{n}}\right)$ [опредѣл. **110**].

$= \frac{1}{n} \cdot \log_a b$ [теор. **127**].

$= \frac{\log_a b}{n}$ [теор. **58**].

Если написать доказанное равенство такимъ образомъ [теор. V]:

$$\frac{\log_a b}{n} = \log_a \sqrt[n]{b},$$

то получается:

130 **Слѣдствіе.** **Частное отъ дѣленія логариѳма на какое-либо число равно логариѳму корня, съ этимъ числомъ въ качествѣ показателя, изъ логариѳмируемаго числа.**

§ 323. Примѣры логариѳмированія выраженій (А) и дѣйствій надъ логариѳмами (Б).

А. 1) $\log_m 5abc = \log_m 5 + \log_m a + \log_m b + \log_m c$.

2) $\log_B \frac{3a}{4b(c+d)} = \log_B 3a - \log_B 4b(c+d)$

$= \log_B 3 + \log_B a - [\log_B 4 + \log_B b + \log_B (c+d)]$

$= \log_B 3 + \log_B a - \log_B 4 - \log_B b - \log_B (c+d)$.

3) $\log_a \frac{1}{ab} = \log_a 1 - \log_a ab = 0 - (\log_a a + \log_a b) = -(\log_a a + \log_a b)$.

4) $\log_k \frac{5}{7} a^4bc^2 = \log_k 5 - \log_k 7 + 4\log_k a + \log_k b + 2\log_k c$.

5) $\log_e \sqrt[8]{5ae^{-x}} = \frac{\log_e 5 + \log_e a - x \log_e e}{8} = \frac{1}{8}(\log_e 5 + \log_e a - x)$.

6) $\log_N \frac{\sqrt[-3]{a} : \sqrt{b^3}}{\sqrt[5]{(a-b)^2 \sqrt[3]{c^{-2}}}} =$

$-\frac{1}{3}\log_N a - \frac{3}{2}\log_N b - \frac{1}{5}\left[2 \log_N (a-b) - \frac{2}{3}\log_N c\right]$.

7) $\log_B (a^{\log_B a}) = \log_B a \,.\, \log_B a = (\log_B a)^2$.

8) $\log_{10} \log_{10} [10^{(10^{-x})}] = \log_{10} (10^{-x} \log_{10} 10) = \log_{10} 10^{-x} =$

$$-x \log_{10} 10 = -x.$$

Б. 1) $\log_k 5+2\log_k a+\frac{1}{3}\log_k b-\log_k (2b-c)=\log_k 5+\log_k a^2+\log_k b^{\frac{1}{3}}-$

$\log_k (2b-c)=\log_k 5a^2b^{\frac{1}{3}}-\log_k (2b-c)=\log_k \frac{5a^2\sqrt[3]{b}}{2b-c}$.

2) $4\log_{12} 2+\log_{12} 72+2\log_{12} 8+\log_{12} 18-3\log_{12} 4-\log_{12} 6-\frac{1}{5}\log_{12} 32$

$=\log_{12} 2^4+\log_{12}(2^3\,.\,3^2)+\log_{12} 8^2+\log_{12}(2\,.\,3^2)-$

$(\log_{12}4^3+\log_{12} 6+\log_{12}\sqrt[5]{32})=\log_{12}[2^4\,.\,2^3\,.\,3^2\,.\,(2^3)^2\,.\,2\,.\,3^2]$

$-\log_{12}[(2^2)^3\,.\,2\,.\,3\,.\,2]=\log_{12}\frac{2^{14}\,.\,3^4}{2^8\,.\,3}=\log_{12}(2^6\,.\,3^3)=\log_{12}(2^2\,.\,3)^3$

$=\log_{12} 12^3=3$.

§ 324. **Теорема.** Величина логариѳма не измѣнится, если и основаніе и логариѳмируемое число возвысимъ въ одну и ту же степень. **131**

Предп. n вещественное число, a и b положительныя числа.

Утв. $\log_a b=\log_{a^n}(b^n)$.

Док. Обозначивъ $\log_a b$ буквою x, мы по опредѣленію логариѳма изъ равенства

$\log_a b=x$	заключаемъ, что
$a^x=b$.	Возвысивъ это равенство въ n-ую степень [теор. VII], мы получаемъ:
$(a^x)^n=b^n$,	а отсюда, по теоремѣ 95:
$(a^n)^x=b^n$.	Такъ мы видимъ, что x есть показатель, указывающій, въ которую степень нужно возвысить a^n, чтобы получить b^n; но это можетъ быть выражено и такъ:
$x=\log_{a^n}(b^n)$.	
	Подставивъ въ это равенство $\log_a b$ вмѣсто x, мы получаемъ:
$\log_a b=\log_{a^n}(b^n)$.	

§ 325. **Теорема:** **132**

$$\log_a b\,.\,\log_b c=\log_a c.$$

Док. По опредѣленію логариѳма:

$$b^{\log_b c}=c.$$

Логариѳмируя это равенство по основанію a [теор. VII), мы, по теоремѣ **127**, и получаемъ.

$$\log_a b \,.\, \log_b c=\log_a c.$$

133 **Слѣдствіе:** $\log_b c=\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

Примѣръ.

Задача. Въ логариѳмическихъ таблицахъ мы находимъ:

$$\log_{10}5=0{,}69897$$
$$\log_{10}3=0{,}47712.$$

Найти $\log_3 5$.

Рѣшеніе. По только-что приведенному слѣдствію

$$\log_3 5=\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}=\frac{0{,}69897}{0{,}47712}=1{,}46497.$$

134 § 326. **Теорема.** Если въ логариѳмѣ замѣнимъ другъ другомъ основаніе и логариѳмируемое число, то получится величина обратная этому логариѳму.

Утв. $\log_a b \,.\, \log_b a=1.$

(См. опредѣленіе **81**).

Док. $\log_a b \,.\, \log_b a=\log_a a$ [теор. **132**]
$=1$ [по теоремѣ 1 въ § 314].

Примѣчаніе.

Доказанное предложеніе могло бы быть выражено также такимъ равенствомъ:

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}.$$


135 **Слѣдствіе.** Сомножителя, если онъ логариѳмъ, можно изъ дѣлителя перенести сомножителемъ

въ дѣлимое и наоборотъ, если въ немъ при этомъ замѣнить другъ другомъ основаніе и логариѳмируемое число.

Примѣръ

$$\frac{a \log_m n}{b \log_p q} = \frac{a \log_m n \cdot \log_q p}{b} = \frac{a}{b \log_a m \cdot \log_p q}.$$

§ 327. **Теорема.** Отъ перестановки логариѳмируемыхъ чиселъ между собою и основаній между собою величина произведенія логариѳмовъ не измѣняется. **136**

Док. Сначала докажемъ, что теорема справедлива для произведенія двухъ логариѳмовъ, при чемъ воспользуемся знакомъ $\bigwedge\!\underline{\ \ }$, такъ какъ примѣненіе употребляющагося еще обыкновенно знака логариѳма было бы здѣсь очень неудобно:

$$ {}_{a}\!\bigwedge^{m} \cdot {}_{b}\!\bigwedge^{n} = {}_{a}\!\bigwedge^{m} \cdot {}_{b^{{}_{b}\!\bigwedge^{n}}}\!\bigwedge^{n^{{}_{b}\!\bigwedge^{m}}} \qquad \text{[теор. 131]}$$

$$ {}_{a}\!\bigwedge^{m} \quad {}_{m}\!\bigwedge^{n^{{}_{b}\!\bigwedge^{m}}} \qquad \text{[опредѣл. 122}^{5}\text{]}$$

$$ = {}_{a}\!\bigwedge^{m} \cdot {}_{m}\!\bigwedge^{n} \cdot {}_{b}\!\bigwedge^{m} \qquad \text{[теор. 127]}$$

$$ = {}_{a}\!\bigwedge^{n} \cdot {}_{b}\!\bigwedge^{m} \qquad \text{[теор. 132]}$$

$$ = {}_{b}\!\bigwedge^{m} \quad {}_{a}\!\bigwedge^{n} \qquad \text{[теор. 4].}$$

Доказавъ такимъ образомъ справедливость теоремы для произведенія двухъ логариѳмовъ, не трудно, основываясь на этой доказанной уже истинѣ, убѣдиться въ справедливости ея и для произведенія произвольнаго количества логариѳмовъ.

Такъ,

$$ {}_{a}\!\bigwedge^{m} \cdot {}_{b}\!\bigwedge^{n} \cdot {}_{c}\!\bigwedge^{p} = {}_{b}\!\bigwedge^{m} \cdot {}_{a}\!\bigwedge^{n} \cdot {}_{c}\!\bigwedge^{p}$$

$$ = {}_{b}\!\bigwedge^{m} \cdot {}_{a}\!\bigwedge^{p} \cdot {}_{c}\!\bigwedge^{n}$$

и т. д.

Примѣры:

1) $$\frac{\log_a d \cdot \log_d f \cdot \log_f b}{\log_c e \cdot \log_e g \cdot \log_g b} = \frac{\log_a d \cdot \log_f f \cdot \log_d b}{\log_c e \cdot \log_e b \cdot \log_g g}$$

$$= \frac{\log_a d \cdot \log_d b}{\log_c e \cdot \log_e b} = \frac{\log_a b}{\log_c b} = \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

2) $$\frac{\log_a f^m \cdot \log_{d^m} b \cdot \log_f d}{\log_e g \cdot \log_c e^n \cdot \log_{g^n} b} = \frac{\log_a f^m \cdot \log_{d^m} b \cdot \log_{f^m} d^m}{\log_{e^n} g^n \cdot \log_c e^n \cdot \log_{g^n} b} =$$

$$\frac{\log_a d^m \cdot \log_{d^m} b \cdot \log_{f^m} f^m}{\log_{e^n} b \cdot \log_c e^n \cdot \log_{g^n} g^n} = \frac{\log_a d^m \cdot \log_{d^m} b}{\log_c e^n \cdot \log_{e^n} b} = \frac{\log_a b}{\log_c b}$$

$$= \log_a b \cdot \log_b c = \log_a e.$$

137 § 328. **Теорема.** Частное логариѳмовъ двухъ чиселъ по одному и тому же основанію не зависитъ отъ величины этого основанія, т. е., это частное по величинѣ своей остается однимъ и тѣмъ же для всякаго основанія.

Утв. $\frac{\log_a m}{\log_a n} = \frac{\log_b m}{\log_b n}$.

Док. Док. По теоремѣ 133

и $\frac{\log_a m}{\log_a n} = \log_n m$

и $\frac{\log_b m}{\log_b n} = \log_n m$

Слѣд., и въ самомъ дѣлѣ, по теор. VI,

$\frac{\log_a m}{\log_a n} = \frac{\log_b m}{\log_b n}$.

§ 329. **Теорема.** Частное двухъ логариѳмовъ одного и того же числа не зависитъ отъ величины этого числа, т. е., это частное остается однимъ и тѣмъ же для всякаго логариѳмируемаго числа. 

Утв. $\frac{\log_a m}{\log_b m}=\frac{\log_a n}{\log_b n}$

Док. По теоремѣ **136**

$$\log_a m \,.\, \log_b n=\log_a n \,.\, \log_b m$$

Раздѣливъ это равенство [теор. VII] на $\log_b m \,.\, \log_b n$, мы и получаемъ:

$$\frac{\log_a m}{\log_b m}=\frac{\log_a n}{\log_b n}.$$

§ 330. **Логариѳмированіе неравенствъ.**

Теорема 1. При равныхъ основаніяхъ бо́льшихъ 1 логариѳмъ бо́льшаго положительнаго числа больше.

Предп. $a>b$

$c>1$.

Утв. $\log_c a>\log_c b$.

Док. (отъ противнаго).

Допустимъ, что

$$\log_c a=\log_c b$$

или

$$\log_c a<\log_c b.$$

Тогда, возвысивъ c въ ($\log_c a$)-ую и ($\log_c b$)-ую степени, мы имѣли бы при первомъ допущеніи, по теоремѣ VII,

$$c^{\log_c a}=c^{\log_c b},$$

то есть

$$a=b,$$

и при второмъ допущеніи, по теоремѣ 2 въ § 130.

$$c^{\log_c a} < c^{\log_c b},$$

то есть

$$a < b.$$

Но то и другое противорѣчитъ предположенію.

Слѣдовательно, оба допущенія невозможны, а справедливо утвержденіе.

Слѣдствіе. При не измѣняющемся основаніи большемъ 1 логариѳмъ положительнаго числа измѣняется въ томъ же смыслѣ, въ которомъ измѣняется это число.

Теорема 2. Когда основаніе больше 1, то логариѳмы чиселъ бо́льшихъ 1 положительны, а логариѳмы положительныхъ чиселъ меньшихъ 1 отрицательны.

Док. По теоремѣ 2 въ § 314

$$\log_a 1 = 0.$$

По приведенному же только-что слѣдствію логариѳмъ всякаго числа, которое больше 1, долженъ быть больше 0, а логариѳмъ всякаго числа, которое меньше 1, долженъ быть меньше 0. А это, только другими словами, и утверждается теоремою.

Теорема 3. При равныхъ основаніяхъ меньшихъ 1 логариѳмъ большаго положительнаго числа меньше.

Предп. $a > b$

$c < 1$

Утв. $\log_c a < \log_c b$

Док. (отъ противнаго).

Допустимъ, что

$$\log_c a = \log_c b$$

или

$$\log_c a > \log_c b.$$

Тогда, возвысивъ c въ ($\log_c a$)-ую и ($\log_c b$)-ую степени, мы имѣли бы при первомъ допущеніи, по теоремѣ VII,

$$c^{\log_c a}=c^{\log_c b},$$

то есть

$$a=b,$$

и при второмъ допущеніи, по теоремѣ 3 въ § 130,

$$c^{\log_c a}<c^{\log_c b},$$

то есть

$$a<b.$$

Но то и другое противорѣчитъ предположенію.

Слѣдовательно, оба допущенія невозможны, а справедливо утвержденіе.

Слѣдствіе. При неизмѣняющемся основаніи меньшемъ 1 логариѳмъ положительнаго числа измѣняется въ смыслѣ, противоположномъ тому, въ которомъ измѣняется это число.

Теорема 4. Когда основаніе меньше 1, то логариѳмы чиселъ бо́льшихъ 1 отрицательны, а логариѳмы положительныхъ чиселъ меньшихъ 1 положительны.

Док. Исходя изъ равенства

$$\log_a 1=0,$$

мы изъ приведеннаго только-что слѣдствія заключаемъ, что логариѳмъ всякаго числа, которое больше 1, долженъ быть меньше 0, а логариѳмъ всякаго числа, которое меньше 1, долженъ быть больше 0. А это въ другихъ выраженіяхъ и утверждается теоремою.

Теорема 5. Изъ двухъ логариѳмовъ одного и того же числа большаго 1 тотъ меньше, у котораго основаніе больше.

Предп. $a>b$

$c>1$

Утв. $\log_a c<\log_b c$

Док. (отъ противнаго).

Преднославъ, что по опредѣленію логариѳма

$$a^{\log_a c}=b^{\log_b c},$$

допустимъ, что

$$\log_a c=\log_b c$$

или

$$\log_a c>\log_b c.$$

Тогда при извлеченіи корня ($\log_a c$)-ой степени изъ первой части приведеннаго выше равенства и корня ($\log_b c$)-ой степени изъ второй его части мы получили бы, въ случаѣ перваго допущенія по теоремѣ VII,

$$\sqrt[\log_a c]{a^{\log_a c}}=\sqrt[\log_b c]{b^{\log_b c}},$$

то есть

$$a=b,$$

и, въ случаѣ второго допущенія по теоремѣ 2 въ § 273,

$$a<b$$

Но вѣдь предположено, что

$$a>b$$

Слѣдовательно, оба допущенія невозможны, а справедливо утвержденіе.

Слѣдствіе. При не измѣняющемся логариѳмируемомъ числѣ большемъ 1 логариѳмъ измѣняется въ смыслѣ, противоположномъ тому, въ которомъ измѣняется основаніе.

Примѣчаніе. Пока увеличивающееся основаніе меньше 1, логариѳмы уменьшаются, будучи отрицательными, когда же оно станетъ больше 1, логариѳмы уменьшаются, будучи положительными.

Теорема 6. Изъ двухъ логариѳмовъ одного и того же положительнаго числа меньшаго 1 тотъ больше, у котораго основаніе больше.

Док. Эта теорема доказывается такъ же, какъ и предыдущая, но только съ примѣненіемъ теоремы 3 въ § 273.

Слѣдствіе. При не измѣняющемся положительномъ логариѳмируемомъ числѣ меньшемъ 1 логариѳмъ измѣняется въ томъ-же смыслѣ, въ которомъ измѣняется основаніе.

Примѣчаніе. Пока увеличивающееся основаніе меньше 1, логариѳмы растутъ, будучи положительными, когда же оно станетъ больше 1, логариѳмы растутъ, будучи отрицательными.

Упражненіе.

Найти и доказать теоремы о неравенствѣ логариѳмовъ при неравныхъ основаніяхъ и неравныхъ логариѳмируемыхъ числахъ.

§ 331. **Предѣльныя значенія логариѳмовъ.**

Теорема 1. При основаніи большемъ 1 логариѳмъ 0 равенъ $-\infty$.

Предп. $a > 1$.

Утв. $\log_a 0 = -\infty$.

Док. Если мы будемъ при условіи, названномъ въ предположеніи, разсматривать въ $\log_c b$ уменьшеніе b, начиная съ $b=1$, то $\log_a b$ будетъ, начиная отъ 0, уменьшаться [слѣдствіе изъ теоремы 1 въ § 330]. И если мы, считаясь съ тѣмъ, что разсматриваемый логариѳмъ при упомянутыхъ условіяхъ остается отрицательнымъ, назовемъ его $-x$, то должно быть

$$a^{-x}=b$$

или

$$\frac{1}{a^x}=b.$$

Но положительная дробь $\frac{1}{a^x}$ только при безграничномъ увеличеніи x можетъ стать меньше всякаго заданнаго положительнаго числа (теор. 1 въ § 274), что можетъ быть выражено также равенствомъ

$$a^{-\infty}=0.$$

Слѣдовательно, $\log_a b$ при приближеніи b къ 0, оставаясь отрицательнымъ, можетъ стать по абсолютной своей величинѣ больше всякаго заданнаго числа. А это и принято выражать такъ:

$$\log_a 0 = \quad \infty.$$

Теорема 2. При основаніи большемъ 1 логариѳмъ $+\infty$ равняется $+\infty$.

Предп. $a>1$.

Утв. $\log_a \infty = +\infty$.

Док. Если мы при условіи, названномъ въ предположеніи, будемъ разсматривать въ $\log_a b$ увеличеніе b, начиная съ $b=1$, то $\log_a b$ будетъ, начиная отъ 0, увеличиваться [слѣдствіе изъ теоремы 1 въ § 330]. И если мы назовемъ его x, то должно быть

$$a^x = b.$$

Но при $a>1$ степень a^x только при безграничномъ увеличеніи x можетъ стать больше всякаго заданнаго положительнаго числа [теор. 1 въ § 274], что можетъ быть выражено также равенствомъ

$$a^{+\infty} = +\infty.$$

Слѣдовательно, $\log_a b$ при безграничномъ возрастаніи b можетъ стать больше всякаго заданнаго числа. А это и принято выражать такъ:

$$\log_a \infty = +\infty.$$

Совершенно такъ же, какъ послѣднія двѣ теоремы, но только съ ссылкою на слѣдствіе изъ теоремы 3 въ § 330 и на теорему 2 въ § 274, доказываются слѣдующія два предложенія:

Теорема 3. При основаніи меньшемъ 1 логариѳмъ 0 равенъ $+\infty$.

Теорема 4. При основаніи меньшемъ 1 логариѳмъ $+\infty$ равняется $-\infty$.

§ 332. **Еще виды неопредѣленностей.** Такъ какъ всякая степень 1 равняется 1, то $\log_1 1$ можетъ означать всякое число, и потому это выраженіе должно представлять одинъ изъ видовъ неопредѣленностей. По теоремѣ, доказанной въ § 315,

$$\log_{a^n}(a^m) = \frac{m}{n}.$$

При $m=n=0$ степени a^m и a^n превращаются каждая въ 1, а частное $\frac{m}{n}$ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$.

Такъ и при этомъ освѣщенiи вопроса подтверждается то, что сказано было выше о выраженiи $\log_1 1$.

Если $a > 1$, то, по теоремѣ 1 въ § 274, и a^m и a^n превращаются въ ∞ а если $a < 1$, то обѣ эти степени при безконечно большихъ значенiяхъ показателей, по теоремѣ 2 въ томъ же параграфѣ, превращаются въ 0, частное же $\frac{m}{n}$ въ обоихъ случаяхъ принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$. Слѣдовательно, (см. § 118), и выраженiя $\log_\infty \infty$ и $\log_0 0$ представляютъ виды неопредѣленностей.

Легко убѣдиться также, что

$$\log_{a^n} (a^{-m}) = -\frac{m}{n}$$

При безконечно большихъ значенiяхъ буквъ m и n правая часть этого равенства превращается въ $-\frac{\infty}{\infty}$, а лѣвая въ $\log_\infty 0$ или $\log_0 \infty$, смотря по тому, будетъ ли a больше 1 или меньше 1. Слѣдовательно, и выраженiя $\log_\infty 0$ и $\log_0 \infty$ принадлежатъ къ числу символовъ, означающихъ неопредѣленность.

Такъ мы познакомились еще со слѣдующими видами неопредѣленностей:

$$\log_1 1,\ \log_0 0,\ \log_\infty \infty,\ \log_\infty 0,\ \log_0 \infty.$$

ГЛАВА XXVIII.

Логариѳмическiя системы.

Десятичные логариѳмы.

§ 333. **Необходимость въ логариѳмическихъ таблицахъ.** Изъ даннаго нами въ § 317 примѣра видно, какъ сложно вычисленiе приближеннаго значенiя ирраціональнаго логариѳма при примѣненiи элементарныхъ прiемовъ Но и упомянутые тамъ способы болѣе удобнаго вычисленiя такого значенiя ведутъ къ цѣли все-таки еще сравнительно нескоро.

Поэтому существуютъ вычисленныя съ большею или меньшею степенью точности таблицы логариѳмовъ, которыми и пользуются, когда бываютъ нужны логариѳмы чиселъ. Составленiе такого рода таблицъ принесло притомъ огромную пользу потому, что сдѣлало возможнымъ примѣненiе теоремъ о логариѳмированiи выраженiй для облегченiя многихъ вычисленiй, которыя бы безъ этого вспомогательнаго средства были бы чрезвычайно сложны.

Изъ содержанія §§ 189 и 207 можно заключить, сколько бы, напр., труда стоило вычисленіе $\sqrt[17]{5}$ съ точностью даже только до 0,001. Но располагая таблицами логариемовъ, вычисленными, напр., для основанія 10, мы, пользуясь теоремою 129, получаемъ

$$\log_{10}\sqrt[17]{5} = \frac{1}{17}\cdot\log_{10}5,$$

слѣдовательно, находимъ логариемъ $\sqrt[17]{5}$, дѣля $\log_{10}5$ на 17. А найдя $\log_{10}\sqrt[17]{5}$, мы въ тѣхъ же таблицахъ находимъ по этому логариему число равное $\sqrt[17]{5}$ или, выражаясь точнѣе, приближенное значеніе ирраціональнаго числа $\sqrt[17]{5}$ съ тою степенью точности, которая достигается примѣненными таблицами.

§ 334. **Системы логариемовъ.** Самымъ удобнымъ основаніемъ для *вычисленія* логариемовъ оказывается нѣкоторое ирраціональное число, обозначаемое обыкновенно буквою e и равное 2,71828182846... Самымъ же удобнымъ основаніемъ логариемовъ при *примѣненіи логариемическихъ таблицъ* оказывается число 10.

Опредѣленіе. Логариемы всѣхъ абсолютныхъ чиселъ по одному и тому же основанію составляютъ систему логариемовъ.

Система логариемовъ, имѣющая основаніемъ число e, называется натуральною, система же, имѣющая основаніемъ число 10, — десятичною. Натуральные логариемы называются также Неперовыми *), десятичные — также Бригговыми *) или обыкновенными. Основаніе послѣднихъ обыкновенно не пишется; такъ, log 7 означаетъ $\log_{10} 7$, $\log 23$ означаетъ $\log_{10} 23$.

Для натуральныхъ логариемовъ примѣняются обыкновенно знаки lognat (первыя буквы словъ logarithmus naturalis) или l или L; такъ, вмѣсто $\log_e z$ пишутъ или lognat z или $l\,z$, или $L\,z$ **).

---

*) Джонъ Неперъ въ 1614 году опубликовалъ первыя свои таблицы, вычисленныя для основанія, мало отличающагося отъ e. Имъ же введено слово логариемъ (logarithmus). Его другъ Генри Бриггъ (потому десятичные логариемы было бы правильнѣе называть Бриггзовыми) открылъ преимущества десятичныхъ логариемовъ, и вычисленныя имъ таблицы логариемовъ для основанія 10 напечатаны были въ 1617 и въ 1624 годахъ.

**) Первый изъ этихъ знаковъ очень длиненъ и потому неудобенъ, послѣдніе же два могутъ быть приняты за множителей. Самое удобное изъ существующихъ обозначеній, исключающее притомъ возможность какихъ бы то ни было

§ 335. **Причина преимуществъ десятичныхъ логариѳмовъ.** Какъ легко будетъ заключить изъ всѣхъ слѣдующихъ ниже разсужденій, примѣненіе десятичныхъ логариѳмовъ представляетъ особыя удобства потому, что наша система счисленія десятичная. Если бы основаніемъ ея было не число 10, а какое-либо другое, напримѣръ 12, то тѣми же преимуществами обладала бы система логариѳмовъ по основанію 12. Логариѳмируя выраженіе $a \,.\, 10^n$ по основанію 10, мы получаемъ:

$$\log(a \,.\, 10^n) = \log a + \log(10^n)$$
$$= \log a + n \log 10 = \log a + n.$$

Равенствомъ

$$\log(a \,.\, 10^n) = n + \log a$$

объясняются всѣ удобства десятичныхъ логариѳмовъ.

Изъ нихъ на одно укажемъ въ этомъ параграфѣ.

Если $a = 1$, то выраженіе $a \,.\, 10^n$ будетъ означать цѣлое число, изображаемое цыфрою 1 и n нулями послѣ нея, выраженіе же $n + \log a$ превратится въ n. Такъ оказывается, что въ приведенномъ выше равенствѣ заключается слѣдующее предложеніе:

Теорема. Десятичный логариѳмъ числа, изображаемаго единицею съ нулями, есть цѣлое число, выражающее количество этихъ нулей.

§ 336. **Мантисса и характеристика.** Если a означаетъ нѣкоторое цѣлое число или десятичную дробь, то формулою $a \,.\, 10^n$ выражается перенесеніе въ a запятой: положительнымъ показателемъ n указывается, на сколько цыфръ она переносится вправо, отрицательнымъ — на сколько цыфръ влѣво. Въ силу этого равенство

$$\log(a \,.\, 10^n) = n + \log a$$

говоритъ, что при перенесеніи въ числѣ запятой вправо или влѣво деся-

---

недоразумѣній, есть $\Lambda_e^{\underline{\,z\,}}$. Это удобство можно было бы еще увеличить, введя для обозначенія натуральныхъ логариѳмовъ знакъ $\delta^{\underline{\quad}}$. Сравнивая для примѣра начертаніе $\delta^{\underline{a+bx+cx^2}}$ съ обычнымъ $\log_e(a+bx+cx^2)$, нельзя не признать преимуществъ предлагаемаго знака.

тичный логариѳмъ этого числа увеличивается или уменьшается на цѣлое число, что, слѣдовательно, въ логариѳмѣ цыфры послѣ запятой остаются при этомъ все однѣ и тѣ же.

Опредѣленіе. Въ логариѳмѣ, выраженномъ десятичною дробью, цѣлое число передъ запятою называется характеристикою, цыфры же послѣ запятой — мантиссою.

Изъ изложеннаго выше слѣдуетъ, что, напр., логариѳмы чиселъ

4725; 47,25; 0,004725; 4725000

должны имѣть одну и ту же мантиссу и отличаются другъ отъ друга только характеристикою.

Что же касается послѣдней, то способъ опредѣленія ея мы находимъ слѣдующимъ образомъ:

Такъ какъ

$$\log 1 = 0 \text{ и } \log 10 = 1,$$

то по теоремѣ 1 въ § 330 логариѳмы всѣхъ чиселъ, которыя больше 1 и меньше 10, больше 0 и меньше 1, другими словами, характеристика логариѳмовъ всѣхъ однозначныхъ цѣлыхъ чиселъ и десятичныхъ дробей, у которыхъ цѣлая часть однозначное число, есть 0.

Такимъ же образомъ мы изъ равенствъ

$$\log 10 = 1 \text{ и } \log 100 = 2$$

заключаемъ, что характеристика логариѳмовъ всѣхъ двузначныхъ цѣлыхъ чиселъ и всѣхъ десятичныхъ дробей, у которыхъ цѣлая часть двузмачное число, есть 1.

Равнымъ образомъ изъ равенствъ

$$\log 100 = 2 \text{ и } \log 1000 = 3$$

слѣдуетъ, что характеристика логариѳмовъ всѣхъ чиселъ, у которыхъ цѣлая часть трехзначное число, есть 2,

и т. д.

Продолжая разсуждать такъ же, мы находимъ, что характеристика логариѳма числа, у котораго до запятой стоитъ цѣлое число объ n цыфрахъ, есть $n-1$. А это другими словами можетъ быть выражено такъ:

Правило 1. *Характеристика десятичнаго логариѳма числа на 1 меньше количества цыфръ въ цѣлой части этого числа.*

Напр.,

$$\log 481{,}4=2{,}68251$$
$$\log 250000=5{,}39794$$
$$\log 7{,}45=0{,}87216.$$

Если у числа, у котораго цѣлая часть однозначная, перенесемъ запятую на 1 цыфру влѣво, то получится десятичная дробь, у которой первая цыфра послѣ запятой будетъ значащая, передъ запятою же будетъ стоять цыфра 0. Если же запятую перенесемъ влѣво на 2, 3, 4 и т. д. цыфры, то въ получающейся при этомъ правильной десятичной дроби первая значащая цыфра послѣ запятой будетъ соотвѣтственно вторая, третья, четвертая и т. д. Но мы уже видѣли, что при перенесеніи въ числѣ запятой влѣво на нѣкоторое число знаковъ логариѳмъ числа уменьшается на такое же число цѣлыхъ, и что характеристика логариѳма числа, у котораго цѣлая часть однозначная, есть 0. Изъ этого мы заключаемъ, что характеристика логариѳмовъ чиселъ, которыя меньше 1, должна быть опредѣляема слѣдующимъ образомъ:

Правило 2. *Характеристика десятичнаго логариѳма правильной десятичной дроби отрицательна и равна по абсолютной величинѣ количеству нулей передъ первой значащей цыфрой (считая въ томъ числѣ и нуль передъ запятою).*

Такъ, напр.,

$$\log 0{,}7=0{,}84510-1$$
$$\log,\ 0{,}000378=0{,}57749-4.$$

И отрицательную характеристику принято писать передъ запятою. но для того, чтобы отличить, что только характеристика отрицательна, минтисса же положительна, знакъ — пишутъ надъ характеристикою. Такъ приведенные выше два логариѳма пишутся такимъ образомъ:

$$\log 0{,}7=\bar{1},84510$$
$$\log 0{,}000378=4{,}57749.$$

§ 337. **Выводы.** Изъ разсужденій въ предыдущемъ параграфѣ вытекаютъ слѣдующія важныя слѣдствія:

1) Въ таблицахъ десятичныхъ логариѳмовъ нѣтъ надобности помѣщать характеристикъ; слѣдовательно, достаточно, чтобы ими давались однѣ мантиссы.

2) Въ таблицахъ десятичныхъ логариѳмовъ можно будетъ найти логариѳмъ не только каждаго цѣлаго числа, но и всякой десятичной дроби, если ими будутъ даны мантиссы логариѳмовъ натуральнаго ряда чиселъ.

Эти начала положены въ основу при устройствѣ всѣхъ таблицъ десятичныхъ логариѳмовъ.

§ 338. **Объ устройствѣ логариѳмическихъ таблицъ.** Напечатанныя въ началѣ XVII столѣтія логариѳмическія таблицы Бриггза были 14-значныя, т. е. содержали логариѳмы, вычисленные съ точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^{14}}$, но въ нихъ былъ пробѣлъ, который былъ впослѣдствіи заполненъ десятизначными логариѳмами. Изданный въ 1794 году «Thesaurus logarithmorum» Веги (Vega) содержитъ десятизначные логариѳмы и кромѣ того таблицы Вольфрама 48-значныхъ натуральныхъ логариѳмовъ. Затѣмъ вычислялись и печатались 7-ми, 6-ми, 5-ти и 4-хзначныя таблицы. Чѣмъ точнѣе таблицами даются логариѳмы, тѣмъ таблицы объемистѣе и тѣмъ неудобнѣе ими пользоваться. Потому, выбирая для употребленія таблицы, соображаются съ тѣмъ, до какой степени точности доводить вычисленія есть разумный смыслъ. Въ практическихъ и естественно-научныхъ вопросахъ степень точности вычисленій, между прочимъ, должна соотвѣтствовать точности тѣхъ измѣрительныхъ приборовъ, при помощи которыхъ добыты данныя для вычисленій. Нѣтъ, напр., смысла вычислять по измѣренному объему шара его радіусъ съ точностью до 0,0001 сантиметра, если при опредѣленіи этого объема могла произойти ошибка въ нѣсколько кубическихъ сантиметровъ.

Во всѣхъ болѣе или менѣе извѣстныхъ логариѳмическихъ таблицахъ объясняется во введеніи, какъ ими пользоваться. Въ частности же таблицы десятичныхъ логариѳмовъ въ общемъ устроены такъ:

На первой или на первыхъ страницахъ графы съ заголовкомъ N или Num (numerus—число) содержатъ натуральный рядъ чиселъ отъ 1 до 100 (въ пятизначныхъ таблицахъ) или отъ 1 до 1000 (въ шести- и семизначныхъ), а рядомъ съ этими числами въ графахъ съ заголовкомъ log мантиссы логариѳмовъ этихъ чиселъ.

Но эти страницы могли бы и отсутствовать, такъ какъ всѣ содержащіяся здѣсь мантиссы потомъ встрѣчаются въ таблицахъ вновь, ибо какъ разъяснено было въ § 336, мантиссы логариѳмовъ чиселъ 3, 30, 300, 3000 однѣ и тѣ же, равнымъ образомъ мантиссы логариѳмовъ чиселъ 47, 470 и 4700 или чиселъ 568 и 5680 и т. д.

На страницахъ, слѣдующихъ за этими, первыя три или соотвѣтственно четыре цыфры чиселъ помѣщаются въ крайней лѣвой графѣ съ заголовкомъ N или Num, четвертая же или соотвѣтственно пятая цыфра ихъ надписана

въ видѣ заголовка надъ слѣдующими десятью графами, въ которыхъ и помѣщаются мантиссы логариѳмовъ чиселъ, выражаемыхъ всѣми четырьмя или соотвѣтственно пятью цыфрами. Но ради сбереженія мѣста не всѣ цыфры мантиссы печатаются въ графахъ: первыя двѣ или три общія всѣмъ мантиссамъ въ двухъ, трехъ и т. д. строкахъ помѣщаются только одинъ разъ въ графѣ 0, а затѣмъ въ этой графѣ и вездѣ въ остальныхъ только слѣдующія за ними цыфры мантиссы. Гдѣ встрѣчаются строка, содержащая первыя цыфры числа, и вертикальная графа, озаглавленная послѣднею цыфрою его, тамъ описаннымъ способомъ и изображена мантисса логариѳма этого числа.

Когда же слѣдующія по порядку новыя первыя цыфры мантиссы не приходятся на графу, озаглавленную цыфрою 0, то послѣднія цыфры этой мантиссы снабжаются слѣва звѣздочкою, первыя же помѣщаются строкою ниже той, въ которой бы имъ надлежало стоять. Такимъ образомъ такая звѣздочка означаетъ, что первыя цыфры мантиссы стоятъ строкою ниже той, которая содержитъ послѣднія ея цыфры, снабженныя такимъ отличительнымъ знакомъ.

Въ нѣкоторыхъ болѣе точныхъ таблицахъ указывается еще, выражаютъ ли даваемыя ими мантиссы приближенныя значенія логариѳмовъ съ недостаткомъ или съ избыткомъ: въ послѣднемъ случаѣ послѣдняя цыфра мантиссы снабжается горизонтальною черточкою подъ нею. Такъ, напр., снабженіе мантиссы 8415472, соотвѣтствующей числу 6943, такимъ знакомъ имѣетъ тотъ смыслъ, что при вычисленіи ея получилась седьмою цыфрою 1 и восьмою цыфра не меньшая, чѣмъ 5, и что по этой причинѣ седьмая цыфра мантиссы повышена на 1.

§ 339. Интерполированіе. При помощи нѣкоторыхъ очень легкихъ вычисленій можно изъ пятизначныхъ таблицъ найти также логариѳмы пятизначныхъ чиселъ, а изъ 6-ти и 7-значныхъ также логариѳмы 6-ти и 7-значныхъ чиселъ. Какъ производить такія вычисленія, это можетъ быть выяснено такимъ разсужденіемъ.

Сравнивая въ логариѳмическихъ таблицахъ между собою нѣсколько слѣдующихъ одна послѣ другой мантиссъ, мы замѣтимъ, что послѣдовательныя приращенія ихъ почти равны. Такъ изъ любой изъ пятизначныхъ таблицъ мы можемъ убѣдиться, что мантиссы для чиселъ отъ 2162 до 2181 увеличиваются всякій разъ на 20, когда число увеличивается на 1, что при увеличеніи числа съ 2181 до 2182 мантисса увеличивается на 19, а затѣмъ опять нѣсколько разъ на 20; и что прекращается разность 20 между ближайшими мантиссами только, начиная съ числа 2281.

Почему это такъ должно быть, это видно изъ слѣдующаго:

Пусть будутъ n, $n+1$, $n+2$ три послѣдовательныя числа въ таблицѣ. Тамъ мы находимъ ихъ логариѳмы: $\log n$, $\log(n+1)$ и $\log(n+2)$. Число два

раза увеличивается на 1, соотвѣтствующія же приращенія логариѳмовъ выразятся формулами: $\log (n+1)-\log n$ и $\log (n+2)-\log (n+1)$. Но эти разности, по теоремѣ **126**, равны первая $\log\frac{n+1}{n}$, вторая $\log\frac{n+2}{n+1}$. Чтобы сравнить ихъ другъ съ другомъ, можно ихъ вычесть одну изъ другой, и въ такомъ случаѣ мы, по той же теоремѣ, получимъ:

$$\log\frac{n+1}{n}-\log\frac{n+2}{n+1}=\log\left(\frac{n+1}{n}:\frac{n+2}{n+1}\right)=\log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\log\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=$$
$$\log\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n}+\frac{1}{n^2+2n}\right)=\log\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right].$$

Но такъ какъ

$$n(n+2)>n^2,$$

то

$$\frac{1}{n(n+2)}<\frac{1}{n^2}$$

и

$$\log\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]<\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

Такъ оказывается, что приращенію числа два раза на 1 соотвѣтствуютъ два приращенія логариѳмовъ, отличающіяся другъ отъ друга менѣе чѣмъ на $\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, т. е., меньше, напр., чѣмъ на $\log 1{,}000001$, если $n=1000$, и еще на меньше, если $n>1000$. Изъ семизначныхъ же таблицъ мы находимъ, что $\log 1{,}000001=0{,}0000004$. А эта величина слишкомъ въ 25 разъ меньше той дроби, съ точностью до которой даются логариѳмы пятизначными таблицами. А поэтому мы и можемъ, не дѣлая сколько-нибудь чувствительной погрѣшности, считать, что при послѣдовательныхъ увеличеніяхъ четырехзначныхъ, а тѣмъ болѣе пятизначныхъ чиселъ, всякій разъ на 1, мантиссы логариѳмовъ этихъ чиселъ увеличиваются всякій разъ на одну и ту же величину.

Другими словами, мы допустимъ очень незначительную погрѣшность, если будемъ считать приращенія мантиссъ пропорціональными приращеніямъ четырехзначныхъ и пятизначныхъ чиселъ въ предѣлахъ примѣрно одного десятка.

Аналогичными разсужденіями можетъ быть доказана приблизительная пропорціональность въ предѣлахъ одной или нѣсколькихъ сотенъ

приращеніямъ шестизначныхъ и семизначныхъ чиселъ приращеній ихъ шестизначныхъ и семизначныхъ логариѳмовъ.

Если бы приращеніе числа всякій разъ составляло k, а не 1, то два такихъ приращенія дали бы намъ числа $n+k$ и $n+2k$, а соотвѣтственныя приращенія логариѳмовъ ихъ были бы $\log\frac{n+k}{n}$ и $\log\frac{n+2k}{n+k}$

Разность же послѣднихъ приращеній была бы

$$\log\frac{n+k}{n}-\log\frac{n+2k}{n+k}=\log\left(\frac{n+k}{n}:\frac{n+2k}{n+k}\right)=\log\frac{(n+k)^2}{n(n+2k)}=\log\frac{n^2+2nk+k^2}{n^2+2nk}=$$

$$\log\left(1+\frac{k^2}{n(n+2k)}\right),$$

что меньше, чѣмъ $\log\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$. А такъ какъ значеніе послѣдняго выраженія тѣмъ меньше отличается отъ 0, чѣмъ меньше k въ сравненіи съ n, то мы результатъ нашихъ разсужденій можемъ формулировать такъ:

Считая приращенія логариѳмовъ чиселъ пропорціональными приращеніямъ этихъ чиселъ, мы дѣлаемъ тѣмъ меньшую ошибку, чѣмъ меньшую часть этихъ чиселъ составляютъ приращенія ихъ.

Если, напр., число увеличится съ 1000000 до 1000100 и затѣмъ еще до 1000200, то приращенія оба раза составятъ не болѣе 0,0001 числа, слѣдовательно, соотвѣтственныя приращенія логариѳмовъ этихъ чиселъ будутъ отличаться другъ отъ друга менѣе, чѣмъ на log 1,00000001, то есть, менѣе чѣмъ на 0,000000004, какъ въ этомъ можно убѣдиться изъ большихъ таблицъ.

На сказанной пропорціональности и основываются упомянутыя въ началѣ этого параграфа вычисленія. Мы при помощи ихъ находимъ логариѳмы чиселъ, находящихся между тѣми, для которыхъ даны въ таблицахъ логариѳмы непосредственно. Такой пріемъ называется интерполированіемъ; и очень простое выполненіе его мы и покажемъ на примѣрѣ.

§ 340. Примѣры интерполированія.

1) Пятизначными таблицами даются логариѳмы чиселъ, выражаемыхъ не болѣе, чѣмъ четырьмя цифрами. Если же требуется отыскать логариѳмъ пятизначнаго числа, напр. 28,726, то мы его находимъ, разсуждая слѣдующимъ образомъ:

Въ таблицѣ имѣются мантиссы логариѳмовъ чиселъ 2872 и 2873, онѣ же будутъ мантиссами и для чиселъ 28720 и 28730, между которыми заключено число 28726. Мы выписываемъ изъ таблицы логариѳмы этихъ чиселъ а затѣмъ чрезъ вычитаніе находимъ приращенія чиселъ и логариѳмовъ

log 28720 = 4,45818
log 28730   4,45834
(увеличеніе числа) 10   16 (увеличеніе мантиссы)

Приращенію числа на 10 соотвѣтствуетъ приращеніе мантиссы на 16, слѣдовательно, при приращеніи числа на 1 мантисса увеличилась бы на $\frac{16}{10}$ а при увеличеніи числа съ 28720 до 28726, т. е. при приращеніи его на 6, мантисса должна увеличиться на $\frac{16\,.\,6}{10}=9{,}6$.

Слѣдовательно,

$$\log 28726 = 4{,}458276.$$

Въ этомъ логариѳмѣ характеристика 4 соотвѣтствуетъ цѣлому числу 28726, числу же 28,726, по правилу 1 въ § 336, соотвѣтствуетъ характеристика 1, такъ что способомъ интерполированія мы нашли:

$$\log 28{,}726 = 1{,}458276.$$

2) Семизначными таблицами непосредственно даются логариѳмы чиселъ, выражаемыхъ не болѣе, чѣмъ пятью цыфрами. Для того же, чтобы найти логариѳмъ какого-либо семизначнаго числа, напр., 6486,794, мы поступаемъ такимъ образомъ:

Мы выписываемъ изъ таблицы и находимъ:

log 6486700 = 6,8120238
log 6486800 = 6,8120305
(увеличеніе числа) 100   67 (увеличеніе мантиссы);

а затѣмъ разсуждаемъ такъ:

При увеличеніи числа на 100 мантисса увеличивается на 67, слѣдовательно, приращенію его на 1 соотвѣтствуетъ приращеніе мантиссы на $\frac{67}{100}$, а приращенію его на 94 увеличеніе мантиссы на $\frac{67\,.\,94}{100}=62{,}98$, вмѣсто чего ее увеличиваютъ на мало отъ 62,98 отличающееся число 63, такъ какъ

вѣдь и таблицами даются и чрезъ интерполированіе вычисляются только приближенныя значенія логариѳмовъ, при чемъ въ случаѣ примѣненія семизначныхъ таблицъ степень точности доходитъ только до 0,0000001.

Такъ мы находимъ:

$$\log 6486,794 = 3,8120301.$$

§ 341. Отысканіе числа по данному логариѳму его. Разности между мантиссами, слѣдующими въ логариѳмическихъ таблицахъ другъ за другомъ, сравнительно велики и потому очень рѣдко случается, что въ таблицахъ встрѣчается та именно мантисса, которую имѣетъ данный логариѳмъ. Поэтому при отысканіи числа по данному логариѳму его почти всегда приходится интерполировать, пользуясь разъясненною въ § 339 истиною, что при указанныхъ тамъ условіяхъ приращенія чиселъ и приращенія логариѳмовъ ихъ могутъ считаться пропорціональными другъ другу.

Если, напр., требуется отыскать число x, котораго логариѳмъ равенъ $\bar{2},83428$, то мы его можемъ найти слѣдующимъ образомъ:

Въ таблицѣ мы находимъ мантиссы 83423 и 83429, между которыми заключена мантисса даннаго логариѳма:

	мантиссѣ 83423	соотвѣтствуетъ	число 68270	
	« 83429	«	« 68280	
(увеличеніе мантиссы)	6		10	(увеличеніе числа).

Приращенію мантиссы на 6 соотвѣтствуетъ увеличеніе числа на 10; слѣдовательно, при приращеніи мантиссы на 1 число увеличилось бы на $\frac{10}{6}$. При увеличеніи же мантиссы съ 83423 до мантиссы 83428 даннаго логариѳма, т. е. на 5, число должно увеличиться на $\frac{10 . 5}{6} = \frac{50}{6} = 8,3...$, такъ что мантиссѣ даннаго логариѳма соотвѣтствуетъ число 68278,3, а искомое число

$$x = 0,0682783,$$

такъ какъ у даннаго логариѳма характеристика —2.

Изъ разсмотрѣннаго примѣра мы видимъ, что при отысканіи числа по данному логариѳму его интерполированіе должно производить, разсуждая совершенно такъ же, какъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда при отысканіи логариѳма для даннаго числа нужно интерполировать. Поэтому мы счи-

таемъ излишнимъ приводить здѣсь примѣры отысканія посредствомъ интерполированія числа по данному логариѳму его при примѣненіи таблицъ болѣе точныхъ, чѣмъ пятизначныя.

§ 342. **Пропорціональныя части**. Произведенныя нами при интерполированіи умноженія можно найти готовыми въ имѣющихся обыкновенно въ логариѳмическихъ таблицахъ вспомогательныхъ табличкахъ, помѣщаемыхъ на краяхъ страницъ, содержащихъ мантиссы, и озаглавленныхъ P. P., что означаетъ «partes proportionales», то есть, «пропорціональныя части». Эти таблички дѣлаютъ излишними и дѣленія, которыя мы производили при интерполированіи.

Покажемъ примѣненіе этихъ табличекъ на отысканіи при помощи ихъ нѣсколькихъ логариѳмовъ, начавъ съ тѣхъ, которые найдены были нами въ § 340, а затѣмъ и на отысканіи числа по данному логариѳму его.

1) На той же страницѣ, на которой помѣщены мантиссы для чиселъ 2872 и 2873, мы находимъ табличку, озаглавленную числомъ 16, равнымъ разности этихъ мантиссъ. Такую разность называютъ «т а б л и ч н о ю р а з н о с т ь ю» и обыкновенно обозначаютъ буквою d (differentia=разность). Въ упомянутой табличкѣ показана для пятой цыфры 6 та именно поправка 9,6, которую мы вычислили въ названномъ параграфѣ. Прибавленіе этой поправки можетъ быть расположено слѣдующимъ образомъ, если оно не дѣлается въ умѣ:

Число		Мантисса	
2872 . .	.	45818	$d=16$
6		96	
log 28,726	=	1,458276	

2) На той же страницѣ, на которой помѣщены въ семизначныхъ таблицахъ мантиссы для чиселъ 64867 и 64868, мы находимъ табличку, озаглавленную числомъ 67, равнымъ разности этихъ мантиссъ.

Въ этой табличкѣ показаны въ строкахъ 9 и 4 произведенія

$$9 \cdot \frac{67}{100}=6,03$$

и

$$4 \cdot \frac{67}{100}=2,68.$$

Поэтому достаточно произвести слѣдующее сложеніе:

$$\begin{array}{r} 90\cdot\frac{67}{100}=60{,}3 \\ +\quad 4\cdot\frac{67}{100}=2{,}68 \\ \hline \end{array}$$

чтобы получить произведеніе $94\cdot\frac{67}{100}=62{,}98$,

то есть какъ разъ ту поправку, которую мы вычислили на стр. 368 въ § 340. Но удобнѣе такую поправку не вычислять отдѣльно, а сразу прибавлять къ находимой въ логариѳмической таблицѣ мантиссѣ всѣ поправки, находимыя при посредствѣ таблички P. P. для 6-й, 7-й и т. д. цыфръ даннаго числа. Такое дѣйствіе можетъ быть расположено слѣдующимъ образомъ:

Число	Мантисса	
64867. . . .	8120238	$d=67$
9	603	
+ 4	268	

log 6486,794 = 3,8120301.

Послѣднее число нами написано вмѣсто 3,812030098 по причинѣ, указанной въ § 340.

3) Способомъ, указаннымъ въ этомъ параграфѣ, мы логариѳмъ числа 0,0151862 находимъ изъ пятизначныхъ таблицъ такимъ образомъ:

Число	Мантисса	
1518.	18127	$d=29$
6	174	
2	58	

log 0,0151862 $\bar{2}$,18145

Послѣднее число нами написано вмѣсто $\bar{2}$,1814498, такъ какъ логариѳмъ этотъ опредѣленъ при помощи пятизначныхъ таблицъ и поэтому въ немъ шестая и седьмая цыфра послѣ запятой не могутъ считаться вѣрными, а могутъ намъ служить только указаніемъ того, что приближенное съ избыткомъ значеніе логариѳма $\bar{2}$,18145 ближе къ истинному значенію его, чѣмъ приближенное съ недостаткомъ значеніе его $\bar{2}$,18144.

Примѣчаніе.

Замѣтимъ тутъ кстати, что иногда есть смыслъ удерживать получающуюся при интерполированіи 8-ю цыфру въ случаѣ примѣненія 7-значныхъ логариѳмическихъ таблицъ и 6-ю въ случаѣ примѣненія 5-значныхъ таблицъ и подобно этому одну лишнюю цыфру и при примѣненіи другихъ таблицъ.

Если, напр., нѣсколько логариѳмовъ, найденныхъ посредствомъ интерполированія, нужно сложить и они случайно окажутся или всѣ приближенными значеніями съ недостаткомъ или всѣ приближенными значеніями съ избыткомъ, то, оставивъ въ логариѳмахъ только такое же количество цыфръ послѣ запятой, какое дается логариѳмическими таблицами, и произведя названное дѣйствіе, мы получимъ погрѣшность, которая можетъ превысить одну единицу послѣдняго (низшаго) разряда уже при трехъ слагаемыхъ и можетъ составить очень значительную ошибку, если такихъ слагаемыхъ будетъ больше. Потому въ тѣхъ случаяхъ, когда надъ отысканными логариѳмами предстоитъ еще производить дѣйствія, лучше удерживать такую лишнюю цыфру, если эта цыфра 3, 4 или 5, и не отбрасывать ея, повышая зато по обычаю предыдущую цыфру на 1, если эта цыфра 5, 6 или 7. Если эта цыфра во многихъ случаяхъ сама по себѣ и будетъ неправильною, то удержаніе ея все-таки поможетъ уменьшить погрѣшность.

§ 343. **Примѣненіе Р. Р. при отысканіи числа по данному логариѳму его.** Чтобы на примѣрѣ показать примѣненіе пропорціональныхъ частей при отысканіи числа по данному логариѳму его, отыщемъ этимъ способомъ число по тому же самому данному логариѳму $\overline{2},83428$, по которому оно безъ этого вспомогательнаго средства нами было найдено въ § 341, а затѣмъ еще число по данному семизначному логариѳму его.

1) Мантисса 83428 заключена между мантиссами 83423 и 83429, такъ что $d=6$. Мантисса даннаго логариѳма на 5 больше меньшей изъ упомянутыхъ табличныхъ мантиссъ. Ближе всего къ 5 въ табличкѣ 6 въ правой графѣ будетъ 4,8, такъ что пятою цыфрою искомаго числа должна быть стоящая въ той же строкѣ въ лѣвой графѣ цыфра 8. Но данная мантисса такимъ образомъ оказывается еще на 0,2 больше мантиссы числа 68278. Изъ той же таблички 6 мы видимъ, что если бы у числа еще была шестая цыфра 3, то мантисса была бы еще на 0,18 больше (десятая часть поправки для пятой цыфры 3), такъ что данной мантиссѣ соотвѣтствуетъ число 682783, число же $\overline{2},83428$ есть логариѳмъ числа 0,0682783 (правило 2 въ § 336).

Описанное отысканіе числа могло бы быть расположено и произведено по слѣдующей схемѣ, которой можно придерживаться всегда въ подобныхъ случаяхъ:

Логариѳмъ	Число	
$\log x = \overline{2},83428$		$d=6$
23 . . .	6827	
5		
4,8	8	
2		
1,8	3	
	$x = 0,0682783.$	

Въ этой схемѣ во второй строкѣ цыфры 2 3 суть послѣднія двѣ цыфры табличной мантиссы, ближайшей къ мантиссѣ даннаго логариѳма, но меньшей, чѣмъ она. Рядомъ въ той же строкѣ стоитъ число, соотвѣтствующее этой табличной мантиссѣ, правѣе же въ первой строкѣ разность между этою мантиссой и слѣдующею за нею въ логариѳмической таблицѣ. Цыфра 5 въ третьей строкѣ получена чрезъ вычитаніе. Въ четвертой строкѣ число 4,8 есть ближайшее къ 5 (но меньшее, чѣмъ 5) число изъ правой графы таблички 6, а 8—число, стоящее въ ней съ нимъ рядомъ въ лѣвой графѣ. Число 2 въ пятой строкѣ есть удесятеренная разность стоящихъ надъ нимъ обоихъ чиселъ, а 1,8—ближайшее къ 2 (но меньшее, чѣмъ оно) число изъ правой графы таблички, 3 же—стоящая рядомъ цыфра изъ лѣвой ея графы.

Такъ какъ въ правыхъ графахъ табличекъ P. P. въ пятизначныхъ логариѳмическихъ таблицахъ стоятъ поправки, соотвѣтствующія пятой цыфрѣ числа, то для шестой, какъ мы видѣли, нужно поправками брать десятыя части ихъ. Потому, наоборотъ, при отысканіи числа по данному логариѳму его слѣдовало бы при опредѣленіи шестой цыфры его сравнивать съ соотвѣтствующимъ остаткомъ десятыя части имѣющихся въ табличкахъ P. P. поправокъ. Но вмѣсто этого удобнѣе сравнивать съ неизмѣненными поправками удесятеренный упомянутый остатокъ, что нами и сдѣлано въ данной нами и объясняемой здѣсь схемѣ.

Въ послѣдней строкѣ схемы помѣщены всѣ шесть полученныхъ описаннымъ способомъ цыфръ числа, соотвѣтствующаго данной мантиссѣ 83428, при чемъ шестая цыфра его могла бы быть при указанныхъ выше условіяхъ и опущена.

Мѣсто запятой въ полученномъ числѣ x опредѣлено по правилу 2 въ § 336.

2) Отысканіе числа по данному семизначному логариѳму его произведемъ сразу же по данной выше схемѣ, удесятеряя притомъ также получающіеся остатки по такой же, какъ и тамъ, причинѣ.

Если дано, что

$$\log x = 2,5410345$$

то, примѣняя всѣ сдѣланныя выше указанія, мы находимъ x при помощи семизначныхъ логариѳмическихъ таблицъ слѣдующимъ образомъ:

Логариѳмъ	Число	
$\log x = 2,5410345$	34756	$d = 125$
298		
47		
37,5	3	
9 5		
8 7,5	7	
7 5		
7 5	6	
x	347,56376	

§ 344. **Преобразованія отрицательныхъ логариѳмовъ.** Находя въ таблицахъ десятичныхъ логариѳмовъ только мантиссы, мы логариѳмъ каждой правильной дроби находимъ изъ нихъ въ видѣ двучлена съ характеристикою въ качествѣ отрицательнаго члена и мантиссы въ качествѣ положительнаго члена. Но при производствѣ нѣкоторыхъ дѣйствій бываетъ нужно логариѳмъ, данный въ такомъ такъ называемомъ *искусственномъ видѣ*, преобразовать въ обыкновенное отрицательное число. Такое преобразованіе есть всегда простое вычисленіе значенія двучлена. Такъ, напр., для приведенныхъ въ § 336 логариѳмовъ чиселъ 0,7 и 0,000378 это преобразованіе будетъ состоять въ слѣдующемъ:

$$\log 0{,}7 = \bar{1}{,}84510 = 0{,}84510 - 1 = -0{,}15490;$$
$$\log 0{,}000378 = \bar{4}{,}57749 = 0{,}57749 - 4 = -3{,}42251.$$

Для того же, чтобы найти по данному отрицательному логариѳму числа это послѣднее, нужно логариѳмъ предварительно преобразовать въ искусственный видъ, то есть такъ, чтобы въ немъ была только характеристика отрицательная.

Если нужно, напр., найти число x, котораго логариѳмъ равенъ $-2{,}29645$, то мы производимъ такое преобразованіе:

$$\log x = -2{,}29645$$
$$= 3 - 2{,}29645 - 3$$
$$= 0{,}70355 - 3$$
$$= \bar{3}{,}70355;$$

и теперь изъ таблицы находимъ число

$$x = 0{,}005053$$

Или если нужно найти число, котораго логариѳмъ равенъ $-0{,}6639808$, то мы производимъ такое преобразованіе:

$$\log y = -0{,}6639808$$
$$= 1 - 0{,}6639808 - 1$$
$$= \bar{1},3360192,$$

и въ семизначныхъ таблицахъ находимъ число:

$$y = 0{,}21678.$$

§ 345. **Замѣна вычитанія логариѳма сложеніемъ.** При помощи такого же преобразованія, которое было описано въ предыдущемъ параграфѣ, можно вычитаніе логариѳма замѣнить сложеніемъ. Если, напр., требуется

вычесть 3,71023, то можно это вычитаніе замѣнить прибавленіемъ числа 3,71023, послѣднее же преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$-3,71023 = 4 - 3,71023 \quad 4$$
$$= +4,\ 28977.$$

или если нужно вычесть 5,97421, то мы можемъ это вычитаніе замѣнить прибавленіемъ числа 5,97421, послѣднее же преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$5,97421 = -(0,97421 \quad 5)$$
$$= \ (-4,02579)$$
$$= +4,\ 02579.$$

Изъ приведенныхъ же и подобныхъ имъ примѣровъ мы легко выводимъ слѣдующее правило:

Правило. *При замѣнѣ вычитанія логариѳма сложеніемъ нужно къ характеристикѣ его прибавить* +1 *и перемѣнить затѣмъ ея знакъ, мантиссу же его замѣнить новою, цыфры которой дополняютъ соотвѣтственныя первыя цыфры прежней до* **9**, *послѣднюю до* **10**.

Изложеннымъ пріемомъ можетъ быть достигнуто, что значеніе многочлена, состоящаго изъ логариѳмовъ въ качествѣ членовъ, можетъ быть вычислено однимъ сложеніемъ.

§ 346. **Умноженіе логариѳма съ отрицательною характеристикою.** При умноженіи логариѳма, даннаго въ искусственномъ видѣ, на положительное цѣлое число, можно дѣйствіе это производить, умножая отдѣльно его составныя части, т. е. мантиссу и характеристику отдѣльно, и слагая затѣмъ результаты, при чемъ послѣднее умноженіе часто можетъ быть произведено въ умѣ. Если же множитель отрицательное цѣлое число или десятичная дробь, то упомянутаго вида логариѳмъ лучше предварительно преобразовать въ обыкновеннаго вида отрицательное число и затѣмъ умножать и уже послѣ этого результату придать искуственный видъ, если въ этомъ представится надобность.

Примѣры.

1) 2,80456 мы умножаемъ на 9 такъ:

$$\begin{array}{r} \bar{2},80456 \\ .\ 9 \\ \hline \overline{11},24104. \end{array}$$

При умноженіи первой послѣ запятой цыфры мантиссы получается 72, вслѣдствіе чего мы пишемъ 2 и удерживаемъ въ умѣ 7. Это число 7 вмѣстѣ

съ произведеніемъ —18 характеристики 2 на 9 и даютъ характеристику произведенія —11.

2)
$$
\begin{array}{r}
\overline{3},5907438 \\
.\ 236 \\
\hline
35444628 \\
17722314 \\
11814876 \\
\hline
139,4155368 \\
-708 \\
\hline
\overline{569},41554
\end{array}
$$

Въ полученномъ произведеніи мы послѣднихъ двухъ цыфръ послѣ запятой не пишемъ, такъ какъ множимое предполагается приближеннымъ значеніемъ логариѳма, которое какъ таковое можетъ отличаться отъ истиннаго его значенія на величину, которая можетъ доходить до 0,00000005, и эта погрѣшность при умноженіи на 236 можетъ дать въ произведеніи ошибку, могущую превзойти даже немного 0,00001.

3) $\overline{1},50603 \,.\, (-7) =$
$(-0,49397) \,.\, (-7) = 3,45779.$

4) $\overline{4},96983 \,.\, 0,8304 =$
$-3,03017 \,.\, 0,8304 = -2,516253$
$= \overline{3},483747.$

Если примѣняютъ пятизначныя логариѳмическія таблицы, то нѣтъ смысла производить вообще всѣ вычисленія съ точностью большею, чѣмъ до 0,000005. Потому въ этомъ примѣрѣ умноженіе можно было бы произвести сокращенно и въ произведеніи будетъ достаточно шести знаковъ послѣ запятой. Такъ мы и получаемъ въ результатѣ $-2,516253 = \overline{3},483747$.

§ 347. **Дѣленіе логариѳма съ отрицательною характеристикою.**

1) Если требуется раздѣлить такого вида логариѳмъ на такое положительное цѣлое число, которое содержится въ характеристикѣ цѣлое число разъ, то дѣленіе можно произвести безъ всякихъ дальнѣйшихъ преобразованій, какъ видно изъ слѣдующаго примѣра:

$$\overline{15},21803 : 5 = \overline{3},043606$$

2) Если дѣлитель положительное цѣлое число, не содержащееся цѣлое число разъ въ характеристикѣ, то дѣленіе произвести удобнѣе всего, представивъ логариѳмъ въ видѣ разности съ дѣлящимся нацѣло вычитаемымъ

Примѣры.

а) $\bar{3},05945 : 7 =$
$(0,05945 - 3) : 7 =$
$(4,05945 - 7) : 7 = 0,57992 - 1$
$= \bar{1},57992$

б) $\overline{11},83096 : 5 =$
$(0,83096 - 11) : 5 =$
$(4,83096 - 15) : 5 = 0,96619 - 3$
$= \bar{3},96619$

3) Если дѣлитель отрицательное цѣлое число или десятичная дробь, то удобнѣе всего дѣлить, преобразовавъ предварительно дѣлимое изъ искусственнаго вида въ обыкновенную отрицательную десятичную дробь.

Примѣры.

а) $\bar{8},50386 : (-11) =$
$(-7,49614) : (-11) =$
$7,49614 : 11 = 0,68147$

б) $\bar{3},7162518 : 1,302 =$
$(-2,2837482) : 1,302 =$
$\bar{1},7540309$

в) $\bar{1},89753 : 2\frac{7}{9} =$

$\bar{1},89753 : \frac{25}{9}$

$\bar{1},89753 \cdot \frac{9}{25} =$

$\bar{1},07777 : 25 =$

$(24,07777 - 25) : 25 = \bar{1},96311.$

§ 348. **Вычисленіе болѣе сложныхъ выраженій при помощи логариѳмовъ.** Пользуясь теоремами о логариѳмахъ и логариѳмическими таблицами, можно вычислять сравнительно легко выраженія, которыхъ вычисленіе безъ нихъ было бы сопряжено съ величайшими трудностями и неудобствами.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ такихъ вычисленій.

1) Чтобы вычислить

$$x = \frac{0,45^5 \cdot \sqrt[7]{3,74}}{4 \cdot 5,7^{1,53} \cdot \sqrt[9]{0,83^{-2}}},$$

логариѳмируемъ это выраженіе:

$$\log x = 5 \log 0{,}45 + \frac{1}{7} \log 3{,}74 - \log 4 - 1{,}53 \log 5{,}7 + \frac{2}{9} \log 0{,}83.$$

Вычисленіе же $\log x$ расположимъ слѣдующимъ образомъ:

$$\log 0{,}45 = \bar{1}{,}65321 \qquad 5 \log 0{,}45 = \bar{2}{,}26605$$

$$\log 3{,}74 = 0{,}57287 \qquad \frac{1}{7} \log 3{,}74 = 0{,}08184$$

$$\log 4 = 0{,}60206 \qquad \log 4 = \bar{1}{,}39794$$

$$1{,}53 \log 5{,}7 = 1{,}15648 \qquad -1{,}53 \log 5{,}7 = \bar{2}{,}84352$$

$$\log 0{,}83 = \bar{1}{,}91908 \qquad \frac{2}{9} \log 0{,}83 = \bar{1}{,}98202$$

$$\log x = \bar{4}{,}57137$$

Отыскавъ число, котораго логариѳмъ равенъ $\bar{4}{,}57137$, мы и получимъ искомое значеніе даннаго выраженія

$$x = 0{,}00037271$$

2) Чтобы вычислить выраженіе

$$y = \sqrt[-19]{-\frac{0{,}105945}{0{,}080743}},$$

мы можемъ его предварительно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$y = \sqrt[-19]{-\frac{0{,}105945}{0{,}080743}} = \sqrt[19]{-\frac{0{,}080743}{0{,}105945}} = -\sqrt[19]{\frac{0{,}080743}{0{,}105945}}.$$

Такъ какъ это выраженіе есть отрицательное число, то мы его логариѳмировать не можемъ [см. § 318]. Поэтому мы вычисляемъ сначала при помощи логариѳмовъ положительное число $-y$. Логариѳмируя его, мы получаемъ:

$$\log(-y) = \frac{1}{19}(\log 0{,}080743 - \log 0{,}105945);$$

вычисленіе же располагаемъ такъ:

$$\log 0{,}080743 = \bar{2},907105$$
$$\log 0{,}105945 = \bar{1},025065$$
$$\bar{1},88204.$$

Раздѣливъ эту разность на 19, мы получаемъ:

$\log(-y) = \bar{1},99379,$ а отсюда

$-y = 0{,}98585.$ слѣд.,

$y = -0{,}98585.$

3) Если въ выраженіи, имѣющемъ быть вычисленнымъ, встрѣчаются знаки дѣйствій $+$ и $-$, то вычисленіе осложняется тѣмъ обстоятельствомъ, что ни логариѳмъ суммы не можетъ быть выраженъ чрезъ логариѳмы слагаемыхъ его, ни разность чрезъ логариѳмы уменьшаемаго и вычитаемаго. Но по частямъ можно значеніе и такого выраженія все-таки вычислить при помощи логариѳмовъ. Какъ въ такихъ случаяхъ поступать и нагляднѣе располагать вычисленія, покажемъ на опредѣленіи значенія выраженія

$$z = \sqrt[23]{\frac{0{,}594^{3,5} - \sqrt[10]{64{,}593}}{3^{0,74324} + \sqrt[1,7]{0{,}6}}}.$$

Обозначимъ $0{,}594^{3,5}$ буквою a, $\sqrt[10]{64{,}593}$ буквою b, $3^{0,74324}$ буквою c и $\sqrt[1,7]{0{,}6}$ буквою d. Дѣйствія же расположимъ такъ.

$$\log a = 3{,}5 \log 0{,}594$$
$$= \frac{7}{2} \cdot \bar{1},77379$$
$$= \bar{2},\ 41653 : 2$$
$$= \bar{1},\ 208265$$
$$a = 0{,}161535$$

$$\log b = \frac{1}{10} \log 64{,}593$$
$$= \frac{1}{10} \cdot 1{,}81019$$
$$= 0{,}18102$$
$$b = 1{,}5171$$

$$\log c = 0{,}74324 \ . \log 3$$
$$= 0{,}74324 \ . \ 0{,}47712$$
$$= 0{,}354615$$

$$c=2,26266$$

$$\begin{aligned}\log d &= \frac{10}{17}\log 0,6\\ &= \frac{10}{17}\cdot \bar{1},77815\\ &= \bar{8},\ 7815 : 17\\ &=(14,7815-17) : 17\\ &= \bar{1},8695\end{aligned}$$

$$d=0,74045.$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned}z &= \sqrt[23]{\frac{0,161535-1,5171}{2,26266+0,74045}}\\ &= \sqrt[23]{\frac{-1,355565}{3,00311}}\\ &= -\sqrt[23]{\frac{1,355565}{3,00311}}\end{aligned}$$

Такъ какъ z оказывается отрицательнымъ числомъ, то $-z$ число положительное. Поэтому мы продолжаемъ тамъ:

$$\begin{aligned}\log(-z) &= \frac{1}{23}(\log 1,355565-\log 3,00311)\\ &= \frac{1}{23}(0,13212-0,477575)\\ &= \frac{1}{23}\cdot \bar{1},654545\\ &(22,654545-23) : 23\\ &= \bar{1},98498.\\ -z &= 0,96600.\end{aligned}$$

Такъ мы, наконецъ, съ точностью до 0,000005 находимъ, что

$$z = -0,966.$$

§ 349. **О модулѣ логариѳмической системы.** Изъ доказаннаго въ § 325 равенства

$$\log_b z = \frac{\log_a z}{\log_a b}$$

видно, что мы каждый логариѳмъ системы, имѣющей основаніемъ b, можемъ получить, имѣя уже вычисленною систему съ основаніемъ a. Слѣдова-

тельно, для того, чтобы вычислить таблицу логариѳмовъ по первому изъ названныхъ основаній, достаточно каждый логариѳмъ по основанію a раздѣлить на логариѳмъ числа b. Но удобнѣе, выразивъ $\frac{1}{\log_a b}$ десятичною дробью, упомянутое дѣленіе замѣнить умноженіемъ на эту дробь.

Этотъ множитель, чрезъ умноженіе на котораго **логариѳмовъ** одной системы получаются лога**риѳмы** другой, называется модулемъ этой по**слѣдней** по отношенію къ первой.

Какъ уже сказано было въ § 334, удобнѣе всего вычисляются натуральные логариѳмы. Изъ нихъ же вычисляются десятичные чрезъ умноженіе на модуль

$$M = \frac{1}{\log_e 10} = 0,4342944819\ldots$$

По причинамъ, подробно нами разъясненнымъ, въ общемъ употребленіи находятся эти послѣдніе. Если же бываетъ нуженъ натуральный логариѳмъ какого-либо числа, то его можно вычислить, конечно, раздѣливъ взятый изъ обыкновенныхъ логариѳмическихъ таблицъ десятичный логариѳмъ этого числа на M, или умноживъ на вычисленную разъ навсегда для всѣхъ такихъ случаевъ дробь равную $\frac{1}{M}$. Эта дробь

$$\frac{1}{M} = 2,302585092994 = \log_e 10 = \frac{1}{\log_{10} e} \qquad \text{[теор. 134]}$$

есть модуль натуральной системы логариѳмовъ по отношенію къ десятичной.

Для облегченія примѣненія обоихъ модулей въ логариѳмическихъ таблицахъ даются произведенія ихъ на 1, 2, 3 и т. д. Если брать при умноженіи модули множимыми, а логариѳмы данной системы множителями, то остается при разсматриваемомъ переходѣ отъ одной системы къ другой только складывать подходящимъ образомъ названныя произведенія.

ГЛАВА XXIX.

Заключительный обзоръ всѣхъ ариѳметическихъ дѣйствій.

§ 350. **Единство плана, по которому производятся дѣйствія другъ изъ друга и расширяются понятія о числѣ и о дѣйствіяхъ.** При постепенномъ возведеніи зданія общей ариѳметики мы неоднократно указывали на необходимость такого согласованія вновь вводимыхъ понятій съ преж-

ними, чтобы съ одной стороны не получалось внутреннихъ противорѣчій, т. е. противорѣчій въ самой теоріи, съ другой же стороны создавалась свободная отъ всякихъ недоразумѣній и противорѣчій примѣнимость ихъ ко всякаго рода величинамъ при выраженіи послѣднихъ чрезъ посредство чиселъ. Мы теперь видимъ, что не только могли быть вполнѣ удовлетворены эти требованія, но что вмѣстѣ съ этимъ достигается нѣчто чрезвычайно интересное. Зданіе общей ариѳметики оказалось построеннымъ по одному общему плану, стройнымъ и гармоничнымъ во всѣхъ своихъ частяхъ, которыя, въ свою очередь, оказались находящимися въ строгой логической связи между собою.

Упомянутый же общій планъ въ главныхъ чертахъ заключается въ слѣдующемъ:

Одинаковымъ образомъ произведены другъ отъ друга прямыя дѣйствія.

Однимъ и тѣмъ же способомъ произведены отъ прямыхъ дѣйствій обратныя.

Возможность безъ всякихъ ограниченій производить обратныя дѣйствія достигалась для всѣхъ этихъ дѣйствій одинаковымъ образомъ: чрезъ введеніе новыхъ чиселъ, расширявшихъ постепенно наше понятіе о числѣ.

Послѣ всякаго новаго расширенія понятія о числѣ расширялось понятіе о дѣйствіяхъ, при чемъ оказалось возможнымъ дѣлать это такъ, что теоремы, доказанныя для прежнихъ родовъ чиселъ, оставались справедливыми и для вводимыхъ вновь чиселъ *). Въ частности обнаружилась истина огромной важности, что опредѣленія обратныхъ дѣйствій могли быть сохраняемы послѣ всякаго новаго расширенія понятія о числѣ.

Наконецъ, оказались строго аналогичными другъ другу всѣ опредѣленія обратныхъ дѣйствій и непосредственныя слѣдствія изъ нихъ, на которыхъ, на тѣхъ и на другихъ, какъ мы видѣли, основываются доказательства всѣхъ теоремъ, касающихся этихъ дѣйствій.

§ 351. **Таблица всѣхъ дѣйствій.** Планъ зданія общей ариѳметики наглядно изображается приводимою нами ниже таблицею всѣхъ ариѳмети-

---

*) Этотъ **законъ распространимости теоремъ о дѣйствіяхъ на всѣ вообще числа** Германъ Ганкель назвалъ, понимая его, однако, немного иначе, чѣмъ мы, принципомъ сохраненія формальныхъ законовъ общей ариѳметики.

ческихъ дѣйствій, указывающею происхожденіе и зависимость ихъ другъ отъ друга:

ОБЗОРЪ ВСѢХЪ ДѢЙСТВІЙ.

Дѣйствія (названіе ихъ)		Дѣйствія (выраженіе ихъ въ знакахъ)	
прямыя:	обратныя:	прямыя:	обратныя:
Сложеніе	Вычитаніе	$a+b=c$	$a=c-b$ $b=c-a$
Умноженіе	Дѣленіе	$ab=c$	$a=\frac{c}{b}$ $b=\frac{c}{a}$
Возвышеніе въ степень	Извлеченіе корня Логариѳмированіе	$a^b=c$	$a=\sqrt[b]{c}$ $b=\log_a c$

Таблица, помѣщенная направо отъ вертикальной черты, выражаетъ въ знакахъ ту же зависимость дѣйствій другъ отъ друга, какъ и лѣвая, но характеризуя въ то же время, какъ въ двухъ случаяхъ получается только по одному обратному дѣйствію, а въ третьемъ два. Эта правая таблица содержитъ также въ извѣстномъ смыслѣ опредѣленія обратныхъ дѣйствій и непосредственныя слѣдствія изъ нихъ: подстановка въ каждой строкѣ въ столбецъ прямыхъ дѣйствій вмѣсто a и b выраженій изъ столбца обратныхъ дѣйствій даетъ опредѣленія обратныхъ дѣйствій (17б, 53б, 96б, 122б); подстановка въ каждой строкѣ вмѣсто c выраженій изъ лѣваго столбца въ правый даетъ слѣдствія изъ этихъ опредѣленій (17в, 53в, 96в, 122в).

Въ самой сжатой формѣ **общій планъ** возведенія зданія **общей ариѳметики** можетъ быть охарактеризованъ такъ:

Обратныя дѣйствія ведутъ къ расширенію понятія о числѣ, послѣ же всякаго введенія новаго рода чиселъ обобщаются понятія о дѣйствіяхъ.

ЧАСТЬ II.

Уравненія и рѣшеніе неравенствъ.

ГЛАВА I.

Понятіе объ уравненіи и общія начала рѣшенія уравненій.

§ 352. **Тождество и уравненіе.** Въ первой части этой книги мы пользовались равенствами, чтобы *утверждать*, что два буквенныя или численныя выраженія равны между собою. Намъ приходилось это дѣлать въ двухъ случаяхъ: 1) когда мы высказывали теоремы и 2) когда мы преобразовывали данныя выраженія. Во всѣхъ случаяхъ какъ того, такъ и другого рода, выраженія, соединявшіяся знакомъ равенства, были *безусловно* равны между собою и въ выраженіяхъ, содержавшихъ буквы, эти послѣднія могли означать какія угодно числа.

Но равенствами можно пользоваться еще и съ другою цѣлью: ими можно выражать извѣстныя *требованія*, предъявляемыя къ искомымъ числамъ по отношенію къ числамъ, даннымъ какою-либо задачею.

Такъ, напр., задачу:

> «задумано число; если къ нему прибавить 17, то получится 25; найти это число»

можно, и притомъ очень наглядно, выразить слѣдующимъ образомъ въ [illegible]:

$$x+17=25.$$

Въ этомъ равенствѣ буква x уже не можетъ означать любое число. Ею обозначается здѣсь одно совершенно опредѣленное число, которое пока только неизвѣстно и которое нужно найти.

Примѣровъ, подобныхъ данному, можно привести сколько угодно, и изъ нихъ мы знакомимся съ новымъ родомъ равенствъ, съ которыми, какъ мы увидимъ ниже, должно считать однородными по существу и такія, которыя выражаютъ какія-либо данныя или предполагаемыя условія, а также всякія утверждаемыя или извѣстныя соотношенія между геометрическими, физическими и т. п. величинами (существуетъ только одинъ родъ геометрическихъ соотношеній, выражаемыхъ равенствами перваго рода).

Равенства того и другого рода отличаютъ другъ отъ друга названіями слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленія. 1) Равенство называется **тождествомъ**, если оно **справедливо безусловно**, слѣдовательно, и при всѣхъ значеніяхъ буквъ, если таковыя вообще въ немъ встрѣчаются.  129

Примѣчаніе.

Для обозначенія тождества примѣняется иногда существующій для этого знакъ $\equiv$.

2) Равенство называется **уравненіемъ**, если оно **справедливо только условно**, то есть, если лѣвая и правая часть его не при всѣхъ произвольныхъ значеніяхъ встрѣчающихся въ немъ буквъ выражаютъ равныя числа.

Такъ, напр., слѣдующія равенства суть тождества:

$$3 \,.\, 5 = 15$$
$$3^4 = 81$$
$$\log_{0,16} 15,625 = -1,5$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$\frac{a}{b} - \frac{2c}{d} = \frac{ad-2bc}{bd}$$
$$a\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^5b};\ ^{*)}$$

*) Послѣднія равенства можно было бы писать также слѣдующимъ образомъ:

$$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$
$$\frac{a}{b} - \frac{2c}{d} \equiv \frac{ad-2bc}{bd}$$
$$a\sqrt[5]{b} \equiv \sqrt[5]{a^5b}$$

и слѣдующія равенства суть уравненія:

$$a+bc=3d$$
$$x+y=12$$
$$x^2=25;$$

уравненіемъ же выражена и приведенная выше задача.

§ 353. **Рѣшеніе уравненія и корни его.** Задачею, приведенною въ предыдущемъ параграфѣ, требовалось найти число, которое, будучи сложено съ 17, должно дать 25. По опредѣленію вычитанія это число должно быть 25—17=8. Полученное значеніе

$$x=8$$

есть единственное, при которомъ равенство

$$x+17=25$$

справедливо. Если мы въ этомъ уравненіи вмѣсто x напишемъ 8, то получимъ:

$$8+17=25,$$

то есть тождество.

Какъ въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ, такъ и вообще всякою задачею, выраженною уравненіемъ, требуется найти такія значенія буквъ, которыя превращаютъ это уравненіе въ тождество. Вычисленіе этихъ значеній носитъ особое названіе:



Опредѣленіе. Рѣшить уравненіе значитъ найти тѣ значенія встрѣчающихся въ немъ буквъ или встрѣчающейся въ немъ буквы, при которыхъ оно превращается въ тождество; эти буквы называются *неизвѣстными*, значенія же ихъ, обладающія упомянутыми свойствами (или, какъ еще говорятъ, удовлетворяющія уравненію) — *рѣшеніями* или *корнями* уравненія.

§ 354. **Отличительное обозначеніе неизвѣстныхъ.** Въ уравненіяхъ

$$x+17=25$$

и

$$x^2=25$$

неизвѣстнымъ только и можетъ быть x.

Въ уравненіи

$$a+bc=3d$$

неизвѣстнымъ можетъ быть каждая изъ буквъ, или неизвѣстными могутъ быть также двѣ изъ нихъ, или три, или, наконецъ, всѣ четыре. Если въ этомъ уравненіи неизвѣстнымъ считать a, то по опредѣленію разности должно быть

$$a=3d-bc$$

и это и будетъ рѣшеніе уравненія, потому что оно послѣ подстановки въ него выраженія $3d-bc$ вмѣсто a превратится, какъ легко убѣдиться, въ тождество.

Обыкновенно же неизвѣстныя величины обозначаютъ послѣдними буквами алфавита: x, y, z, u, v,... и т. д. Такъ,

$$x+y=12$$

безъ дальнѣйшихъ указаній понимается какъ уравненіе съ двумя неизвѣстными; въ уравненіи же

$$\frac{a}{x}-b=\frac{c}{2x}$$

по общепринятому обычаю неизвѣстною величиною полагается считать x, а a, b и c величинами извѣстными.

§ 355. **Первое подраздѣленіе уравненій.** Уравненіе называется алгебраическимъ, если въ немъ неизвѣстное или нѣсколько неизвѣстныхъ соединены между собою или съ извѣстными величинами конечнымъ числомъ знаковъ сложенія, вычитанія, умноженія или дѣленія, или, если они въ немъ встрѣчаются въ основаніяхъ степеней или въ подкоренныхъ величинахъ корней съ раціональными и вещественными показателями. Всѣ другія уравненія называются трансцендентными.

Алгебраическія уравненія подраздѣляются *по числу* встрѣчающихся въ нихъ неизвѣстныхъ и *по степени* послѣднихъ.

Если уравненіе послѣ преобразованій, о которыхъ подробно будетъ говориться ниже, пріобрѣтаетъ такой видъ или дано уже въ такомъ видѣ, что одна часть его есть 0, а другая многочленъ цѣлый относительно каждаго изъ неизвѣстныхъ [§ 67], то степень этого многочлена и есть также степень уравненія. Что при одномъ неизвѣстномъ называется степенью многочлена, опредѣлено въ § 59. При нѣсколькихъ же неизвѣстныхъ, имѣющихъ каждое одинаковое право считаться главною буквою, степень многочлена есть сумма показателей въ томъ членѣ его, въ которомъ въ произведеніи степеней неизвѣстныхъ эта сумма есть наибольшая.

Такъ, напр.,

$$5x^4-2x^3+1=0$$

есть уравненіе 4-й степени,

$$x^3-4x^2y^3z^2+3xy^6z^4-12=0$$

есть уравненіе 11-й степени,

$$2x^3-7xy^3+y^5=0$$

есть уравненіе 5-й степени.

Уравненія первой степени называются также линейными, уравненія второй степени квадратными, уравненія третьей степени кубическими, уравненія четвертой степени биквадратными *).

Если въ уравненіи кромѣ буквъ, обозначающихъ неизвѣстныя, другихъ нѣтъ, то уравненіе называется численнымъ, если же кромѣ такихъ есть также буквы, обозначающія извѣстныя (или данныя) величины, то уравненіе называется буквеннымъ.

§ 356. Возможность нѣсколькихъ рѣшеній уравненія. Приведенное выше уравненіе

$$x^2=25$$

удовлетворяется значеніями неизвѣстнаго

$$x=+5$$

и $$x=-5,$$

такъ какъ и

$$(+5)^2=25$$
$$(-5)^2=25.$$

Выраженное уравненіемъ

$$(x-5)(x-3)(x-2)=0$$

*) Нѣмецкіе, англійскіе и итальянскіе математики называютъ всякое уравненіе 4-й степени биквадратнымъ, французскіе же, а по нихъ примѣру и русскіе, обыкновенно только уравненія вида

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

требованіе, чтобы произведеніе названныхъ въ лѣвой его части трехъ сомножителей было равно 0, можетъ быть удовлетворено трояким образомъ [45º], такъ какъ каждаго изъ этихъ трехъ сомножителей можно превратить въ 0: первый дѣлается равнымъ 0 при условіи, что

$$x=5,$$

второй при условіи, что

$$x=3$$

и третій при условіи, что

$$x=2.$$

Такъ мы видимъ три возможности удовлетворить данному уравненію или три рѣшенія его.

Произведя умноженіе двучленовъ $x-5$, $x-3$ и $x-2$ другъ на друга, мы разсмотрѣнному и рѣшенному уравненію можемъ придать видъ:

$$x^3-10x^2+31x-30=0.$$

Чрезъ подстановку же легко убѣдиться, что и въ этомъ видѣ уравненіе удовлетворяется какъ значеніемъ

$$x=5,$$

такъ и значеніями

$$x=3$$

и

$$x=2,$$

въ чемъ, впрочемъ, и сомнѣнія быть не могло.

По примѣру послѣдняго уравненія легко составить такое, которое имѣло бы четыре и пять и больше рѣшеній.

§ 357. **Рѣшеніе уравненій основывается на опредѣленіяхъ обратныхъ дѣйствій.** Уравненіе, составленное въ § 352 для рѣшенія данной тамъ задачи, мы рѣшили въ § 353, пользуясь опредѣленіемъ вычитанія. Подобнымъ образомъ рѣшеніе уравненій можетъ вообще производиться путемъ примѣненія опредѣленій обратныхъ дѣйствій, какъ это видно изъ приводимыхъ здѣсь нѣсколькихъ простыхъ примѣровъ.

Рѣшеніе уравненія

$$\frac{3}{4}x=9$$

состоить въ нахожденіи числа, которое, будучи умножено на $\frac{3}{4}$, дастъ 9, другими словами, въ дѣленіи 9 на $\frac{3}{4}$.

Такъ получается

$$x=9:\frac{3}{4},$$

то есть

$$x=12.$$

Если требуется рѣшить уравненіе

$$\frac{x}{5}=8,$$

то можно также воспользоваться опредѣленіемъ частнаго: частное $\frac{x}{5}$, слѣдовательно, и 8, будучи умножено на 5, должно дать x, такъ что

$$x=5\,.\,8=40.$$

Чтобы найти тѣ значенія x, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ:

1) $x^n=a$,
2) $b^x=c$,
3) $\sqrt[p]{x}=d$,
4) $\sqrt[x]{g}=f$,
5) $\log_m x=n$,
6) $\log_x r=s$,

можно воспользоваться опредѣленіями корня и логариѳма. Такимъ способомъ получаются соотвѣтственно рѣшенія:

1) $x=\sqrt[n]{a}$,
2) $x=\log_b c$,
3) $x=a^p$,
4) $g=f^x$, и потому $x=\log_f g$,
5) $x=m^n$,
6) $x^s=r$, и потому $x=\sqrt[s]{r}$,

при чемъ важно замѣтить, что въ первомъ изъ этихъ случаевъ получается n рѣшеній, а въ послѣднемъ 9, какъ это доказывается въ § 303.

§ 358. **Рѣшеніе уравненій можетъ быть также основано на примѣненіи теоремы VII.** Приведенныя въ предыдущемъ параграфѣ уравненія можно было бы также рѣшить, пользуясь теоремою VII, примѣненіе которой во многихъ случаяхъ представляетъ болѣе удобный способъ рѣшенія.

Такъ, напр., уравненіе

$$\frac{3}{4}x-9$$

можно было бы рѣшить, раздѣливъ обѣ части его на $\frac{3}{4}$; уравненіе

$$\frac{x}{5}=8,$$

умноживъ обѣ части его на 5; уравненіе

$$x^n=a$$

чрезъ извлеченіе изъ обѣихъ частей его корня n-ой степени и т. д.

Покажемъ и на нѣсколько болѣе сложномъ примѣрѣ, какъ нужно пользоваться для рѣшенія уравненій названною теоремою VII, и при этомъ случаѣ также и то, какъ при рѣшеніи уравненій приходится примѣнять правила общей ариѳметики вообще.

Рѣшимъ для этой цѣли уравненіе

$$9x-25=\frac{x}{3}-(5-2x).$$

Сначала можно въ правой его части раскрыть скобки и сдѣлать приведеніе:

$$9x-25=\frac{x}{3}-5+2x$$

$$9x-25=2\frac{1}{3}x-5.$$

Прибавляя и къ лѣвой и къ правой части уравненія по 25, мы получаемъ:

$$9x=2\frac{1}{3}x-5+25$$

или

$$9x-2\frac{1}{3}x+20.$$

Вычтя изъ обѣихъ частей уравненія по $2\frac{1}{3}x$, мы получаемъ.

$$6\frac{2}{3}x=20.$$

Если, наконецъ, обѣ части уравненія (принято говорить просто: уравненіе) раздѣлимъ на $6\frac{2}{3}$, то получается:

$$x=20:6\frac{2}{3}$$

или

$$x=3.$$

Чрезъ подстановку легко убѣдиться, что дѣйствительно данное уравненіе удовлетворяется значеніемъ $x=3$.

Въ извѣстныхъ случаяхъ, однако, о которыхъ будетъ подробно рѣчь ниже, при примѣненіи теоремы VII къ рѣшенію уравненій необходима извѣстная осмотрительность.

§ 359. **Уравненія равносильныя или однозначащія.** Изъ послѣдняго примѣра рѣшенія уравненія, приведеннаго въ предыдущемъ параграфѣ, мы могли убѣдиться, что рѣшеніе уравненія состояло въ постепенномъ преобразованіи его при помощи указанныхъ тамъ средствъ и пріемовъ въ новыя болѣе простыя. Подставляя и въ каждое изъ нихъ значеніе 3 вмѣсто x, мы найдемъ, что и всѣ они удовлетворяются этимъ значеніемъ неизвѣстнаго. Слѣдовательно, каждое изъ нихъ, если бы было даннымъ уравненіемъ, то дало бы то же самое рѣшеніе

$$x=3.$$

Если бы мы въ уравненіи

$$x^3-10x^2+31x-30=0$$

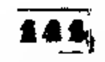
разсмотрѣнномъ въ § 356, прибавили къ обѣимъ частямъ по 30, то получили бы уравненіе

$$x^3-10x^2+31x=30,$$

которое, какъ легко убѣдиться, удовлетворяется тѣми же тремя значеніями неизвѣстнаго x, которыми удовлетворяется и уравненіе

$$(x-5)(x-3)(x-2)=0.$$

Изъ разсмотрѣнныхъ примѣровъ мы уже видимъ, что при рѣшеніи уравненій намъ придется имѣть дѣло съ уравненіями, имѣющими одни и тѣ же корни. Для полученія правильнаго рѣшенія уравненія важно, чтобы эти корни и оставались одними и тѣми же при тѣхъ преобразованіяхъ, которыя мы будемъ избирать, рѣшая уравненія.

Опредѣленіе. Уравненія называются *равносильными* или *однозначащими*, если они имѣютъ одни и тѣ же корни. 

§ 360. **Постороннія рѣшенія.** Уравненіе

$$x+3=5$$

имѣетъ единственный корень

$$x=2.$$

Но если мы это уравненіе возвысимъ въ квадратъ, то получимъ:

$$(x+3)^2=25,$$

а при обратномъ извлеченіи корня мы уже получаемъ:

$$x+3=+5 \quad \text{или} \quad x+3=-5,$$

такъ что кромѣ прежняго корня +2 получился еще корень −8, не удовлетворяющій данному уравненію и поэтому называемый *постороннимъ рѣшеніемъ.* Онъ появился вслѣдствіе повышенія степени даннаго уравненія съ первоначальной первой на вторую. Изъ разсужденій въ § 303 слѣдуетъ, что чѣмъ въ высшую степень мы возвысимъ рѣшаемое уравненіе, тѣмъ больше должно получиться постороннихъ корней.

Но повышеніе степени уравненія можетъ получиться не только вслѣдствіе возвышенія уравненія въ степень: оно можетъ, напр., произойти вслѣдствіе умноженія его на выраженіе, содержащее неизвѣстное. Покажемъ на примѣрѣ, что и въ такомъ случаѣ могутъ появиться посторонніе корни

Уравненіе

$$3x-1=2x+3$$

имѣетъ единственный корень

$$x=4.$$

Если же мы это уравненіе умножимъ на $x-3$, то получимъ равенство

$$(x-3)(3x-1)=(x-3)(2x+3),$$

при справедливости котораго должно быть справедливымъ также равенство

$$(x-3)(3x-1)-(x-3)(2x+3)=0.$$

Если же мы теперь еще вынесемъ множителя $x-3$ за скобки, то получимъ уравненіе

$$(x-3)(3x-1-2x-3)=0$$

или

$$(x-3)(x-4)=0,$$

которое удовлетворяется не только значеніемъ $x=4$, какъ и данное, но и значеніемъ $x=3$, которымъ данное уравненіе не удовлетворяется.

Само собою разумѣется, что уравненіе

$$x+3=5$$

не слѣдуетъ рѣшать, возвышая его въ какую бы то ни было степень, а уравненіе

$$3x-1=2x+3,$$

умножая его на какое бы то ни было выраженіе. Но случается, что возвышеніе уравненія въ степень или другое какое-либо преобразованіе, повышающее степень его, бываютъ удобны, или же даже и неизбѣжны. Потому возникаетъ вопросъ, какъ въ такихъ случаяхъ устранить введенныя при рѣшеніи уравненія постороннія рѣшенія. И отвѣтъ на него указывается самымъ понятіемъ о рѣшеніи уравненія:

Правило. Чтобы обнаружить, есть ли въ числѣ полученныхъ корней посторонніе, нужно чрезъ подстановку убѣдиться, которые изъ нихъ превращаютъ рѣшенное уравненіе въ тождество.

§ 361. **Потерянныя рѣшенія.** Вернемся ко второму изъ примѣровъ, разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, и положимъ, что дано и должно быть рѣшено уравненіе

$$(x-3)(3x-1)=(x-3)(2x+3),$$

которое, какъ тамъ было выяснено, допускаетъ два рѣшенія. Если бы мы, примѣняя теорему VII, начали рѣшеніе этого уравненія съ дѣленія обѣихъ частей его на $x-3$, то получили бы послѣ этого уравненіе

$$3x-1=2x+3$$

и всего только одинъ корень

$$x=4,$$

а другой бы

$$x=3$$

исчезъ.

Изъ этого примѣра и примѣровъ, приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, мы видимъ, что при извѣстныхъ преобразованіяхъ уравненій корни ихъ могутъ исчезать, но могутъ также появляться и посторонніе корни, другими словами, что уравненія, получающіяся путемъ такихъ преобразованій, могутъ оказаться неравносильными даннымъ. Посредствомъ повѣрки чрезъ подстановку всегда можно узнать, были ли при рѣшеніи уравненія введены посторонніе корни. Но такая повѣрка не можетъ обнаружить утерянныхъ рѣшеній. Поэтому не только необходимо изслѣдовать, при какихъ условіяхъ исчезаютъ корни, но нужно научиться также узнавать, какіе именно.

Параграфами, слѣдующими за этимъ, и выясняется, какія преобразованія приводятъ къ однозначащимъ уравненіямъ, и какія въ какихъ случаяхъ происходятъ измѣненія въ составѣ корней.

Преобразованія, при помощи которыхъ достигается рѣшеніе уравненія, производятся, какъ уже выяснено было [§§ 357 и 358], на основаніи опредѣленій обратныхъ дѣйствій или посредствомъ примѣненія теоремы VII. Но при этомъ оказывается возможнымъ избѣгать постоянныхъ ссылокъ на эти опредѣленія и на названную теорему, если формулировать извѣстные, постоянно повторяющіеся, пріемы въ видѣ особыхъ правилъ, которые мы ниже приводимъ.

§ 362. Главнѣйшіе пріемы, примѣняемые при преобразованіи уравненій.

Теорема. Членъ одной части уравненія переносится въ другую какъ членъ, но съ обратнымъ знакомъ. 

Предп. Буквою B обозначается все выраженіе, составляющее правую часть уравненія, въ лѣвой же части буквою C какой-либо членъ, а буквою A вся остальная часть выраженія, составляющаго ее.

Утв.

$$A \pm C = B$$

и

$$A = B \mp C$$

однозначащія уравненія.

Док. Какъ уравненіе

$$A+C=B,$$

такъ и уравненіе

$$A=B-C$$

выражаютъ, что A есть число, которое, будучи сложено съ C, даетъ B; другими словами, оба эти уравненія выражаютъ одну и ту же зависимость между величинами A, B и C.

Равнымъ образомъ и уравненія

$$A-C=B$$

и

$$A-B+C$$

выражаютъ одну и ту же зависимость между этими величинами.

Слѣдовательно, всѣ значенія неизвѣстнаго или неизвѣстныхъ, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$A \pm C=B,$$

удовлетворяютъ также уравненію

$$A=B \mp C,$$

и наоборотъ; другими словами, оба эти уравненія равносильны другъ другу. А это и требовалось доказать.


143 **Теорема.** Если въ обѣихъ частяхъ уравненія встрѣчается одинъ и тотъ же членъ (не означающій, однако, ∞) съ однимъ и тѣмъ же знакомъ передъ нимъ, то его можно опустить.

Док. Перенеся въ уравненіи

$$A\pm M=B\pm M$$

членъ $\pm M$ изъ одной части въ другую, напр., изъ правой части въ лѣвую, мы, по предыдущей теоремѣ, получаемъ

$$A\pm M\mp M=B,$$

то есть

$$A=B,$$

изъ чего и видна справедливость утвержденія.

Примѣчаніе.

Необходимость выдѣленія случая, когда M означаетъ безконечно большую величину, будетъ выяснена позднѣе (§ 368).

Теорема. Предъ всѣми членами уравненія можно перемѣнить знаки.  144

Док. Справедливость этой теоремы слѣдуетъ изъ того, что перемѣна знаковъ предъ всѣми членами равносильна перенесенію всѣхъ членовъ правой части уравненія въ лѣвую и всѣхъ членовъ лѣвой части въ правую съ послѣдующею затѣмъ замѣною частей уравненія одной другою.

Справедливость теоремы явствуетъ также изъ того, что перемѣна знаковъ предъ членами равносильна примѣненію теоремы VII, состоящему въ умноженіи или дѣленіи уравненія на —1, при чемъ должно, по 2-й изъ теоремъ, доказываемыхъ ниже, въ § 366, всегда получиться уравненіе равносильное прежнему.

Теорема. Множитель одной части уравненія переносится въ другую какъ дѣлитель, и наоборотъ, дѣлитель какъ множитель.  145

Предп. Изъ буквъ A, B и C по крайней мѣрѣ одна означаетъ неизвѣстное или выраженіе, содержащее неизвѣстное или неизвѣстныя.

Утв.

$$CA=B$$

и

$$A=\frac{B}{C}$$

одновначащія уравненія.

Док. Какъ уравненіе

$$CA=B,$$

такъ и уравненіе

$$A=\frac{B}{C}$$

выражаютъ, что A есть число, которое, будучи умножено на C, даетъ B: другими словами, оба эти уравненія выражаютъ одну и ту же зависимость между величинами A, B и C.

Слѣдовательно, всѣ значенія неизвѣстнаго или неизвѣстныхъ, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$CA=B,$$

удовлетворяютъ также уравненію

$$A=\frac{B}{C},$$

и наоборотъ; другими словами, оба эти уравненія равносильны другъ другу.

Доказавъ справедливость теоремы для случаевъ переноса множителя изъ лѣвой части уравненія въ правую и дѣлителя изъ правой части въ лѣвую, мы, на основаніи теоремы V, доказали вмѣстѣ съ тѣмъ и справедливость ея для случаевъ переноса множителя изъ правой части уравненія въ лѣвую и дѣлителя изъ лѣвой части въ правую

§ 363. **Примѣръ примѣненія доказанныхъ теоремъ.** Покажемъ примѣненіе правилъ, составляющихъ содержаніе послѣднихъ четырехъ теоремъ на рѣшеніи слѣдующаго уравненія:

$$2x-5\left(2\frac{1}{2}x-8\right)-39\frac{5}{6}=3\left(1-4\frac{1}{6}x\right)-\left(6\frac{1}{2}-9\frac{1}{3}x\right).$$

Раскрывъ скобки:

$$2x-12\frac{1}{2}x+40-39\frac{5}{6}=3-12\frac{1}{2}x-6\frac{1}{2}+9\frac{1}{3}x,$$

мы замѣчаемъ, что въ обѣихъ частяхъ уравненія имѣется членъ $-12\frac{1}{2}x$. Опустивъ (вычеркнувъ) его, перенесемъ всѣ члены, содержащіе неизвѣстное,

въ лѣвую часть, а остальные въ правую:

$$2x-9\frac{1}{3}x=3-6\frac{1}{2}-40+39\frac{5}{6}.$$

Выполнивъ указанныя дѣйствія:

$$-7\frac{1}{3}x=-3\frac{2}{3},$$

перемѣнимъ въ обѣихъ частяхъ уравненія знаки:

$$7\frac{1}{3}x=3\frac{2}{3}.$$

Перенеся множителя $7\frac{1}{3}$ въ другую часть, мы получаемъ:

$$x=\frac{3\frac{2}{3}}{7\frac{1}{3}},$$

то есть

$$x=\frac{1}{2}.$$

§ 364. Примѣненіе послѣднихъ теоремъ къ тождествамъ. Изъ всѣхъ разсужденій этой главы мы должны были убѣдиться, что если мы станемъ преобразовывать какое-либо тождество при помощи послѣднихъ теоремъ [**142—145**], то должны получаться новыя тождества, и что поэтому названныя теоремы примѣнимы и къ преобразованію тождествъ.

Такъ, напр., изъ тождества

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

мы, перенося членъ $2ab$ въ другую часть и дѣля полученное равенство на a^2b^2, находимъ слѣдующія новыя тождества:

$$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$$
$$\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2-\frac{2}{ab}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Подобнымъ образомъ мы путемъ примѣненія послѣднихъ теоремъ изъ всякаго тождества можемъ найти безчисленное множество новыхъ тождествъ.

Между прочимъ, иногда бываетъ удобно пользоваться такими преобразованіями, когда требуется доказать, что два математическія выраженія тождественно равны.

§ 365. **Разница между двумя способами преобразованій уравненій.** Правила, подобныя приведеннымъ въ § 362, могли бы быть составлены и для дѣйствій третьяго разряда (возвышенія въ степень, извлеченія корня и логариемированія). Но обыкновенно соотвѣтствующія преобразованія уравненій производятъ способомъ примѣненія теоремы VII, и бываетъ иногда необходимо примѣненіе ея и къ дѣйствіямъ первыхъ двухъ разрядовъ. Относительно преобразованій при помощи этой теоремы мы изъ хода доказательствъ теоремъ **142** и **145** должны вывести общее заключеніе, что поскольку примѣненіе теоремы VII приводитъ къ тѣмъ же результатамъ, какъ и примѣненіе опредѣленій обратныхъ дѣйствій, получающіяся уравненія должны быть равносильны первоначальнымъ. Въ остальныхъ же случаяхъ, какъ это уже было пояснено примѣрами въ §§ 356, 360 и 361, могутъ получаться уравненія и неоднозначащія съ первоначальными При какихъ именно условіяхъ будутъ происходить измѣненія въ составѣ корней уравненій и какія именно, это мы теперь и изслѣдуемъ подробнѣе.

§ 366. **Случаи полученія равносильныхъ уравненій при примѣненіи теоремы VII.**

Теорема 1. Какъ при сложеніи съ обѣими частями уравненія, такъ и при вычитаніи изъ нихъ одной и той же величины получается уравненіе однозначащее съ первымъ, если только эта величина не есть такое выраженіе, которое означаетъ $+\infty$ или $-\infty$ или можетъ стать равнымъ $+\infty$ или $-\infty$.

Предп. Краткости ради буквою A обозначается все выраженіе, составляющее лѣвую часть уравненія, буквою B—все выраженіе, составляющее правую его часть, и буквою C—нѣкоторое число или же такое выраженіе, которое не равно и не можетъ стать равнымъ ни $+\infty$, ни $-\infty$.

Утв. Каждое рѣшеніе уравненія

$$A \pm C = B \pm C$$

есть также рѣшеніе уравненія

$$A = B$$

и наоборотъ.

Док. Подставляя въ уравненіе

$$A \pm C = B \pm C$$

его корни, мы при всякой такой подстановкѣ получимъ тождество. Прибавляя къ частямъ каждаго такого тождества по $\mp C$, мы, по теоремѣ VII, каждый разъ получимъ тождество вида

$$A=B,$$

то есть какъ тождество то же равенство, которое бы получилось, если бы въ уравненіе

$$A=B$$

вмѣсто неизвѣстныхъ были подставлены корни уравненія

$$A \pm C=B \pm C.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если мы любое рѣшеніе послѣдняго уравненія подставимъ въ уравненіе

$$A=B,$$

то оно превратится въ тождество, то есть будетъ удовлетворено.

А это-то именно и требовалось доказать первою частью утвержденія.

Равнымъ образомъ, подставляя въ уравненіе

$$A=B$$

его корни, мы и при всякой такой подстановкѣ получаемъ тождество. Прибавляя къ частямъ каждаго такого тождества по $\pm C$, мы, по той же теоремѣ, каждый разъ получимъ тождество вида

$$A \pm C=B \pm C,$$

то есть какъ тождество то же равенство, которое бы образовалось оттого, что въ уравненіе

$$A \pm C=B \pm C$$

были подставлены корни уравненія

$$A=B.$$

Значитъ, если мы любое рѣшеніе этого послѣдняго уравненія подставимъ въ уравненіе

$$A \pm C=B \pm C,$$

то и оно превратится въ тождество, то есть будетъ удовлетворено.

А это-то именно доказать и требовалось второю частью утвержденія.

Необходимость же выдѣленія случая, когда $C=\pm\infty$, объясняется свойствами безконечности, на которыя было указано въ § 118, и будетъ еще пояснена ниже.

Примѣчаніе. Чтобы удовлетворить условію, упоминаемому въ предположеніи, выраженіе C не должно содержать неизвѣстныхъ. Но такъ какъ корни, превращающіе въ ∞ выраженія, прибавляемыя къ частямъ уравненія или вычитаемыя изъ нихъ, въ большинствѣ случаевъ не даютъ прямого отвѣта на вопросы, предлагаемые задачами, которыя рѣшаются посредствомъ уравненій, и такъ какъ прибавленіе и вычитаніе выраженій обыкновенно производится съ цѣлью упрощенія уравненій и при этомъ рѣшенія указаннаго свойства всегда только уничтожаются, то обыкновенно считаютъ равносильность сохраненною и въ случаяхъ, когда C содержитъ неизвѣстныя.

Теорема 2. Какъ при умноженіи, такъ и при дѣленіи обѣихъ частей уравненія на одну и ту же величину получается уравненіе однозначащее съ первымъ, если только эта величина не равна и не можетъ стать равною ни нулю ни безконечности.

Предп. $A=B$ уравненіе такого же рода, какъ въ предыдущемъ доказательствѣ.

C, а также и D—нѣкоторое число, но не 0, или же такое выраженіе, которое не можетъ стать равнымъ ни нулю, ни безконечности, слѣдовательно, во всякомъ случаѣ выраженіе, не содержащее неизвѣстныхъ.

Утв. I. Каждое рѣшеніе уравненія

$$AC=BC$$

есть также рѣшеніе уравненія

$$A=B,$$

и наоборотъ.

Док. Подставляя въ уравненіе

$$AC=BC$$

его корни, мы при всякой такой подстановкѣ получимъ тождество. Дѣля части каждаго такого тождества на C, мы, по теоремѣ VII, каждый разъ получимъ тождество вида

$$A=B,$$

то есть какъ тождество то же равенство, которое бы получилось оттого, что въ уравненіе

$$A=B$$

вмѣсто неизвѣстныхъ были подставлены корни уравненія

$$AC=BC.$$

Значитъ, если мы любое рѣшеніе послѣдняго уравненія подставимъ въ уравненіе

$$A=B,$$

то оно превратится въ тождество, то есть будетъ удовлетворено.

А это-то именно и требовалось доказать первою частью утвержденія.

Равнымъ образомъ, подставляя въ уравненіе

$$A=B$$

его корни, мы и при всякой такой подстановкѣ получаемъ тождество. Умножая части каждаго такого тождества на C, мы, по той же теоремѣ, каждый разъ получимъ тождество вида

$$AC=BC,$$

то есть какъ тождество то же равенство, которое бы получилось, если бы въ уравненіе

$$AC=BC$$

были подставлены корни уравненія

$$A=B.$$

Значитъ, если мы любое рѣшеніе этого послѣдняго уравненія подставимъ въ уравненіе

$$AC=BC,$$

то и оно превратится въ тождество, то есть будетъ удовлетворено.

А это-то именно и требовалось доказать второю частью утвержденія.

Утв. II. У уравненія

$$\frac{A}{D}=\frac{B}{D}$$

тѣ же корни, что и у уравненія

$$A=B,$$

и наоборотъ.

Док. Такъ какъ

$$\frac{A}{D}=A\cdot\frac{1}{D}$$

и

$$\frac{B}{D}=B\cdot\frac{1}{D},$$

то достаточно $\frac{1}{D}$ обозначить буквою C, чтобы увидѣть, что вмѣстѣ съ утвержденіемъ I доказано и II.

Оговорки же въ теоремѣ относительно нуля и безконечности необходимы по слѣдующей причинѣ.

При умноженія частей уравненія на 0 и при дѣленіи ихъ на ∞ обѣ онѣ превращаются въ 0, при умноженіи же ихъ на ∞ и при дѣленіи на 0 [§ 117] обѣ онѣ превращаются въ ∞, слѣдовательно, во всѣхъ этихъ случаяхъ уравненіе превращается въ равенство, остающееся справедливымъ при всѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, другими словами, въ тождество, которое, конечно, не равносильно уравненію.

Какія послѣдствія получаются отъ умноженія и дѣленія уравненія на выраженія, содержащія неизвѣстныя, это нами показано было на примѣрахъ въ §§ 360 и 361 и будетъ разсматриваться ниже еще подробнѣе.

§ 367. **Безконечно большія значенія частей уравненія.** Требованіе рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+3$$

должно на первый взглядъ казаться невыполнимымъ, такъ какъ вѣдь нѣтъ числа, которое бы равнялось суммѣ самого себя и числа 3.

Но выполнивъ въ правой части этого уравненія сложеніе и получивъ:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{3x-2}{x-1},$$

будемъ разсуждать такъ:

При равныхъ знаменателяхъ дроби могутъ быть равными только въ томъ случаѣ, если и числители ихъ равны. Слѣдовательно, послѣднее

уравненіе можетъ быть удовлетворено только, если

$$1=3x-2,$$

то есть, если, въ чемъ легко убѣдиться,

$$x=1.$$

Спрашивается, нѣтъ ли какого-либо смысла въ полученномъ нами рѣшеніи даннаго уравненія.

Подставивъ въ него значеніе 1 вмѣсто x, мы получаемъ, если воспользуемся понятіемъ о безконечности [§ 117],

$$\infty=\infty+3.$$

Смыслъ полученнаго рѣшенія и этого равенства можно было бы перевести на обыденный языкъ такъ: $x=1$ можно считать рѣшеніемъ уравненія потому, что когда обѣ части уравненія станутъ безконечно большими, тогда можно будетъ ихъ считать равными другъ другу, хотя бы одна изъ нихъ и была на 3 больше другой, такъ какъ онѣ въ такомъ случаѣ все равно обѣ будутъ безконечно велики.

Но такого рода поясненіе смысла приведеннаго выше равенства не даетъ еще права считать такое равенство допустимымъ въ математикѣ. О безконечности слѣдуетъ вообще сказать, что ей предписывать произвольно или приписывать на основаніи обыденныхъ представленій какія бы то ни было свойства нельзя, а что должно ихъ изучать, и притомъ только тѣ изъ свойствъ признавать присущими ей, которыя не создаютъ противорѣчій ни въ системѣ алгебры, ни при примѣненіи этого понятія въ другихъ отрасляхъ математики (ср. § 118).

Потому и данный случай мы должны подробнѣе изслѣдовать.

Если бы мы допустили, что уравненіе

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+3$$

значеніемъ $x=1$ не удовлетворяется, то мы должны были бы послѣдовательнымъ образомъ также признать за истину ту несообразность, что выраженіе $\frac{1}{x-1}+3$ не можетъ быть преобразовано въ тождественно равное ему $\frac{3x-2}{x-1}$ и что обратныя величины двухъ равныхъ чиселъ могутъ

быть другъ другу и неравными. И въ самомъ дѣлѣ, разсматриваемое уравненіе послѣ такого преобразованія принимаетъ видъ:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{3x-2}{x-1},$$

это уравненіе нельзя не признать удовлетворяемымъ въ томъ же случаѣ, когда удовлетворяется уравненіе

$$\frac{x-1}{1} = \frac{x-1}{3x-2},$$

а послѣднее удовлетворяется названнымъ значеніемъ неизвѣстнаго, превращаясь при подстановкѣ въ него вмѣсто x значенія 1 въ тождество:

$$\frac{0}{1} = \frac{0}{1}.$$

Въ виду важности и трудности вопроса разсмотримъ возможность и смыслъ рѣшенія уравненія

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 3$$

еще съ другой точки зрѣнія.

Частное можетъ быть равнымъ 1 только въ томъ случаѣ, если дѣлимое и дѣлитель его равны другъ другу. Потому требованіе рѣшить разсматриваемое уравненіе равносильно требованію найти такое значеніе x, при которомъ частное $\dfrac{\frac{1}{x-1}+3}{\frac{1}{x-1}}$ дѣлается равнымъ 1. Чтобы облегчить вычисленіе тѣхъ значеній его, которыя оно принимаетъ при подстановкѣ въ него всевозможныхъ значеній вмѣсто x, его можно преобразовать въ тождественно равное ему выраженіе $3x-2$. Въ послѣднее ли мы станемъ подставлять вмѣсто x различныя числа или въ названное частное, мы получаемъ, какъ и должно быть, всегда одинаковыя значенія и видимъ, что это частное увеличивается при увеличеніи x и уменьшается при уменьшеніи x. При x же равномъ 1 выраженіе $3x-2$ превращается въ 1, и такъ получается и этимъ путемъ прежнее рѣшеніе уравненія. Однако, частное въ этомъ случаѣ превращается въ символъ $\frac{\infty+3}{\infty}$, которымъ указывается такое истолкованіе полученнаго рѣшенія:

При не измѣняющейся разности между числителемъ и знаменателемъ дроби послѣдняя, какъ извѣстно, тѣмъ меньше отличается отъ 1, чѣмъ больше дѣлаются числитель и знаменатель, при чемъ разность между 1 и ею можно сдѣлать меньше всякаго числа, какъ бы мало оно ни было по абсолютной величинѣ своей. Въ разсматриваемомъ же нами частномъ дѣлимое и дѣлитель будутъ дѣлаться все больше и больше по мѣрѣ того, какъ значеніе x все болѣе и болѣе будетъ приближаться къ 1; и они могутъ такимъ образомъ увеличиваться безгранично, приближая этимъ значеніе частнаго такъ къ 1, что разность между нимъ и 1 можетъ также стать меньше всякаго произвольно малаго по абсолютной величинѣ числа.

Такъ оба освѣщенія вопроса говорятъ въ пользу того, чтобы

$$x=1$$

считать корнемъ уравненія

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+3.$$

Совершенно такъ же можно показать въ общемъ видѣ, что

$$x=\frac{c}{b}$$

правильно считать корнемъ уравненія

$$\frac{a}{bx-c}=\frac{a}{bx-c}+d,$$

а, слѣдовательно, и уравненія

$$\frac{a}{bx-c}+p=\frac{a}{bx-c}+q,$$

которое по перенесеніи p въ правую часть принимаетъ видъ предыдущаго.

Впослѣдствіи будутъ приводиться еще примѣры, подтверждающіе результатъ нашихъ разсужденій, состоящій въ томъ, что мы можемъ избѣжать противорѣчій только въ томъ случаѣ, если будемъ считать уравненіе удовлетвореннымъ и такими значеніями неизвѣстныхъ, которыя превращаютъ обѣ части его въ безконечно большія величины, его же притомъ въ равенство одного изъ видовъ, приведенныхъ въ § 118 (см., между прочимъ, §§ 383 и 388).

§ 368. **Введеніе постороннихъ рѣшеній и уничтоженіе корней чрезъ сложеніе и вычитаніе.** Допустивъ, что уравненіе можетъ считаться удовлетвореннымъ также такими значеніями неизвѣстнаго, которыя части его дѣлаютъ безконечно большими, мы должны признать также, что вслѣдствіе появленія въ частяхъ его такихъ выраженій, содержащихъ неизвѣстныя, которыя могутъ сдѣлаться безконечно большими, вводятся постороннія рѣшенія, и что при исчезновеніи такихъ выраженій должны теряться корни.

Если мы къ обѣимъ частямъ уравненія

$$\frac{1}{x-1}=1,$$

которое удовлетворяется только значеніемъ неизвѣстнаго

$$x=2,$$

прибавимъ по $\frac{1}{x-3}$, то получимъ уравненіе

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-3}+1,$$

которое также имѣетъ корень 2, но должно считаться, на основаніи послѣднихъ разсужденій, удовлетвореннымъ, кромѣ того, значеніемъ неизвѣстнаго

$$x=3,$$

превращающимъ его части въ выраженія $\infty+\frac{1}{2}$ и $\infty+1$, то есть обѣ части въ безконечно большія величины.

Такъ мы видимъ, что, прибавивъ къ обѣимъ частямъ даннаго уравненія выраженіе $\frac{1}{x-3}$, которое при $x=3$ превращается въ безконечно большую величину, и именно вслѣдствіе этого, мы въ это уравненіе ввели постороннее рѣшеніе

Уравненіе

$$bx+c=0$$

удовлетворяется только значеніемъ неизвѣстнаго

$$x=-\frac{c}{b}.$$

Но если мы къ обѣимъ частямъ этого уравненія прибавимъ по x^2, то оно приметъ видъ

$$x^2+bx+c=x^2,$$

пріобрѣтая вслѣдствіе этого, какъ это подробно разъясняется въ § 509, постороннее рѣшеніе

$$x=\infty.$$

А если бы послѣднее уравненіе было данное и мы отъ обѣихъ частей его отняли по x^2, то мы чрезъ это уничтожили бы корень

$$x=\infty.$$

Эти примѣры дѣлаютъ понятною оговорку относительно безконечности въ 1-й изъ теоремъ, доказанныхъ въ § 366.

Изъ нихъ мы видимъ также, что мы напередъ даже можемъ сказать, какія посторонния рѣшенія мы вводимъ въ уравненіе, если мы къ частямъ его прибавляемъ выраженіе, могущее превратиться въ ∞, но это только въ тѣхъ случаяхъ, когда при сложеніи ихъ съ нимъ не происходитъ въ получающихся суммахъ превращенія сложныхъ выраженій въ болѣе простыя

Такъ, напр., если мы прибавимъ по выраженію $\frac{1}{3-x}$, дѣлающемуся при $x=3$ безконечно большимъ, къ обѣимъ частямъ нѣсколько преобразованнаго встрѣчающагося выше уравненія

$$\frac{2x-4}{(x-3)(x-1)}=\frac{x-2}{x-3},$$

которое имѣетъ корни 2 и 3, и если мы выполнимъ указанныя дѣйствія, то это уравненіе превращается въ слѣдующія:

$$\frac{2x-4}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{3-x}=\frac{x-2}{x-3}+\frac{1}{3-x}$$

$$\frac{2x-4-x+1}{(x-3)(x-1)}=\frac{x-3}{x-3}$$

$$\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=1,$$

то есть, въ концѣ концовъ, въ уравненіе

$$\frac{1}{x-1}=1$$

Послѣднее же удовлетворяется только значеніемъ $x=2$, такъ что путемъ прибавленія къ частямъ уравненія

$$\frac{2x-4}{(x-3)(x-1)}=\frac{x-2}{x-3}$$

выраженія $\frac{1}{3-x}$, могущаго сдѣлаться безконечно большимъ, мы въ этомъ уравненіи уничтожили корень 3.

Въ виду этого мы должны результатъ нашего изслѣдованія, являющагося слѣдствіемъ изъ теоремы 1 въ **§ 366**, формулировать такъ.

Слѣдствіе. Если мы къ обѣимъ частямъ уравненія

$$A=B$$

прибавимъ, или изъ нихъ вычтемъ, по выраженію C, то чрезъ это могутъ быть или введены какъ посторонния рѣшенія или изъ числа корней потеряны только такіе, которые удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{1}{C}=0 \quad (\text{или } C=\infty).$$

(См. примѣчаніе къ теор. 1 въ § 366).

§ 369. Введеніе постороннихъ рѣшеній и уничтоженіе корней чрезъ умноженіе и дѣленіе. При умноженіи уравненія

$$3x-6=x^2-2x,$$

имѣющаго корни 3 и 2, на выраженіе $\frac{x-1}{x-2}$, превращающееся въ 0 при $x=1$ и въ ∞ при $x=2$, мы получаемъ слѣдующее:

$$(3x-6)\cdot\frac{x-1}{x-2}=(x^2-2x)\cdot\frac{x-1}{x-2}.$$

Части этого уравненія могутъ быть упрощены, вслѣдствіе чего оно видоизмѣняется такимъ образомъ:

$$\frac{3(x-2)(x-1)}{x-2}=\frac{x(x-2)(x-1)}{x-2}$$
$$3(x-1)=x(x-1)$$
$$3x-3=x^2-x.$$

Послѣднее же уравненіе имѣетъ уже не тѣ же корни, какъ первоначальное, а другіе, а именно, корни 3 и 1

Такъ оказывается, что умноженіе уравненія на выраженіе $\frac{x-1}{x-2}$ имѣло послѣдствіемъ уничтоженіе корня 2 и введеніе посторонняго рѣшенія 1.

Этимъ примѣромъ съ достаточною очевидностью поясняется, какъ должно гласить слѣдствіе изъ теоремы 2 въ § 366, аналогичное тому, которымъ мы заключили предыдущій параграфъ:

Слѣдствіе. Если мы обѣ части уравненія

$$A=B$$

умножимъ или раздѣлимъ на выраженіе C, то чрезъ это могутъ быть или введены какъ постороннія рѣшенія или изъ числа корней потеряны только такіе, которые удовлетворяютъ уравненіямъ

$$C=0$$

и

$$\frac{1}{C}=0.$$

§ 370. **Случай, когда точно напередъ извѣстно, какія вводятся постороннія рѣшенія.** Въ тѣхъ случаяхъ, когда части уравненія суть выраженія цѣлыя относительно неизвѣстныхъ, встрѣчающихся въ томъ выраженіи, на которое уравненіе умножается или дѣлится, и когда послѣ дѣленія части удерживаютъ этотъ характеръ, послѣднее предложеніе пріобрѣтаетъ

такую опредѣленность, вслѣдствіе которой оно дѣлается непосредственно примѣнимымъ при рѣшеніи уравненій. Въ виду важности этихъ случаевъ мы ихъ разсмотримъ еще особо въ этомъ и слѣдующемъ параграфахъ

Теорема. Если нѣкоторое выраженіе есть цѣлое относительно встрѣчающихся въ немъ неизвѣстныхъ и мы на него умножимъ уравненіе, котораго части суть цѣлыя относительно тѣхъ же неизвѣстныхъ, то чрезъ это мы вводимъ какъ посторонія рѣшенія корни того уравненія, которое получимъ, если это выраженіе приравняемъ къ 0. **146**

Предп. A и B выраженія цѣлыя относительно неизвѣстныхъ, встрѣчающихся въ выраженіи C.

Утв. Уравненіе

$$AC=BC$$

имѣетъ корнями всѣ рѣшенія уравненія

$$A=B$$

и всѣ рѣшенія уравненія

$$C=0,$$

другихъ же рѣшеній кромѣ этихъ не допускаетъ.

Док. По теоремѣ **142** уравненія

$$AC=BC$$

и

$$AC-BC=0$$

равносильны другъ другу. Равносильно имъ и уравненіе

$$C(A-B)=0,$$

такъ какъ въ немъ лѣвая часть есть выраженіе тождественно равное $AC-BC$. Послѣднее же уравненіе, по теоремѣ **45ª**, можетъ быть удовлетворено только, если или

$$C=0$$

или

$$A-B=0.$$

слѣдовательно,

$$A=B,$$

другими словами, оно имѣетъ рѣшеніями корни уравненія

$$A=B$$

и корни уравненія

$$C=0$$

и кромѣ нихъ никакихъ другихъ, ибо какъ только значенія неизвѣстныхъ не превращаютъ въ 0 выраженія C или выраженія $A-B$, то и произведеніе $C(A-B)$ не можетъ стать равнымъ 0.

Примѣры.

1) Умножая уравненіе

$$x^2+6=5x,$$

имѣющее корни 2 и 3, на $2x-5$, мы получаемъ уравненіе

$$(2x-5)(x^2+6)=5x(2x-5),$$

имѣющее кромѣ прежнихъ корней еще рѣшеніе

$$x=2\frac{1}{2},$$

которое есть корень уравненія

$$2x-5=0.$$

2) Умноживъ уравненіе

$$15=3x,$$

имѣющее корень 5, на $x(x-2)$, мы получаемъ:

$$15x(x-2)=3x^2(x-2),$$

введя чрезъ названное преобразованіе въ качествѣ постороннихъ рѣшеній корни уравненія

$$x(x-2)=0,$$

то есть

$$x=0$$

и

$$x=2.$$

3) При умноженіи же на то же самое выраженіе уравненія

$$\frac{15}{x}=3,$$

однозначащаго съ уравненіемъ, даннымъ въ предыдущемъ примѣрѣ, постороннее рѣшеніе

$$x=0$$

по причинѣ, указанной при доказательствѣ теоремы **145**, не вводится (ср. § 365).

Примѣчаніе 1. Вводимыя постороннія рѣшенія могутъ оказаться и имѣющимися уже въ данномъ уравненіи. Понятіе о равныхъ корняхъ уравненія будетъ разсматриваться позднѣе еще подробнѣе.

Примѣчаніе 2. Примѣры примѣненія доказанной въ этомъ параграфѣ **теоремы къ уравненіямъ съ нѣсколькими неизвѣстными могутъ быть даны лишь впослѣдствіи.**

§ 371. Случай, когда точно напередъ извѣстно, какіе теряются корни.

Теорема. Если нѣкоторое выраженіе есть цѣлое относительно встрѣчающихся въ немъ неизвѣстныхъ и мы, раздѣливъ на него уравненіе, получаемъ новое, котораго части суть также цѣлыя относительно тѣхъ же неизвѣстныхъ, то чрезъ это дѣленіе мы теряемъ тѣ изъ рѣшеній перваго уравненія, которыя суть корни уравненія, получающагося оттого, что мы это выраженіе приравняемъ къ 0. **147**

Предп. C, $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ (слѣдовательно, также A и B) **суть выраженія цѣлыя относительно неизвѣстныхъ, встрѣчающихся въ выраженіи** C.

Утв. **Корни уравненія**

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$$

суть тѣ изъ корней уравненія

$$A=B,$$

которыя не удовлетворяютъ **уравненію**

$$C=0.$$

Док. Умножая уравненіе

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{C},$$

обѣ части котораго суть выраженія цѣлыя относительно неизвѣстныхъ, встрѣчающихся въ выраженіи C, на это выраженіе, мы возстановляемъ уравненіе

$$A=B,$$

вводя въ то же время въ качествѣ *постороннихъ* рѣшеній корни уравненія

$$C=0.$$

Слѣдовательно, только послѣ этого умноженія эти корни появляются, до того же, то есть въ уравненіи

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$$

они отсутствуютъ, что и требовалось доказать.

Примѣры.

1) Если мы уравненіе

$$(x-3)(x-4)=x-3,$$

имѣющее корни 3 и 5, раздѣлимъ на $x-3$, то получимъ уравненіе

$$x-4=1,$$

допускающее только одно рѣшеніе

$$x=5.$$

2) Если мы уравненіе

$$2x-7=3x-11,$$

имѣющее корень 4, преобразуемъ, отнимая отъ обѣихъ частей его по 1, въ *однозначащее* съ нимъ

$$2x-8=3x-12,$$

которому можно придать видъ:

$$2(x-4)=3(x-4),$$

то при дѣленіи послѣдняго на $x-4$, мы корень его потерлемъ, но въ то же время получаемъ нелѣпость

$$2=3.$$

Но изъ полученія таковой мы не должны заключать, что данное уравненіе не можетъ быть рѣшено. Она только указываетъ на то, что изъ равенства двухъ произведеній $a\,.\,0$ и $b\,.\,0$, равныхъ 0, нельзя заключать, что и сомножители a и b равны другъ другу, такъ какъ произведеніе всякаго числа (конечнаго) на 0 равняется 0.

Уравненіе

$$2x-7=3x-11$$

и полученныя изъ него два слѣдующихъ суть равенства, справедливыя только при условіи, что

$$x=4.$$

Раздѣливъ уравненіе

$$2(x-4)=3(x-4)$$

на $x-4$, мы, слѣдовательно, изъ равенства

$$2\,.\,0=3\,.\,0$$

заключили, что и множители 2 и 3 равны, чего по указанной выше причинѣ дѣлать нельзя.

Изъ приведеннаго примѣра мы видимъ, что есть случаи, когда по теоремѣ VII нельзя дѣлать заключеній. Обзоръ такихъ случаевъ и дается послѣ слѣдующаго параграфа.

§ 372. **Упрощеніе хода рѣшенія чрезъ дѣленіе уравненія.** Если окажется возможнымъ раздѣлить всѣ члены уравненія на одно и то же число или вообще обѣ части уравненія на одно и то же выраженіе, то отъ этого всегда упрощается дальнѣйшій ходъ рѣшенія. Если выраженіе притомъ содержитъ неизвѣстное, то изъ него въ случаѣ примѣнимости послѣдней теоремы опредѣляется часть корней уравненія.

Если, напр., требуется рѣшить уравненіе

$$45x^2(x^2-9)-165x(x^2-9)=60x^3-540x,$$

то, для упрощенія хода рѣшенія, его первымъ долгомъ нужно раздѣлить на 15. Затѣмъ его можно еще раздѣлить на x, но, поступая такъ, нужно

запомнить, что вслѣдствіе этого потерялся корень 0. Вынеся въ получающемся послѣ этихъ дѣленій уравненіи

$$3x(x^2-9)-11(x^2-9)=4x^2-36$$

въ правой части множителя 4 за скобки, мы получаемъ уравненіе

$$3x(x^2-9)-11(x^2-9)=4(x^2-9),$$

котораго части обѣ дѣлятся на x^2-9. Это дѣленіе и можно произвести. Но должно помнить, что при этомъ уничтожаются тѣ рѣшенія даннаго уравненія, которыя суть корни уравненія

$$x^2-9=0$$

или

$$x^2=9,$$

то есть

$$x=+3$$

и

$$x=-3.$$

Послѣ указаннаго выше дѣленія мы получаемъ уравненіе

$$3x-11=4,$$

которое рѣшаемъ такъ:

$$3x=15$$
$$x=5.$$

Такъ мы узнаемъ, что данное уравненіе имѣетъ 4 рѣшенія, а именно

первое рѣшеніе: $x=0$,
второе рѣшеніе: $x=+3$,
третье рѣшеніе: $x=-3$,
четвертое рѣшеніе: $x=+5$.

При этомъ замѣтимъ, что въ случаѣ нѣсколькихъ рѣшеній отвѣтъ принято писать такъ:

$$x_1=0$$
$$x_2=+3$$
$$x_3=-3$$
$$x_4=+5.$$

§ 373 **Случаи неприменимости теоремы VII.** Выше нами разъяснено было, что нельзя считать неправильнымъ равенство

$$\infty + a = \infty + b,$$

гдѣ a и b могутъ означать произвольныя числа, и не равныя между собою. Но по этой послѣдней причинѣ изъ приведеннаго равенства нельзя заключать, что a и b равны между собою

Равнымъ образомъ нельзя того же заключенія дѣлать изъ равенства

$$a - \infty = b - \infty$$

которое также должно считать допустимымъ какъ справедливое

Слѣдовательно, и при рѣшеніи уравненій нельзя въ частяхъ ихъ, примѣняя теорему VII, уничтожать чрезъ сложеніе и вычитаніе члены, означающіе безконечность Но и вводить при помощи тѣхъ же дѣйствій такіе члены въ уравненіе нельзя, такъ какъ оно въ такомъ случаѣ превратилось бы изъ уравненія, допускающаго примѣненіе названной теоремы, въ такое, къ которому эта теорема для рѣшенія его примѣняема быть не можетъ.

Изложенное здѣсь мы можемъ резюмировать такимъ образомъ:

А. Правило. Нельзя ни къ частямъ уравненія прибавлять ни изъ нихъ вычитать выраженій, означающихъ безконечность, даже тождественныхъ.

Такъ какъ произведеніе всякаго числа на 0 равно 0, символы $\frac{n}{0}$ и $\infty \cdot n$ при всякомъ конечномъ значеніи n неравномъ 0 означаютъ ∞, а символъ $\frac{n}{\infty}$ при всякомъ конечномъ значеніи n означаетъ 0, то изъ равенствъ

$$0 \cdot a = 0 \cdot b$$
$$\frac{a}{0} = \frac{b}{0}$$
$$\infty \cdot a = \infty \cdot b$$
$$\frac{a}{\infty} = \frac{b}{\infty}$$

нельзя заключать, что a и b равны.

Потому, на основаніи разсужденій, совершенно аналогичныхъ тѣмъ, которыя насъ привели къ правилу A, мы приходимъ къ такому заключенію:

Б. Правило. Нельзя уравненія ни умножать, ни дѣлить на выраженія, означающія 0 или ∞.

Такъ какъ нулевая степень всякаго конечнаго числа равна 1, а 0^0 означаетъ неопредѣленность, то изъ равенства

$$a^0 = b^0$$

нельзя заключать, что a и b равны.

Если у степени показатель $+\infty$, то при всякомъ основаніи большемъ 1 она означаетъ безконечно большую величину, а при всякомъ основаніи меньшемъ 1 значеніе ея 0; если же показатель степени $-\infty$, то при всякомъ основаніи перваго рода она означаетъ 0, а при всякомъ основаніи второго рода безконечно большую величину. Потому и изъ равенствъ

$$a^{+\infty} = b^{+\infty}$$

и

$$a^{-\infty} = b^{-\infty}$$

не слѣдуетъ, что a и b равны другъ другу.

Слѣдовательно, нельзя также изъ равенства корней съ показателями 0 и $\pm\infty$ заключать, что равны подкоренныя величины.

Изъ всего этого такимъ же образомъ, какъ выше, слѣдуетъ:

В. Правило. Нельзя уравненія ни возвышать въ степень 0 или $\pm\infty$, ни изъ него извлекать корня степени 0 или $\pm\infty$.

Подобныя же ограниченія относительно примѣнимости теоремы VII существуютъ и по отношенію къ возвышенію въ степень выраженій, означающихъ 1, 0 и ∞, вмѣстѣ же съ тѣмъ и по отношенію къ извлеченію корней изъ такихъ выраженій.

Наконецъ, нетрудно установить, какія должны существовать ограниченія относительно примѣнимости этой теоремы при логариѳмированіи.

Примѣры.

1) Если мы уравненію

$$3x - 3 = x + 5,$$

имѣющему корень 4, придадимъ видъ

$$3x - 12 + 9 = x - 4 + 9$$

и раздѣлимъ его на $x-4$, то получимъ:

$$\frac{3x-12}{x-4}+\frac{9}{x-4}=\frac{x-4}{x-4}+\frac{9}{x-4},$$

а отсюда

$$3+\frac{9}{x-4}=1+\frac{9}{x-4}.$$

Въ § 367 мы признали нужнымъ считать, что и въ послѣднемъ видѣ уравненіе еще удовлетворяется значеніемъ

$$x=4;$$

но отнявъ отъ частей этого послѣдняго уравненія по $\frac{9}{x-4}$, мы получаемъ нелѣпость, что $3=1$. Послѣдняя получилась вслѣдствіе того, что данное уравненіе и уравненія однозначащія съ нимъ, полученныя чрезъ произведенныя преобразованія, справедливы какъ равенства только при условіи, что

$$x=4,$$

а въ этомъ случаѣ

$$\frac{9}{x-4}=\infty,$$

такъ что отъ частей уравненія отнято было выраженіе, означающее безконечность.

Если же мы уравненіе

$$5x-7=2x+5,$$

равносильное первому, преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{5x-20}{x-4}+\frac{13}{x-4}=\frac{2x-8}{x-4}+\frac{13}{x-4}$$

$$\frac{5(x-4)}{x-4}+\frac{13}{x-4}=\frac{2(x-4)}{x-4}+\frac{13}{x-4}$$

$$5+\frac{13}{x-4}=2+\frac{13}{x-4},$$

то мы тѣмъ же способомъ, какъ выше, и по тѣмъ же причинамъ получимъ нелѣпость, что $5=2$.

И такъ бы могла быть выведена каждая другая нелѣпость

2) Преобразовавъ тождество

$$5-5=3-3$$

въ слѣдующее:

$$5\,(1-1)=3\,.\,(1-1).$$

и раздѣливъ послѣднее на одно и то же выраженіе $(1-1)$, мы получили бы мнимое доказательство нелѣпости, что $5=3$

Ошибка въ заключеніяхъ нашихъ состояла въ томъ, что мы позволили себѣ произвести дѣленіе тождества на выраженіе $(1-1)$, равное 0.

§ 374. **Ординарный видъ уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.** Первая и главнѣйшая задача ученія объ уравненіяхъ есть отысканіе способовъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій. Изъ приведенныхъ примѣровъ мы имѣли уже возможность убѣдиться, что конечная цѣль рѣшенія всякаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ есть приведеніе его въ концѣ концовъ къ такому виду, чтобы одна часть его составлялась только неизвѣстнымъ, а другая въ численномъ уравненіи числомъ, въ буквенномъ же—выраженіемъ, содержащимъ только данныя величины. Пріемы, ведущіе къ этой цѣли, зависятъ отъ степени уравненія. Послѣдняя же опредѣляется по приведеніи даннаго уравненія къ такому виду, что одна (обыкновенно правая) часть его есть 0 (или извѣстная величина), другая же многочленъ, цѣлый относительно неизвѣстнаго, расположенный по нисходящимъ степенямъ послѣдняго, слѣдовательно, къ виду:

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx^2+lx+m=0.$$

Такого рода преобразованіе алгебраическаго уравненія называютъ приведеніемъ его въ порядокъ. Условимся называть уравненіе, приведенное къ такому виду, ординарнымъ алгебраическимъ уравненіемъ n-ой степени, и замѣтимъ, что въ немъ членъ, не содержащій неизвѣстнаго, слѣдовательно, въ данномъ случаѣ m, называется свободнымъ членомъ.

Названныя преобразованія и вообще всѣ, при помощи которыхъ достигается рѣшеніе уравненія, производятся, какъ это уже установлено нами [§ 361], посредствомъ примѣненія правилъ **142—145** и теоремы VII, послѣдней особенно часто въ случаяхъ, къ которыхъ разсмотрѣнію мы теперь приступаемъ.

§ 375 **Уничтоженіе въ уравненіи знаменателей, не содержащихъ неизвѣстныя.** Уравненіе

$$\frac{3x-2}{16}-\frac{5x-2}{24}+2=\frac{5x}{36}+\frac{3x-10}{8}$$

можно было бы рѣшить, произведя сначала указанныя дѣленія двучленовъ и продолжая затѣмъ рѣшеніе, какъ въ примѣрѣ въ § 363. Но удобнѣе поступить нѣсколько иначе: можно все уравненіе сначала умножить на общаго знаменателя всѣхъ дробныхъ выраженій, тогда знаменатели всѣ исчезнуть и получится уравненіе безъ всякихъ дробей въ немъ, чѣмъ очень облегчается дальнѣйшій ходъ рѣшенія. Общій знаменатель названныхъ выраженій есть 144. Произведя упомянутое умноженіе, мы получаемъ:

$$27x-18-30x+12+288=20x+54x-180$$

Прежде чѣмъ переносить всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, въ одну часть уравненія, а остальные въ другую, можно всякій разъ предварительно дѣлать приведеніе подобныхъ членовъ. Поступая и тутъ такъ же, мы получаемъ:

$$-3x+282=74x-180$$
$$-3x-74x=-282-180$$
$$-77x=-462,$$

откуда

$$77x=462$$

и, наконецъ,

$$x=\frac{462}{77}$$

или

$$x=6.$$

Преимущество указаннаго здѣсь пріема дѣлается замѣтнымъ особенно въ тѣхъ случаяхъ, когда приходится рѣшать буквенныя уравненія, содержащія дробныя выраженія (примѣры въ § 380).

§ 376. **Уничтоженіе въ уравненіи знаменателей, содержащихъ неизвѣстныя.** Указанный въ предыдущемъ параграфѣ пріемъ можно примѣнять и тогда, когда въ уравненіи есть алгебраическія дроби, содержащія въ знаменателяхъ неизвѣстныя. Но такъ какъ общее правило гласитъ, что при умноженіи уравненія на выраженія, содержащія неизвѣстныя, могутъ теряться его корни и появляться постороннія рѣшенія, то прежде чѣмъ начать примѣнять разсматриваемый пріемъ къ послѣднему случаю, полезно опредѣленнѣе установить возможныя послѣдствія примѣненія его.

Положимъ, что требуется рѣшить такое уравненіе. Тогда, чтобы не производить перемѣнъ въ составѣ его корней, мы можемъ начать его рѣшать слѣдующимъ образомъ: перенести всѣ члены въ одну часть, напр., лѣвую, и привести ихъ къ общему знаменателю, избравъ послѣднимъ общее наименьшее кратное ихъ знаменателей, произвести въ дѣлимомъ и дѣлителѣ

получающагося частнаго указанныя дѣйствія и, сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, расположить ихъ по нисходящимъ степенямъ неизвѣстнаго. Если мы назовемъ упомянутое дѣлимое и упомянутаго дѣлителя буквами P и Q, то послѣ описанныхъ преобразованій данное уравненіе пріобрѣтаетъ видъ

$$\frac{P}{Q}=0$$

или

$$\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Kx^2+Lx+M}{ax^k+bx^{k-1}+cx^{k-2}+\ldots+fx^2+gx+h}=0.$$

Такъ какъ въ числѣ этихъ преобразованій не было ни одного, которое бы влекло за собою введеніе постороннихъ рѣшеній или уничтоженіе корней, то мы изъ уравненія

$$\frac{P}{Q}=0$$

получимъ всѣ корни даннаго уравненія, и только ихъ, разсуждая далѣе такъ:

Частное можетъ стать равнымъ 0 только, если или его дѣлимое станетъ равнымъ 0, или его дѣлитель сдѣлается безконечно большимъ. Слѣдовательно, уравненіе

$$\frac{P}{Q}=0$$

и данное будутъ удовлетворены всѣми значеніями неизвѣстнаго, удовлетворяющими уравненію

$$P=0,$$

а также всѣми значеніями неизвѣстнаго, при которыхъ Q можетъ сдѣлаться безконечно большимъ. Конечными значеніями неизвѣстнаго послѣднее достигнуто быть не можетъ. Слѣдовательно, остается изслѣдовать, при какихъ условіяхъ частное $\frac{P}{Q}$ превратится въ 0 при $x=\infty$. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, различимъ случаи, когда

$$n<k,$$

когда

$$n=k,$$

и когда

$$n>k.$$

Въ первомъ случаѣ преобразуемъ частное $\frac{P}{Q}$, раздѣливъ дѣлимое и дѣлителя его на x^k, вслѣдствіе чего разсматриваемое нами уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{\frac{A}{x^{k-n}} + \frac{B}{x^{k-n+1}} + \frac{C}{x^{k-n+2}} + \ldots + \frac{K}{x^{k-2}} + \frac{L}{x^{k-1}} + \frac{M}{x^k}}{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \ldots + \frac{g}{x^{k-1}} + \frac{h}{x^k}} = 0$$

Здѣсь въ частномъ, составляющемъ лѣвую часть уравненія, при $x=\infty$ всѣ члены въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, кромѣ члена a, превращаются въ 0, слѣдовательно, лѣвая часть уравненія въ выраженіе $\frac{0}{a}$, равное 0.

Значитъ, при упомянутомъ выше условіи уравненіе

$$\frac{P}{Q}=0$$

удовлетворяется значеніемъ

$$x=\infty.$$

Такъ мы видимъ, что въ первомъ случаѣ данное уравненіе имѣетъ тѣ же корни, какъ и уравненіе

$$P=0$$

и кромѣ того корень

$$x=\infty,$$

который назовемъ «особымъ корнемъ».

Во второмъ случаѣ, то есть, когда

$$n=k,$$

мы при томъ же преобразованіи частнаго $\frac{P}{Q}$ получаемъ уравненіе:

$$\frac{A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots + \frac{L}{x^{n-1}} + \frac{M}{x^n}}{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \ldots + \frac{g}{x^{k-1}} + \frac{h}{x^k}} = 0,$$

въ которомъ при $x=\infty$ лѣвая часть превращается въ выраженіе $\frac{A}{a}$, ко-

торое никогда не можетъ быть равнымъ 0, такъ какъ A и a, согласно смыслу введенныхъ обозначенiй, конечныя величины и не могутъ означать также и 0.

Такъ оказывается, что во второмъ случаѣ данное уравненiе также имѣетъ тѣ же корни, какъ и уравненiе

$$P=0,$$

но особаго корня не имѣетъ.

Въ третьемъ случаѣ преобразуемъ частное $\frac{P}{Q}$, раздѣливъ дѣлимое и дѣлителя его на x^n. Такимъ образомъ мы получаемъ уравненiе:

$$\frac{A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\ldots+\frac{L}{x^{n-1}}+\frac{M}{x^n}}{\frac{a}{x^{n-k}}+\frac{b}{x^{n-k+1}}+\frac{c}{x^{n-k+2}}+\ldots+\frac{g}{x^{n-1}}+\frac{h}{x^n}}=0,$$

въ которомъ при $x=\infty$ лѣвая часть превращается въ $\frac{A}{0}$, т. е. въ безконечно большую величину, но равною 0 не можетъ стать никоимъ образомъ.

Слѣдовательно, и въ третьемъ случаѣ данное уравненiе имѣетъ тѣ же корни, какъ и уравненiе

$$P=0,$$

но не имѣетъ особаго корня.

Что же касается уравненiя

$$P=0,$$

то ясно, что оно можетъ быть также получено чрезъ умноженiе даннаго уравненiя на общаго знаменателя встрѣчающихся въ немъ дробныхъ выраженiй и перенесенiе затѣмъ всѣхъ членовъ въ одну часть, и что оно равносильно уравненiю, въ которомъ это перенесенiе членовъ еще не произведено.

Но случается иногда, что изъ значенiй неизвѣстнаго, превращающихъ въ нуль P, одно или нѣсколько превращаютъ въ 0 также Q. Въ такомъ случаѣ частное $\frac{P}{Q}$ принимаетъ видъ неопредѣленности $\frac{0}{0}$. Положимъ, что r есть одно изъ такихъ значенiй неизвѣстнаго. Въ такомъ случаѣ, по теоремѣ, приведенной въ § 87, какъ слѣдствiе, и P и Q должны дѣлиться на $x-r$, слѣдовательно, частное $\frac{P}{Q}$ можетъ быть сокращено на $x-r$. Если бы оказались еще значенiя неизвѣстнаго r', r'' и т. д. того же свойства, то $\frac{P}{Q}$ можно

было бы еще сократить на $x-r'$, на $x-r''$ и т. д. Послѣ всѣхъ этихъ сокращеній неопредѣленность исчезла бы, и сокращенное частное всѣми остальными корнями уравненія

$$P=0$$

превращалось бы въ 0.

Упомянутаго свойства значенія неизвѣстнаго получается всякій разъ, когда названнымъ выше общимъ знаменателемъ будетъ взято не наименьшее общее кратное встрѣчающихся въ уравненіи знаменателей, помимо же этого въ очень рѣдкихъ случаяхъ.

Выяснивъ всѣ возможности, мы результатъ нашего изслѣдованія можемъ формулировать такъ:

Теорема. При умноженіи уравненія на общаго знаменателя встрѣчающихся въ немъ дробныхъ выраженій могутъ быть введены въ качествѣ постороннихъ рѣшеній только корни, превращающіе этого общаго знаменателя въ 0, и теряется особый корень ($x=\infty$) въ томъ случаѣ, если уравненіе по приведеніи къ ординарному виду окажется степени низшей, чѣмъ названный общій знаменатель. **148**

§ 377. Умноженіе уравненія на общее наименьшее кратное встрѣчающихся въ немъ знаменателей. Уравненіе

$$x+\frac{x-1}{x-4}=4+\frac{3}{x-4}$$

имѣетъ корень 3 и послѣ подстановки въ него значенія 4 вмѣсто x принимаетъ видъ

$$4+\frac{3}{0}=4+\frac{3}{0}.$$

Потому, согласно съ результатомъ разсужденій въ § 367, и 4 можно считать корнемъ даннаго уравненія.

Если же мы для того, чтобы привести это уравненіе къ виду

$$\frac{P}{Q}=0,$$

преобразуемъ его слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x^2-3x-1}{x-4}=\frac{4x-13}{x-4}$$

$$\frac{x^2-3x-1}{x-4}-\frac{4x-13}{x-4}=0$$

$$\frac{x^2-3x-4x+12}{x-4}=0$$

$$\frac{x(x-3)-4(x-3)}{x-4}=0$$

$$\frac{(x-3)(x-4)}{x-4}=0,$$

то оказывается, что лѣвая часть его въ послѣднихъ четырехъ видахъ его при $x=4$ дѣлается неопредѣленною [§ 118]. Такъ какъ всякій видъ неопредѣленности, и въ частности $\frac{0}{0}$, можетъ означать всякое число, то и равенство

$$\frac{(4-3)(4-4)}{4-4}=0$$

или

$$1\cdot\frac{0}{0}=0$$

нельзя считать несправедливымъ, тѣмъ болѣе, что на многіе вопросы, рѣшаемые при помощи уравненій, получаются разумнаго смысла отвѣты,— часто не нуждающіеся, вслѣдствіе несомнѣнной правильности своей, даже въ особомъ толкованіи, которыхъ повѣрка приводитъ къ равенствамъ подобнымъ послѣднему. Въ виду этого и на основаніи нашихъ разсужденій въ § 368 должно считать допустимымъ взглядъ, что при сокращеніи лѣвой части уравненія

$$\frac{(x-3)(x-4)}{x-4}=0$$

на $x-4$ уничтожается корень 4.

Въ подтвержденіе допустимости такого взгляда и возможности уничтоженія корня уравненія, а вмѣстѣ съ тѣмъ и рѣшенія задачи, вслѣдствіе сокращенія, разсмотримъ слѣдующій примѣръ:

Положимъ, что дана задача:

Найти число, по отнятіи отъ котораго 3 получается такой остатокъ, что при умноженіи на него числа 5 получается число, равное квадрату этого остатка.

Требованіе задачи можетъ быть выражено и уравненіемъ

$$(x-3)^2=5(x-3)\ \dots\ (I)$$

и уравненіемъ

$$\frac{(x-3)^2}{x-3}=5\ \dots\ (II)$$

такъ какъ по заданію 5 есть число, которое, будучи умножено на упоминаемый въ задачѣ остатокъ $(x-3)$, даетъ квадратъ этого остатка $(x-3)^2$, а по опредѣленію **53** число такого свойства обозначается выраженіемъ $\frac{(x-3)^2}{x-3}$.

Выражая одну и ту же зависимость между числами $(x-3)^2$, 5 и $(x-3)$, уравненія I и II должны быть равносильны другъ другу. Они должны быть таковыми и по той причинѣ, что въ противномъ случаѣ необходимо было бы признать за истину ту несообразность, что не всегда частное есть число, которое, будучи умножено на его дѣлителя, дастъ его дѣлимое.

Уравненіе I имѣетъ, какъ легко убѣдиться, корни 3 и 8, дающіе оба совершенно правильные отвѣты на вопросъ задачи. Слѣдовательно, и уравненіе II должно имѣть тѣ же корни. Сокративъ же лѣвую часть его на $(x-3)$, мы получили бы уравненіе

$$x-3=5,$$

имѣющее только корень 8; и то же самое уравненіе мы получили бы, если бы уравненіе I раздѣлили на $x-3$. Но въ послѣднемъ случаѣ по теоремѣ **147** былъ бы уничтоженъ корень 3. Слѣдовательно, названное сокращеніе лѣвой части уравненія II послѣдовательнымъ образомъ должно быть признано также за преобразованіе, имѣющее результатомъ уничтоженіе корня.

Изъ разсужденій этого параграфа и послѣдняго примѣра мы должны заключить, что не безъ основанія можно признать правильною и такую точку зрѣнія, что значенія неизвѣстнаго, превращающія въ уравненіи

$$\frac{P}{Q}=0,$$

разсмотрѣнномъ въ предыдущемъ параграфѣ, выраженія P и Q, то и другое, въ 0, не должны разсматриваться какъ постороннія рѣшенія. Они таковыми будутъ безусловно только въ томъ случаѣ, если при приведеніи даннаго уравненія, содержащаго неизвѣстное въ знаменателяхъ, къ виду

$$\frac{P}{Q}=0,$$

общимъ знаменателемъ Q будетъ взято не наименьшее общее кратное встрѣчающихся въ уравненіи знаменателей. Если же Q будетъ такое общее наименьшее кратное, то вообще въ чрезвычайно рѣдкихъ случаяхъ окажутся такія значенія неизвѣстнаго, которыя и P и Q превратятъ въ 0.

Тѣмъ болѣе мы имѣемъ основанія, становясь на указанную и разъясненную этимъ параграфомъ точку зрѣнія, заслуживающую, по нашему убѣжденію, предпочтенія предъ противоположной, вывести изъ изслѣдованій послѣднихъ двухъ параграфовъ такое заключеніе:

148[a] **Теорема.** ***При умноженіи уравненія на общее наименьшее кратное его знаменателей не вводится постороннихъ рѣшеній,*** *и теряется только особый корень ($x=\infty$) въ томъ случаѣ, когда степень получающагося при этомъ уравненія ниже степени названнаго множителя.*

§ 378. **Составленіе уравненія.** Разсмотримъ, какъ бы можно было рѣшить задачу:

Сыну 6 лѣтъ, отцу 30, чрезъ сколько лѣтъ отцу будетъ вдвое больше лѣтъ, чѣмъ сыну?

Попытаемся угадать это число лѣтъ, и допустимъ, что чрезъ 10 лѣтъ отецъ будетъ вдвое старше сына. Вѣрно ли мы угадали отвѣтъ, это должна показать повѣрка: чрезъ 10 лѣтъ сыну будетъ 6+10, т. е. 16 лѣтъ, отцу же 30+10, т. е. 40 лѣтъ. Если бы искомое число было вѣрно угадано, то 40 должно было бы равняться 2 . 16. Оказывается, слѣдовательно, что мы вѣрнаго отвѣта не угадали.

Но если мы скажемъ теперь: «отецъ будетъ вдвое старше сына чрезъ x лѣтъ», и повторимъ повѣрку, то она будетъ гласить такъ: чрезъ x лѣтъ сыну будетъ $(6+x)$ лѣтъ, отцу же $(30+x)$ лѣтъ; число лѣтъ отца должно быть вдвое больше числа лѣтъ сына, т. е., должно быть:

$$30+x=2(6+x).$$

Оказывается, что произведенная такимъ образомъ повѣрка дала намъ уравненіе, рѣшивъ которое мы и должны будемъ получить искомый отвѣтъ.

Раскрывъ въ уравненіи скобки, мы получаемъ:

$$30+x=12+2x.$$

Перенеся же 12 въ лѣвую и x въ правую часть уравненія, мы находимъ:

$$18=x,$$

и узнаемъ такимъ образомъ, что искомое число лѣтъ есть 18.

Повѣркою легко убѣдиться, что теперь получилось правильное рѣшеніе.

Подобнымъ образомъ всякую задачу можно выразить уравненіемъ или при помощи нѣсколькихъ уравненій. Составленіе же уравненій можетъ производиться очень разнообразно. Способъ, по которому мы составили только-что рѣшенное уравненіе, есть примѣръ примѣненія единственнаго общаго и, такъ сказать, самаго естественнаго правила для составленія уравненій, которое можно выразить такъ

Правило. Назвавъ искомую величину буквою (если неизвѣстныхъ нѣсколько, то буквами), нужно соединить ее съ данными числами знаками тѣхъ дѣйствій, которыя нужно произвести при повѣркѣ найденнаго рѣшенія, и соединить знакомъ равенства тѣ образовавшіяся такимъ способомъ выраженія, которыя при этой повѣркѣ должны оказаться равными. **149**

ГЛАВА II

Уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ 379. **Общее правило рѣшенія.** Пріемами, указанными и поясненными рядомъ примѣровъ въ предыдущей главѣ, всякое уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ можетъ быть приведено къ виду

$$ax=b,$$

считающемуся для такихъ уравненій ординарнымъ. По теоремѣ 145 получается рѣшеніе этого уравненія

$$x=\frac{b}{a}.$$

Подставивъ, для повѣрки, этотъ корень въ уравненіе, мы получаемъ тождество:

$$a\cdot\frac{b}{a}=b.$$

Такъ какъ всякое частное при опредѣленныхъ численныхъ значеніяхъ дѣлимаго и дѣлителя имѣетъ только одно опредѣленное значеніе, за исключеніемъ случая, когда и дѣлимое и дѣлитель равны 0, то въ общемъ должно

считаться за правило, что уравненіе первой степени имѣетъ одно рѣшеніе. Что же касается упомянутаго исключительнаго случая, то онъ будетъ еще особо разсмотрѣнъ въ § 382 при обзорѣ всѣхъ возможностей, какія могутъ встрѣтиться при рѣшеніи линейнаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Цѣлью, имѣющею быть достигнутою, и примѣрами, рѣшенными въ предыдущей главѣ, указывается, что обыкновенно рѣшеніе разсматриваемыхъ здѣсь уравненій будетъ состоять въ слѣдующихъ преобразованіяхъ:

Правило. *Для рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ нужно:*

1) *раскрыть скобки*,

2) *избавиться отъ знаменателей*,

3) *перенести члены, содержащіе неизвѣстное, въ одну часть уравненія, а остальные въ другую*,

4) *сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ*,

5) *въ буквенныхъ уравненіяхъ вынести послѣ этого неизвѣстное множителемъ за скобки*

и 6) *перенести коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ другую часть уравненія.*

Въ тѣхъ случаяхъ, когда рѣшалось болѣе сложное уравненіе, бываетъ полезно повѣрить чрезъ подстановку, не было ли сдѣлано при рѣшеніи ошибки. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда могутъ появляться посторонніе рѣшенія, такая повѣрка бываетъ необходима.

Примѣчаніе. Буквально придерживаться приведеннаго выше правила не всегда бываетъ самое удобное. Такъ, напр., можно послѣ уничтоженія знаменателей дѣлать также приведеніе подобныхъ членовъ; часто при рѣшеніи буквенныхъ уравненій бываетъ цѣлесообразнѣе какъ можно дольше воздерживаться отъ раскрытія скобокъ; иногда при рѣшеніи и численныхъ уравненій бываетъ необходимо сначала избавиться отъ знаменателей и затѣмъ только раскрывать скобки, и т. п.

§ 380. **Типичные примѣры.** Болѣе простые примѣры рѣшенія уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ нами даны были уже въ предыдущей главѣ (§§ 358, 363). Теперь же покажемъ примѣненіе приведеннаго выше правила и важнѣйшихъ правилъ предыдущей главы на рѣшеніи болѣе сложныхъ видовъ такихъ уравненій.

1. ***Численное уравненіе,***

не содержащее неизвѣстнаго въ знаменателяхъ.

$$\frac{3x-\frac{6x-1}{5}}{24}+\frac{4-9x}{40}=1\frac{1}{2}-\frac{\frac{3(2-x)}{4}-7}{30}+2\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{54}\right).$$

Раскрывъ встрѣчающіяся въ данномъ уравненіи скобки, мы получаемъ:

$$\frac{3x-\frac{6x-1}{5}}{24}+\frac{4-9x}{40}=1\frac{1}{2}-\frac{\frac{6-3x}{4}-7}{30}+2\frac{1}{4}x+\frac{1}{24}.$$

Теперь можно было бы упростить сложныя дробныя выраженія, но можно и безъ этого умножить уравненіе на общаго знаменателя 120 обоихъ членовъ лѣвой части и всѣхъ четырехъ членовъ правой. Такъ получается:

$$15x-(6x-1)+12-27x=180-(6-3x-28)+270x+5,$$

при чемъ мы скобками указываемъ, какъ можно, до пріобрѣтенія достаточнаго навыка, избѣжать ошибокъ въ знакахъ при умноженіи на общаго знаменателя тѣхъ дробныхъ выраженій, передъ которыми стоитъ знакъ —.

Раскрывъ и эти скобки, перенеся члены, содержащіе неизвѣстное, въ лѣвую часть, а остальные въ правую, и сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, мы находимъ:

$$-291x=194,$$

откуда, послѣ перенесенія коэффиціента при неизвѣстномъ въ другую часть:

$$x=\frac{+194}{-291}=-\frac{2}{3}.$$

Уже и при такой сравнительно небольшой сложности уравненія, какъ въ рѣшенномъ примѣрѣ, могутъ произойти ошибки при преобразованіяхъ и вычисленіяхъ, и потому должно рекомендовать повѣрку. Въ данномъ случаѣ она даетъ:

$$\frac{-2-\frac{-4-1}{5}}{24}+\frac{4+6}{40}=1\frac{1}{2}-\frac{\frac{3\left(2+\frac{2}{3}\right)}{4}-7}{30}+2\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{54}\right),$$

то есть,

$$\underbrace{-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}}_{\frac{5}{24}}=\underbrace{1\frac{1}{2}-\frac{-5}{30}-\frac{35}{24}}_{\frac{5}{24}},$$

слѣдовательно, тождество, чѣмъ и подтверждается правильность рѣшенія.

2. ***Буквенное уравненіе.***

$$\frac{a-2x}{9a^3+12a^2b+4ab^2}-\frac{2[4b^3-9a^2(a+x)]}{a(9a^2-4b^2)^2}=\frac{3(2a-x)}{9a^2b+12ab^2+4b^3}.$$

Для отысканія общаго знаменателя разложимъ дѣлителей всѣхъ трехъ частныхъ въ данномъ уравненіи на сомножителей.

$$9a^3+12a^2b+4ab^2=a(9a^2+12ab+4b^2)=a(3a+2b)^2$$
$$a(9a^2-4b^2)^2=a[(3a+2b)(3a-2b)]^2=a(3a+2b)^2(3a-2b)^2$$
$$9a^2b+12ab^2+4b^3=b(9a^2+12ab+4b^2)=b(3a+2b)^2.$$

По правилу 77 этотъ общій знаменатель есть $ab(3a+2b)^2(3a-2b)^2$.

При умноженіи на него уравненія мы получаемъ:

$$b(3a+2b)^2(a-2x)-2b[4b^3-9a^3-9a^2x]=3a(3a-2b)^2(2a-x).$$

Раскрывъ же всѣ скобки чрезъ выполненіе указанныхъ дѣйствій, мы находимъ:

$$9a^3b+12a^2b^2+4ab^3-18a^2bx-24ab^2x-8b^3x-8b^4+18a^3b+18a^2bx$$
$$=54a^4-72a^3b+24a^2b^2-27a^3x+36a^2bx-12ab^2x$$

Послѣ перенесенія всѣхъ членовъ, содержащихъ неизвѣстное, въ лѣвую часть, а остальныхъ въ правую и послѣ приведенія подобныхъ членовъ получается:

$$27a^3x-36a^2bx-12ab^2x-8b^3x=54a^4-99a^3b+12a^2b^2-4ab^3+8b^4,$$

а отсюда

$$(27a^3-36a^2b-12ab^2-8b^3)x=54a^4-99a^3b+12a^2b^2-4ab^3+8b^4$$
$$x=\frac{54a^4-99a^3b+12a^2b^2-4ab^3+8b^4}{27a^3-36a^2b-12ab^2-8b^3}$$

и по выполненіи указаннаго послѣднимъ выраженіемъ дѣленія

$$x=2a-b.$$

3. ***Уравненіе, содержащее неизвѣстное въ знаменателяхъ.***

$$\frac{5}{12x}-\frac{x+3}{20x}+1=\frac{23x+41}{30x}.$$

Общее наименьшее кратное встрѣчающихся въ данномъ уравненіи знаменателей есть $60x$. Умноживъ на него уравненіе, мы получаемъ:

$$25-3x-9+60x=46x+82$$

и, продолжая обычнымъ порядкомъ рѣшеніе:

$$57x-46x=82-16$$
$$11x=66$$
$$x=6.$$

По теоремѣ 148ª этотъ корень долженъ годиться, и особаго корня рѣшенное уравненіе имѣть не можетъ.

4. ***Уравненіе, имѣющее особый корень.***

$$\frac{5x-4}{x^2-7x+12}-\frac{2x-3}{x^2-4x+3}=\frac{3x-14}{x^2-5x+4}.$$

Чтобы найти общее наименьшее кратное знаменателей, разложимъ ихъ на сомножителей [§ 90 п. V]:

$$x^2-7x+12=x^2-3x-4x+12=x(x-3)-4(x-3)=(x-3)(x-4)$$
$$x^2-4x+3=x^2-x-3x+3=x(x-1)-3(x-1)=(x-1)(x-3)$$
$$x^2-5x+4=x^2-x-4x+4=x(x-1)-4(x-1)=(x-1)(x-4).$$

Искомое общее наименьшее кратное есть

$$(x-1)(x-3)(x-4).$$

Умноживъ на него уравненіе, мы получаемъ:

$$(5x-4)(x-1)-(2x-3)(x-4)=(3x-14)(x-3).$$

Раскрывъ же скобки и продолжая рѣшеніе обычнымъ порядкомъ, мы находимъ:

$$5x^2-9x+4-(2x^2-11x+12)=3x^2-23x+42$$
$$25x=50$$
$$x=2.$$

Этотъ корень, по теоремѣ 148ª, постороннимъ считаться не можетъ, такъ какъ онъ не превращаетъ въ 0 того общаго знаменателя, чрезъ умноженіе на котораго мы уничтожили въ уравненіи знаменателей. А такъ какъ этотъ общій знаменатель 3-ьей степени, уравненіе же, получившееся послѣ послѣдняго раскрытія скобокъ, оказалось первой степени, то, по той же теоремѣ, данное уравненіе должно еще имѣть особый корень

$$x=\infty.$$

Не будетъ лишнимъ замѣтить, что наличность послѣдняго корня можно было обнаружить сразу же: представивъ себѣ числителя и знаменателя каждой изъ алгебраическихъ дробей въ данномъ уравненіи раздѣленнымъ на x, мы увидѣли бы, что всѣ онѣ при безконечно большомъ значеніи неизвѣстнаго превращаются въ 0, уравненіе же въ тождество.

Часто бываетъ еще легче сразу же узнать особый корень.

5. ***Тождество въ видѣ уравненія.***

$$\frac{a^2x}{ab+b^2} - \frac{bx}{a} + \frac{b^3}{a(a+b)} - \frac{ax}{b} = \frac{b^2}{a} - x + \frac{b^2}{a+b} - \frac{b^2x}{a^2+ab}.$$

Умножая по правилу, приведенному въ предыдущемъ параграфѣ, это уравненіе на общаго знаменателя $ab(a+b)$ и перенося члены, содержащіе неизвѣстное, въ лѣвую часть, а остальные въ правую, мы получаемъ:

$$a^3x - b^2(a+b)x + b^4 - a^2(a+b)x = b^3(a+b) - ab(a+b)x - ab^3 - b^3x$$
$$a^3x - b^2(a+b)x - a^2(a+b)x + ab(a+b)x + b^3x = b^3(a+b) - ab^3 - b^4.$$

Вынеся же x множителемъ за скобки и перенеся заключенное въ нихъ выраженіе въ правую часть, мы находимъ:

$$[a^3 - b^2(a+b) - a^2(a+b) + ab(a+b) + b^3]x = b^3(a+b) - ab^3 - b^4$$

и

$$x = \frac{b^3(a+b) - ab^3 - b^4}{a^3 - b^2(a+b) - a^2(a+b) + ab(a+b) + b^3}.$$

Но если мы въ полученномъ отвѣтѣ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ раскроемъ скобки и сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ, то оказывается, что оба эти выраженія превращаются въ 0, и что, слѣдовательно, корень рѣшеннаго уравненія получился въ видѣ символа

$$x = \frac{0}{0},$$

который можетъ означать всякое число.

Чтобы выяснить причину этого, приведемъ каждую изъ частей даннаго уравненія къ общему знаменателю. Расположивъ при этомъ числителей по нисходящимъ степенямъ бурвы b и восходящимъ степенямъ буквы a, мы получаемъ:

$$\frac{b^4 - b^3x - ab^2x - a^2bx}{ab(a+b)} = \frac{b^3 - b^2x - abx - a^2x}{a(a+b)},$$

а по сокращеніи лѣвой части на b слѣдующее равенство:

$$\frac{b^3 - b^2x - abx - a^2x}{a(a+b)} = \frac{b^3 - b^2x - abx - a^2x}{a(a+b)};$$

то есть, оказывается, что данное равенство, которое мы рѣшали какъ уравненіе, вовсе не уравненіе, а тождество. А потому въ немъ и въ самомъ дѣлѣ x можетъ означать какое угодно число.

Если бы мы при рѣшеніи нашего мнимаго уравненія раньше раскрыли скобки, то при приведеніи его къ ординарному виду исчезли бы всѣ члены въ обѣихъ частяхъ его и получилось бы

$$0=0$$

Такъ бываетъ всегда, когда тождество рѣшается, какъ будто бы оно было уравненіе; получается или тождество

$$0=0$$

или, при предупрежденіи этого, рѣшеніе въ видѣ неопредѣленности.

ГЛАВА III

Изслѣдованіе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ 381. **Общій видъ и корень изслѣдуемаго уравненія.** Познакомившись въ предыдущей главѣ съ ходомъ рѣшенія уравненій 1-ой степени съ 1 неизвѣстнымъ, мы въ этой произведемъ обзоръ того, какими вообще могутъ быть корни такихъ уравненій, и изслѣдуемъ, какъ должны и могутъ толковаться различнаго рода корни въ тѣхъ случаяхъ, когда примѣняются уравненія къ рѣшенію какихъ-либо задачъ.

Если мы представимъ себѣ, что мы въ нѣкоторомъ данномъ уравненіи уже избавились отъ знаменателей, раскрыли скобки и сдѣлали въ каждой части приведеніе подобныхъ членовъ, то оно будетъ 1-ой степени, если послѣ этихъ преобразованій въ немъ неизвѣстное окажется встрѣчающимся только въ 1-ой степени. Сказавъ же, что оно послѣ этого будетъ имѣть видъ

$$cx+p=dx+q,$$

мы изобразимъ всѣ возможные случаи, такъ какъ извѣстныя величины c, d, p и q могутъ означать какія угодно числа, не исключая и 0.

Продолжая рѣшеніе уравненія обычнымъ порядкомъ, мы получимъ однозначащія съ нимъ уравненія:

$$cx-dx=q-p$$
$$(c-d)x=q-p$$
$$x=\frac{q-p}{c-d}.$$

Если же мы еще для того, чтобы указать на обычное выполненіе дѣйствій или приведеніе подобныхъ членовъ въ лѣвой и правой части, обо-

значимъ разности $c-d$ и $q-p$ соотвѣтственно буквами a и b, то послѣднія два уравненія примутъ видъ:

$$ax=b$$

и

$$x=\frac{b}{a}.$$

Какъ выраженіе $\frac{b}{a}$, такъ и выраженіе $\frac{q-p}{c-d}$ одинаково означаютъ корень изслѣдуемаго уравненія — это важно помнить для предстоящаго изслѣдованія.

§ 382. **Обзоръ всѣхъ возможныхъ значеній корня.** Изъ выраженій, полученныхъ въ предыдущемъ параграфѣ для x, видно, какими вообще могутъ быть корни уравненія 1-ой степени съ 1 неизвѣстнымъ.

1) *Если числа a и b окажутся оба положительными или оба отрицательными, то получается* ***положительное рѣшеніе уравненія.***

2) *Если изъ чиселъ a и b одно окажется положительнымъ, а другое отрицательнымъ, то получается* ***отрицательное рѣшеніе*** *уравненія.*

3) *Если число b окажется равнымъ* 0, *а a нѣтъ, то корень уравненія есть*

$$x=0$$

4) Если число a окажется равнымъ 0, а b нѣтъ, то, на основаніи понятія объ умноженіи на 0 [§ 52] и на основаніи высказаннаго въ § 116 правила о дѣленіи на 0, слѣдовало бы сказать, что уравненіе не допускаетъ рѣшенія.

Но можно частныя $\frac{b}{a}$ и $\frac{q-p}{c-d}$ разсматривать также съ точки зрѣнія, изложенной въ § 117, слѣдовательно, уравненіе

$$0\,.\,x=b$$

какъ предѣльный случай уравненія

$$ax=b,$$

а именно, какъ случай, когда, при значеніи b не равномъ 0, a дѣлается по абсолютной величинѣ своей меньше всякаго заданнаго абсолютнаго числа, какъ бы мало ни было послѣднее (напр., меньше $\frac{1}{10^{20}}$ или меньше $\frac{1}{10^{125}}$ и т. д.). При этомъ мы должны различать два случая, тотъ, когда a прибли-

жается къ 0, имѣя тотъ же знакъ, какъ b, и тотъ, когда a, приближается къ 0, имѣя знакъ противоположный тому, который имѣетъ b. Въ первомъ случаѣ частныя $\frac{b}{a}$ и $\frac{q-p}{c-d}$ безпредѣльно увеличиваются, оставаясь положительными, во второмъ они увеличиваются безпредѣльно по абсолютной своей величинѣ, но оставаясь отрицательными. Потому мы можемъ сказать также, что

если число a окажется равнымъ 0, а b нѣтъ, то корень уравненія есть

$$x=\pm\infty.$$

5) *Если, наконецъ, оба числа и* **a** *и* **b** *окажутся равными нулю, то выраженіе для x принимаетъ видъ* $\frac{0}{0}$, *то есть,* ***корень уравненія дѣлается неопредѣленнымъ.***

[§ 118]. Въ послѣднемъ случаѣ уравненіе

$$ax=b$$

превращается въ тождество

$$0\,.\,x=0,$$

остающееся справедливымъ при какихъ угодно значеніяхъ x. Но

$$c-d=0\text{ , если }c=d$$

и

$$q-p=0\text{, если }p=q.$$

Слѣдовательно, при условіи, что

$$a=c-d=0$$

и

$$b=q-p=0,$$

и уравненіе

$$cx+p=dx+q$$

превращается въ тождество, которое, какъ таковое, также должно оставаться справедливымъ при какихъ угодно значеніяхъ x.

Такъ мы видимъ, что получающійся при названныхъ въ 5-омъ пунктѣ условіяхъ неопредѣленный видъ рѣшенія уравненія указываетъ на то, что неизвѣстное при этихъ условіяхъ можетъ означать всякое число. (Ср. сказанное по поводу примѣра 5 въ § 380).

§ 383. **Замѣчанія по поводу п. 4 предыдущаго параграфа.** Въ дополненіе къ разсужденіямъ въ §§ 367 и 368 необходимо по поводу названнаго

пункта добавить, что признавъ

$$x=\infty$$

за корень уравненія

$$0 \cdot x=b,$$

мы уже послѣдовательнымъ образомъ должны признать не несправедливымъ равенство

$$0 \cdot \infty=b,$$

получающееся при повѣркѣ названнаго корня.

Въ видѣ

$$cx+p=dx+q$$

разсматриваемое уравненіе въ томъ случаѣ, когда $a=0$, превращается въ слѣдующее:

$$cx+p=cx+q,$$

и при подстановкѣ въ него ∞ вмѣсто x, мы получаемъ равенство

$$c \cdot \infty+p=c \cdot \infty+q,$$

которое мы должны признать также не несправедливымъ и подтверждающимъ, что найденный корень вѣренъ, такъ же, какъ и такого же вида равенства въ § 367.

§ 384. **Рѣшенія задачи и уравненія.** При составленіи уравненія для рѣшенія какой-либо задачи не всегда удается выразить этимъ уравненіемъ всѣ условія задачи, тѣмъ болѣе, что иныя изъ нихъ разумѣются сами собою и потому не упоминаются. Кромѣ того случается, что задача, въ общемъ допускающая рѣшеніе, не допускаетъ его въ нѣкоторыхъ случаяхъ, при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между данными въ ней числами. Потому не всегда найденный корень уравненія, составленнаго для рѣшенія задачи, составляетъ искомый ею отвѣтъ. Бываетъ также, что такой корень даетъ не прямой отвѣтъ, а такой, который пріобрѣтаетъ смыслъ только при извѣстномъ толкованіи.

Примѣрами, приводимыми въ слѣдующихъ параграфахъ, мы поясняемъ упомянутые случаи, въ частности и то, какъ нужно понимать по отношенію къ искомому рѣшенію задачи корни нулевой, безконечный и неопредѣленный.

§ 385. **Положительное рѣшеніе уравненія.** Если корень уравненія, составленнаго для рѣшенія задачи, окажется положительнымъ, то обыкновенно онъ представляетъ вполнѣ ясный отвѣтъ на нее. Но и такой корень можетъ, какъ видно изъ приводимаго ниже примѣра, оказаться не состо-

вляющимъ годнаго рѣшенія задачи; и въ такомъ случаѣ всегда остается заключить только одно, что она при данномъ въ ней подборѣ чиселъ вообще рѣшенія не допускаетъ.

Задача.

Артель рабочихъ подрядилась сдѣлать нѣкоторую работу за 100 рублей. Трое изъ артели захворали, работу же исполнили остальные. Заработокъ они подѣлили поровну между всѣми членами артели, вслѣдствіе чего работавшіе получили только $\frac{3}{5}$ того, что бы досталось на долю каждаго изъ нихъ, если бы не пришлось части заработка уступить больнымъ товарищамъ. Вычислить изъ сколькихъ человѣкъ состояла артель.

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Число членовъ артели обозначимъ буквою x. Подѣливъ 100 рублей поровну между собою, они получили каждый по $\frac{100}{x}$ рублей. Такъ какъ 3 работника хворали, то работало $(x-3)$ человѣкъ. Если бы они подѣлили заработокъ только между собою, то каждый изъ нихъ получилъ бы по $\frac{100}{x-3}$ рубля. Только $\frac{3}{5}$ этой суммы денегъ составляетъ полученная каждымъ членомъ артели доля $\frac{100}{x}$ рублей.

Слѣдовательно, должно быть:

$$\frac{100}{x}=\frac{3}{5}\cdot\frac{100}{x-3}.$$

Рѣшеніе уравненія.

Раздѣливъ полученное уравненіе на 100, мы имѣемъ:

$$\frac{1}{x}=\frac{3}{5(x-3)}.$$

Умноживъ это уравненіе на $5x(x-3)$, чтобы избавиться отъ знаменателей, мы получаемъ:

$$5x-15=3x,$$

не вводя при этомъ, по теоремѣ 148*, постороннихъ рѣшеній, но уничтожая корень

$$x=\infty.$$

Продолжая рѣшеніе уравненія обычнымъ порядкомъ, мы находимъ:

$$5x-3x=15.$$

или

$$2x=15,$$

слѣд.,

$$x=7\frac{1}{2}.$$

Такъ мы видимъ, что рѣшенное уравненіе имѣетъ 2 корня:

$$x_1=7\frac{1}{2}.$$

$$x_2=\infty.$$

Выясненіе смысла полученнаго рѣшенія.

Корни уравненія даютъ отвѣтъ, что при составѣ артели въ $7\frac{1}{2}$ человѣкъ или при безконечно большомъ составѣ ея могло бы произойти то, что разсказано въ задачѣ. Но ни то ни другое невозможно, такъ какъ артель могла состоять только изъ цѣлаго и конечнаго числа лицъ.

Отвѣтъ.

Задача не допускаетъ рѣшенія; сообщеннаго въ задачѣ факта не могло быть

Изъ этого примѣра мы видимъ, что рѣшивъ уравненіе, составленное для рѣшенія задачи, мы можемъ обнаружить также существованіе несообразностей въ заданіи, дѣлающихъ прямой и опредѣленный отвѣтъ на вопросъ задачи невозможнымъ.

§ 386. **Отрицательное рѣшеніе уравненія.** Кромѣ полученія отрицательнаго корня вообще, приводимые въ этомъ параграфѣ примѣры имѣютъ цѣлью показать: первый, какъ сдѣланное при составленіи уравненія неправильное предположеніе можетъ быть исправлено отрицательнымъ знакомъ корня, второй, какъ отрицательный корень можетъ указать на тѣ измѣненія въ условіяхъ задачи, не допускающей рѣшенія, послѣ которыхъ рѣшеніе сдѣлается возможнымъ.

Задача 1.

Въ 1881 году отцу было 40 лѣтъ, сыну его 17; когда отецъ былъ вдвое старше сына?

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Положимъ, что отцу было вдвое больше лѣтъ, чѣмъ сыну, x лѣтъ до упомянутаго въ задачѣ года. Въ такомъ случаѣ тогда отцу было $(40-x)$ лѣтъ, а сыну $(17-x)$ лѣтъ, при чемъ по условію задачи первое число лѣтъ должно было быть вдвое больше второго, то есть, должно быть

$$40-x=2(17-x).$$

Рѣшеніе уравненія.

Рѣшая это уравненіе обычными пріемами, мы получаемъ:

$$40-x=34-2x$$
$$2x-x=34-40$$
$$x=-6.$$

Выясненіе смысла полученнаго рѣшенія.

Корень уравненія даетъ отвѣтъ, что отецъ былъ вдвое старше сына -6 лѣтъ до упомянутаго въ задачѣ года, а это означаетъ, какъ мы знаемъ, $+6$ лѣтъ послѣ этого года. Такъ полученное рѣшеніе уравненія исправляетъ сдѣланное при составленіи его неправильное предположеніе, что вообще *до* названнаго года былъ тотъ моментъ, когда отцу было вдвое больше лѣтъ, чѣмъ сыну.

Отвѣтъ.

Отцу было вдвое больше лѣтъ, чѣмъ сыну, въ 1887 году.

Повѣрка.

Дѣйствительно въ 1887 году было отцу 46 лѣтъ, а сыну 23, т. е. отцу вдвое больше, чѣмъ сыну.

Примѣчаніе.

Если бы задача гласила: «отцу *теперь* 40 лѣтъ, сыну 17; сколько лѣтъ тому назадъ отецъ былъ вдвое старше сына?»—

то для рѣшенія ея нужно было бы составить то же уравненіе, которое мы только-что рѣшили, а отрицательный знакъ корня означалъ бы, что вообще того, о чемъ спрашиваетъ задача, еще не было, а только еще произойдетъ черезъ 6 лѣтъ.

Задача 2.

Въ библіотекѣ стояло на двухъ полкахъ 320 книгъ. Одну пятую часть книгъ, стоявшихъ на одной полкѣ и одну четверть книгъ, стоявшихъ на другой, отнесли къ переплетчику. Тогда на полкахъ осталось еще 200 книгъ. Сколько книгъ помѣщалось первоначально на каждой изъ полокъ?

Рѣшенiе.

Составленiе уравненiя.

Обозначимъ число книгъ, помѣщавшееся на одной изъ полокъ, буквою x. Въ такомъ случаѣ число ихъ, находившееся на другой полкѣ, должно быть обозначено разностью $320-x$. Когда съ первой полки унесли $\frac{1}{5}$ книгъ, то на ней осталось $\frac{4}{5}x$ книгъ; на другой же осталось $\frac{3}{4}(320-x)$ книгъ послѣ того, какъ съ ней снята была $\frac{1}{4}$ книгъ, стоявшихъ на ней. То, что послѣ этого на полкахъ осталось 200 книгъ, выражается уравненiемъ

$$\frac{4}{5}x+\frac{3}{4}(320-x)=200.$$

Рѣшенiе уравненiя.

Уничтоживъ знаменателей, мы получаемъ:

$$16x+4800-15x=4000,$$

а отсюда

$$x=-800.$$

Выясненiе смысла полученнаго рѣшенiя.

Согласно полученному корню число книгъ на одной полкѣ было бы -800; на другой же ихъ въ такомъ случаѣ было бы

$$320-(-800)=320+800=1120.$$

Это рѣшенiе можетъ имѣть только тотъ смыслъ, что разсказаннаго въ задачѣ факта быть не могло, ибо и отвѣтъ: «на полкѣ находится -800 книгъ» не имѣетъ смысла [§ 31] и на обѣихъ полкахъ вмѣстѣ не могло быть 320 книгъ, если ихъ было только на одной 1120.

Отвѣтъ.

Задача не допускаетъ рѣшенiя.

Примѣчанiе.

Въ данный корнемъ уравненiя отвѣтъ можно, однако, вложить нѣкоторый смыслъ. Если обратить вниманiе на то, что *прибавивъ* первоначальное число книгъ на одной полкѣ къ первоначальному числу ихъ на другой, мы по условiю задачи должны получить 320 книгъ, то примѣненiе отрицательнаго числа дѣлается возможнымъ. «Прибавить -800» значитъ «отнять 800». На основанiи этого въ отрицательномъ знакѣ корня уравненiя, соста-

вленнаго для рѣшенія задачи, можно усмотрѣть больше, чѣмъ простое указаніе на несообразность заданія.

Изъ этого рѣшенія уравненія видно, что изъ задачи была бы устранена имѣющаяся въ ней несообразность, если бы въ ней сказано было, что на одной полкѣ въ библіотекѣ стояло на 320 книгъ больше, чѣмъ на другой, а не на обѣихъ вмѣстѣ 320 книгъ

§ 387. **Нулевое рѣшеніе уравненія.**

Задача 1.

Изъ двухъ городовъ, лежащихъ на одной и той же рѣкѣ и отстоящихъ другъ отъ друга на разстояніи 45 верстъ выходятъ другъ другу на встрѣчу въ 12 часовъ дня два парохода. Тотъ изъ нихъ, который плылъ внизъ по теченію, шелъ со скоростію 20 верстъ въ часъ, другой со скоростію 16 верстъ. Въ четверть второго пассажиръ на одномъ изъ нихъ, находившійся въ своей каютѣ, пожелалъ узнать, сколько времени осталось еще до встрѣчи пароходовъ. Отвѣтить на его вопросъ.

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Оставшееся до встрѣчи парохода число часовъ назовемъ x. Отъ полудня до четверти второго прошло времени $1\frac{1}{4}$ часа. Слѣдовательно, вообще до момента встрѣчи пароходы будутъ въ пути $(1\frac{1}{4}+x)$ часовъ. Въ теченіе этого времени первый пароходъ пройдетъ $(1\frac{1}{4}+x)$. 20 верстъ, а второй $(1\frac{1}{4}+x)$. 16 верстъ. Оба же эти пути вмѣстѣ должны составить все разстояніе городовъ другъ отъ друга, т. е. 45 верстъ, такъ что должно быть:

$$(1\frac{1}{4}+x)\,.\,20+(1\frac{1}{4}+x)\,.\,16=45.$$

Рѣшеніе уравненія.

Съ возможнымъ здѣсь небольшимъ отступленіемъ отъ правила, нѣсколько упрощающимъ ходъ рѣшенія, это уравненіе можно рѣшить такъ:

$$36\left(1\frac{1}{4}+x\right)=45$$
$$45+36x=45$$
$$36x=0$$
$$x=\frac{0}{36}=0.$$

Смыслъ

полученнаго корня легко понятенъ; рѣшеніе задачи возможно и гласитъ:

Отвѣтъ.

Пароходы встрѣтились какъ разъ въ тотъ моментъ, когда предложенъ былъ вопросъ.

Зная, что при дѣленіи числа на самого себя всегда получается 1, интересно узнать, какого рода отвѣтъ получится при посредствѣ уравненія на такой вопросъ:

Задача 2.

Найти число, отъ дѣленія котораго самого на себя получится въ частномъ 5.

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Если искомое число назовемъ x то заключающійся въ задачѣ вопросъ выразится уравненіемъ:

$$\frac{x}{x}=5.$$

Рѣшеніе уравненія.

Освободивъ уравненіе отъ знаменателя, мы получаемъ:

$$x=5x.$$

Перенеся члены, содержащіе неизвѣстное въ одну часть, мы получаемъ:

$$5x-x=0.$$

Слѣдовательно,

$$4x=0$$

и

$$x=0.$$

Выясненіе смысла полученнаго рѣшенія.

Такъ какъ получился всего только 1 корень, то уравненіе нужно будетъ признать за недопускающее вовсе рѣшенія, если этотъ корень окажется постороннимъ. Подставивъ его для провѣрки въ составленное для рѣшенія задачи уравненіе, мы получимъ равенство

$$\frac{0}{0}=5,$$

которое нельзя назвать несправедливымъ. Въ самомъ дѣлѣ символъ $\frac{0}{0}$, имѣя видъ частнаго, можетъ только означать число, которое, будучи умножено на 0, дастъ 0; а потому онъ можетъ означать и 5, такъ какъ

$$0 . 5 \quad 0$$

(Ср. § 118).

Такъ мы видимъ, что нѣтъ надобности признавать найденный корень за посторонній и что полученнымъ рѣшеніемъ указывается на единстаенную возможность, какъ частное $\frac{x}{x}$ можетъ означать 5.

Отвѣтъ

0 можно признать за искомое число.

§ 388. **Безконечное рѣшеніе уравненія.**

Задача 1.

Тѣло вышло изъ нѣкоторой точки на окружности и двигается по ней со скоростью 5 метровъ въ минуту. Спустя 3 минуты 12 секундъ послѣ этого чрезъ эту же точку по ней проходитъ въ томъ же направленіи другое тѣло, вышедшее одновременно съ первымъ изъ точки, отстоящей отъ первой на разстояніи 16 метровъ. Если оба тѣла, не измѣняя своихъ скоростей будутъ продолжать двигаться по этой окружности, то когдв второе догонитъ первое?

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Положимъ, что второе тѣло догонитъ первое спустя x минутъ послѣ того, какъ тѣла начали двигаться. Въ такомъ случаѣ первое тѣло, двигаясь со скоростью 5 метровъ въ минуту, до момента встрѣчи успѣетъ пройти $5x$ метровъ. Второе же за это время должно будетъ пройти на 16 метровъ больше т. е. $(5x+16)$ метровъ. Проходя 16 метровъ въ $3\frac{1}{5}$ минуты, оно 1 метръ проходитъ въ $\frac{3\frac{1}{5}}{16}$ мин., а $(5x+16)$ метровъ въ $\frac{3\frac{1}{5}}{16} \cdot (5x+16)$ минутъ, что и составляетъ время, которое пройдетъ до момента встрѣчи. Слѣдовательно, должно быть:

$$\frac{3\frac{1}{5}}{16} \cdot (5x+16) = x.$$

Рѣшеніе уравненія.

Рѣшая обычнымъ порядкомъ это уравненіе, мы получаемъ:

$$\frac{1}{5}\cdot(5x+16)=x$$

$$5x+16=5x.$$

На основаніи того, что выяснено было въ §§ 367 и 368 мы, и не продолжая рѣшенія, уже видимъ, что послѣднее уравненіе удовлетворяется только безконечно большимъ значеніемъ неизвѣстнаго. Если же мы рѣшеніе еще продолжимъ, то получимъ:

$$16=5x-5x \text{ или же } 5x-5x=-16.$$

то есть $$0\,.\,x=\pm 16.$$

Но, какъ разъяснено было въ § 382 въ п. 4, корень послѣдняго уравненія можетъ быть изображенъ символами:

$$x=\pm\frac{16}{0}$$

$$x=\pm\infty.$$

Выясненіе смысла полученнаго рѣшенія.

Если мы внимательнѣе всмотримся въ условія задачи, то замѣтимъ, что второе тѣло движется съ тою же скоростью, какъ и первое, такъ какъ оно проходитъ 16 метровъ въ $3\frac{1}{5}$ мин. слѣд. въ 1 минуту также 5 метровъ. Но двигаясь съ тою же скоростью, какъ и первое тѣло, оно его догнать, конечно, никогда не можетъ, но и прежде никогда съ нимъ въ одной точкѣ находиться не могло бы, если бы съ тою же скоростью движеніе происходило и до того момента, съ котораго его разсматриваетъ задача. Это и выражаетъ корень.

$$x=\pm\infty.$$

Еще понятнѣе будетъ этотъ отвѣтъ, если мы къ случаю равныхъ скоростей перейдемъ постепенно, видоизмѣнивъ для этого рѣшенную задачу такимъ образомъ:

Два тѣла движутся по окружности въ одномъ и томъ же направленіи, выйдя одновременно изъ двухъ точекъ, отстоящихъ другъ отъ друга на разстояніи *c* метровъ, первое со скоростью *a* метровъ въ минуту, второе—же медленнѣе его—со скоростью *b* метровъ въ минуту. Когда второе тѣло догонитъ первое?

Для рѣшенія этой задачи уравненіе можетъ быть составлено такъ: Въ x минутъ первое тѣло пройдетъ ax метровъ, второе же bx метровъ и притомъ

на c метровъ больше перваго, такъ что должно быть:

$$bx = ax + c$$

и, слѣдовательно,

$$bx - ax = c$$
$$(b-a)x = c$$

и

$$x = \frac{c}{b-a}.$$

Изъ этого выраженія отчетливо видно, что чѣмъ a будетъ меньше отличаться отъ b, тѣмъ больше будетъ x, то есть, чѣмъ скорости тѣлъ, движущихся по окружности, будутъ меньше отличаться другъ отъ друга, тѣмъ больше пройдетъ времени до ихъ встрѣчи, при чемъ число, выражающее разность между скоростями, можетъ сдѣлаться по абсолютной величинѣ меньше всякаго заданнаго абсолютнаго числа, какъ бы мало оно ни было, а вмѣстѣ съ тѣмъ число, выражающее время,—больше всякаго заданнаго числа, какъ бы велико оно ни было.

Какъ разъяснено было въ § 117, все сказанное—при предположеніи, что $c>0$ и b не меньше a—можетъ быть коротко выражено такъ:

Если сдѣлается

$$b = a,$$

то

$$x = \frac{c}{b-a} = +\infty.$$

Легко такимъ же образомъ можетъ быть показано и разъяснено по смыслу своему, что—при предположеніи, что $c>0$ и b не больше a

$$x = \frac{c}{b-a} = \infty.$$

если сдѣлается

$$b = a.$$

Отвѣтъ.

Второе тѣло никогда перваго не догонитъ.

Зная напередъ, что при дѣленіи двухъ неодинаковыхъ чиселъ другъ на друга 1 получиться не можетъ, интересно узнать, какъ отвѣтитъ уравненіе на слѣдующій вопросъ:

Задача 2.

На какое число нужно раздѣлить другое на 3 большее, чтобы частное отъ этого дѣленія равнялось 1?

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Если искомое число назовемъ x, то требованіе задачи выразится уравненіемъ:

$$\frac{x+3}{x}=1.$$

Рѣшеніе уравненія.

Уничтоживъ знаменателя, мы получаемъ:

$$x+3=x.$$

Продолжить рѣшеніе уравненія возможно и такъ:

$$x-x=-3,$$

и такъ:

$$3=x-x;$$

обѣ же возможности можно заразъ выразить такимъ образомъ:

$$0\,.\,x=\pm 3.$$

А какъ разъяснено было въ § 382 въ п. 4, корень послѣдняго уравненія можетъ быть изображенъ символами:

$$x=\pm\frac{3}{0}$$

$$x=\pm\infty.$$

Выясненіе смысла полученнаго рѣшенія.

Смыслъ этого отвѣта тотъ, что чѣмъ больше сдѣлается абсолютная величина числа x, тѣмъ меньше будетъ отличаться дробь $\frac{x+3}{x}$ отъ 1, и что такимъ способомъ разность между этою дробью и 1 можетъ быть сдѣлана по абсолютной величинѣ своей меньше всякаго абсолютнаго заданнаго числа, какъ бы мало оно ни было. Такъ, напр., при $x=10^{18}$, а также при $x=-10^{18}$, эта дробь будетъ отличаться отъ 1 всего только на 0, 000 000 000 000 000 003, при дальнѣйшемъ же увеличеніи x и еще меньше; и продолжаться можетъ увеличеніе числа x и въ зависимости отъ этого приближеніе дроби $\frac{x+3}{x}$ къ 1 безпредѣльно. Изъ сказаннаго видно, что, отвѣчая на вопросъ задачи при помощи символа $\pm\infty$, мы вкладываемъ въ отвѣтъ болѣе глубокій смыслъ,

чѣмъ просто отрицая существованіе такого числа, при дѣленіи на которое числа на 3 большаго получается 1.

Отвѣтъ.

Безъ понятія о безконечности задача не допускаетъ рѣшенія.

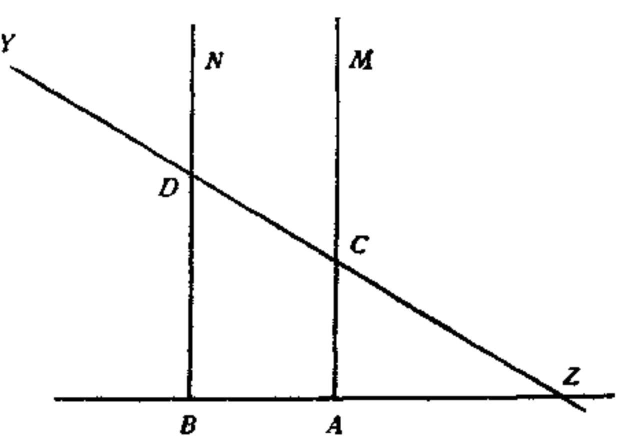
Задача 3.

Изъ какой точки прямой AB нужно провести другую прямую, чтобы она отсѣкла отъ перпендикуляровъ, возставленныхъ къ AB въ точкахъ A и B, равные отрѣзки данной длины?

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Пусть будетъ Z искомая точка на прямой AB и YZ искомая прямая, а C и D точки пересѣченія послѣдней съ перпендикулярами AM и BN, возставленными къ AB въ точкахъ A и B. Слѣдовательно, по заданію отрѣзки AC и BD должны быть равны между собою и данной длины. Предположивъ всѣ отрѣзки, которые будутъ упоминаться, измѣренными одною и тою же мѣрою, обозначимъ числа, выражающія, сколько разъ эта мѣра содержится въ разстояніи точки Z отъ A, буквою x, въ длинѣ отрѣзка AB—буквою a, въ одинаковыхъ по длинѣ отрѣзкахъ AC и BD—буквою b. По доказываемой въ геометріи теоремѣ отрѣзокъ BD долженъ быть во столько же разъ длиннѣе отрѣзка AC, во сколько разъ отрѣзокъ BZ больше отрѣзка AZ. Это выражается уравненіемъ:



$$\frac{b}{b}=\frac{x+a}{x},$$

изъ котораго и можетъ быть найдено разстояніе точки Z отъ A, а вмѣстѣ съ этимъ и положеніе ея самой.

Рѣшеніе уравненія.

Лѣвая часть уравненія можетъ быть сокращена на b. Уничтоживъ затѣмъ знаменателя, мы получаемъ:

$$x=x+a.$$

Продолжая рѣшеніе, мы получаемъ

$$x \quad x = a \quad \text{или} \quad a + x \quad x,$$

то есть

$$0 \cdot x = \pm a$$

Корень же этого уравненія есть, какъ разъяснено было въ § 382,

$$x = \pm \infty.$$

Выясненіе смысла полученнаго рѣшенія.

Смыслъ этого корня тотъ, что чѣмъ дальше вправо или влѣво отъ A продолженная въ обѣ стороны прямая CD пересѣчетъ продолженную такъ же прямую AB, тѣмъ меньше отрѣзки AC и BD будутъ отличаться по длинѣ своей одинъ отъ другого, равными же они станутъ только тогда, когда точка Z исчезнетъ на правой или на лѣвой сторонѣ въ безконечности, то есть, когда прямая YZ станетъ параллельною AB.

Исчезновеніе буквы b при рѣшеніи уравненія означаетъ, что искомый отвѣтъ не зависитъ отъ того, какой длины должны быть отсѣкаемые прямою YZ отъ перпендикуляровъ равные отрѣзки.

Отвѣтъ.

Безъ понятія о безконечности задача рѣшенія не допускаетъ.

При примѣненіи же этого понятія рѣшеніе гласитъ:

Требованіе задачи удовлетворяется безконечно отдаленною точкою прямой AB, другими словами, оно удовлетворяется прямою параллельною AB, притомъ всякою (такъ какъ въ рѣшеніи b исчезло).

§ 389. **Неопредѣленное рѣшеніе уравненія.**

Задача 1.

Купецъ выписалъ 1000 грушъ. Получивъ ихъ и открывъ ящикъ онъ увидѣлъ, что изъ нихъ 200 штукъ совершенно испортились. Тогда онъ разсчиталъ, что если будетъ продавать этотъ товаръ съ надбавкою къ покупной цѣнѣ 25%, то выручитъ только тѣ деньги, которыя онъ самъ заплатилъ за груши. На какую сумму было выписано грушъ?

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Положимъ, что за выписанныя 1000 грушъ было заплачено x рублей. Въ такомъ случаѣ каждая груша купцу самому обходилась въ $\frac{x}{1000}$ рублей.

25% надбавки означають, что на 100 рублей нужно надбавить 25 рублей.

$$\text{слѣд., на 1 рубль « « } \frac{25}{100} \text{ «}$$

$$\text{а на } \frac{x}{1000} \text{ рублей « « } \frac{x}{1000} \cdot \frac{25}{100} \text{ «.}$$

Слѣдовательно, купцомъ расчитано было, что каждую грушу слѣдовало продавать по $\left(\frac{x}{1000} + \frac{x}{1000} \cdot \frac{25}{100}\right)$ рублей, чтобы вернуть только затраченныя деньги. Но такъ какъ въ продажу поступаютъ 1000—200, то есть 800 грушъ, за которыя заплачено x рублей, то купцу самому каждая груша теперь стоитъ $\frac{x}{800}$ рублей. Слѣдовательно, должно быть:

$$\frac{x}{1000} + \frac{x}{1000} \cdot \frac{25}{100} = \frac{x}{800}.$$

Рѣшеніе уравненія.

По умноженіи уравненія на 4000 получается.

$$4x + x = 5x,$$

а отсюда:

$$5x - 5x = 0,$$

то есть,

$$0 \cdot x = 0.$$

Корень же послѣдняго уравненія выражается (см. п. 5 § 382) символомъ

$$x = \frac{0}{0}.$$

Выясненіе смысла полученнаго рѣшенія.

Полученіе корня въ видѣ неопредѣленности означаетъ, что сколько бы ни было заплачено за товаръ, купецъ вернетъ свои деньги, если будетъ его продавать, какъ сказано въ задачѣ.

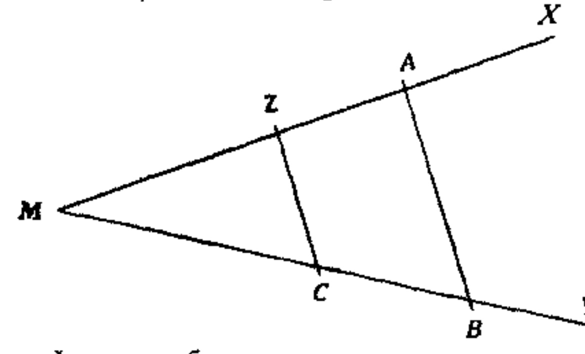
Составленное же нами для рѣшенія задачи уравненіе оказывается, если его разсмотрѣть внимательнѣе, тождествомъ, которое какъ таковое удовлетворяется всякимъ значеніемъ x (ср. сказанное по поводу примѣра 5 въ § 380).

Отвѣтъ.

Изъ данныхъ, сообщаемыхъ задачею, нельзя узнать, на какую сумму было выписано грушъ.

Задача 2.

На сторонѣ MX даннаго угла XMY лежитъ точка A, на сторонѣ ея MY точки B и C. Разстоянія этихъ трехъ точекъ отъ M, измѣренныя одною и тою же мѣрою, выражаются соотвѣтственно числами a, b, c. Чрезъ точку C проведена прямая параллельная AB. Отвѣтить на слѣдующіе вопросы: 1) на какомъ разстояніи отъ M послѣдняя пересѣкаетъ сторону MX? 2) какъ измѣнится отвѣтъ, когда прямая AB, передвигаясь параллельно самой себѣ, достигнетъ вершины M?



Рѣшеніе.

Точку пересѣченія, которой разстояніе отъ M требуется найти, назовемъ Z. Это разстояніе пусть содержитъ x мѣръ, упомянутыхъ въ задвчѣ. Въ такомъ случаѣ по извѣстной геометрической теоремѣ должно быть:

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{b}, \quad \ldots\ldots, \quad (I)$$

слѣдовательно,

$$x = \frac{ac}{b}.$$

Это и есть *отвѣтъ на первый вопросъ* задачи.

Если же прямая AB указаннымъ въ задачѣ образомъ достигнетъ вершины M, то и a и b превратятся въ 0, а формула для x приметъ видъ:

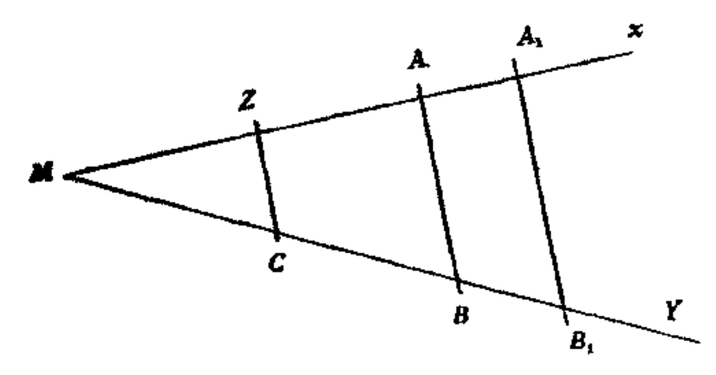
$$x = \frac{0\ .\ c}{0} = \frac{0}{0}.$$

Смыслъ этого *отвѣта*, получающагося *на 2-ой вопросъ*, ясенъ: какъ только точки A и B сольются съ M, положеніе прямой AB, опредѣлявшееся точками A и B, дѣлается неопредѣленнымъ, такъ какъ чрезъ одну точку можетъ быть проведено безчисленное множество прямыхъ; вмѣстѣ же съ этимъ и положеніе точки Z дѣлается неопредѣленнымъ.

Замѣчанія по поводу втораго вопроса.

Неопредѣленность положенія прямой AB, когда она достигнетъ точки M, можетъ быть устранена, если мы для сравненія возьмемъ вспомогательную прямую A_1B_1 параллельную AB.

Разстоянія точекъ A_1 и B_1 отъ M пусть будутъ теперь равны соотвѣтственно a и b примѣнявшимся уже мѣрамъ, разстоянія же точекъ A отъ



A_1 и B отъ B_1—соотвѣтственно равны a_1 и b_1 такимъ единицамъ.

То же, что выражалось уравненіемъ I, теперь выразится такъ:

$$\frac{x}{c} = \frac{a-a_1}{b-b_1},$$

а изъ этого уравненія мы находимъ

$$x = c \cdot \frac{a-a_1}{b-b_1}.$$

Теперь случай прохожденія прямой AB чрезъ вершину M даннаго угла долженъ быть опредѣленъ какъ тотъ, когда

$$a_1 = a$$

и

$$b_1 = b.$$

Корень уравненія

$$x = c \cdot \frac{a-a_1}{b-b_1} = \frac{(a-a_1)c}{b-b_1} \quad \ldots \qquad \text{(II)}$$

въ этомъ случаѣ опять приметъ видъ $\frac{0}{0}$. Но если мы въ дѣлимомъ частнаго $\frac{a-a_1}{b-b_1}$ вынесемъ a множителемъ за скобки, а въ дѣлителѣ b, то названный корень приметъ видъ:

$$x = c \cdot \frac{a\left(1-\frac{a_1}{a}\right)}{b\left(1-\frac{b_1}{b}\right)} \quad \ldots\ldots \text{(III)}.$$

Въ геометріи же доказывается, что при параллельности прямыхъ AB и A_1B_1 должно быть

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

Слѣдовательно, послѣднее выраженіе для x можетъ быть сокращено, послѣ чего для него получается:

$$x = c \cdot \frac{a}{b},$$

то есть выраженіе совершенно опредѣленное. Но если мы обратимъ вниманіе на то, что при этомъ сокращеніи исчезли числа a_1 и b_1, опредѣлявшія положеніе прямой AB, то должны заключить, что при этомъ оказалось отброшеннымъ условіе, отъ котораго зависѣла параллельность линій ZC и AB, и осталось только условіе, отъ котораго зависитъ параллельность линій ZC и A_1B_1.

Такъ мы видимъ, что и неопредѣленность выраженія $c \cdot \frac{a-a_1}{b-b_1}$ и его сокращеніе и получающаяся послѣ этого опредѣленность выраженія для x допускаютъ геометрическое толкованіе, и смыслъ всего этого слѣдующій:

Когда дѣлаются

$$a_1 = a$$

и

$$b_1 = b,$$

точки A, B и M сливаются и положеніе прямой AB дѣлается неопредѣленнымъ. Сокращеніе равносильно тому, что мы отказываемся отъ опредѣленія положенія точки Z при помощи прямой AB, которой положеніе при названныхъ условіяхъ сдѣлалось неопредѣленнымъ. Опредѣленность выраженія, получившагося послѣ сокращенія, соотвѣтствуетъ опредѣленію точки Z при помощи прямой A_1B_1.

§ 390. **Понятіе о раскрытіи неопредѣленности.** Въ изслѣдованіи послѣдней задачи въ предыдущемъ параграфѣ мы въ формулахъ II и III имѣли случай познакомиться съ выраженіемъ, которое при извѣстныхъ условіяхъ дѣлалось неопредѣленнымъ, и видѣли, что эта неопредѣленность путемъ нѣкотораго преобразованія могла быть устранена. Видовъ выраженій, могущихъ дѣлаться неопредѣленными, существуетъ много. Преобразованія же, удаляющія изъ нихъ возможность пріобрѣтенія при извѣстныхъ условіяхъ неопредѣленнаго вида, называются раскрытіемъ неопредѣленности. При этомъ значеніе выраженія, получающееся при этихъ условіяхъ по раскрытіи неопредѣленности, называется иногда истиннымъ значеніемъ его. Но не слѣдуетъ забывать, что появленіе въ рѣшеніи какой-либо задачи неопредѣленности имѣетъ всегда особый смыслъ (если она не указываетъ на упущенную изъ виду воз-

можность сокращенія) и что раскрытіе ея соотвѣтствуетъ отбрасыванію нѣкоторой части условій задачи.

Сказанное подтвердится между прочимъ и при изслѣдованіи рѣшенія задачи, приводимой какъ примѣръ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 391. **Изслѣдованіе общаго рѣшенія задачи.** Часто въ задачахъ вмѣсто опредѣленныхъ чиселъ даются неопредѣленныя; и дѣлается это съ тою цѣлью, чтобы получить общее рѣшеніе задачи (см. I и II въ вступленіи къ книгѣ). Часто рѣшаютъ сперва въ буквахъ, другими словами, въ общемъ видѣ также задачи, въ которыхъ даны числа опредѣленныя и затѣмъ уже въ такихъ случаяхъ подставляютъ для полученія искомаго отвѣта данныя числа въ найденную общую формулу. Принято это дѣлать особенно при рѣшеніи геометрическихъ задачъ.

Получающееся въ видѣ общей формулы рѣшеніе задачи обнимаетъ всѣ вообще возможные случаи: и случаи безусловной возможности рѣшенія ея, и случаи невозможности рѣшенія, если таковыя существуютъ, и равнымъ образомъ всѣ тѣ особые случаи, когда корень уравненія можетъ быть истолкованъ, какъ нѣкоторое особое рѣшеніе задачи.

Выясненіе, при какихъ условіяхъ получатся какіе изъ возможныхъ случаевъ рѣшенія задачи, называется изслѣдованіемъ общаго рѣшенія ея.

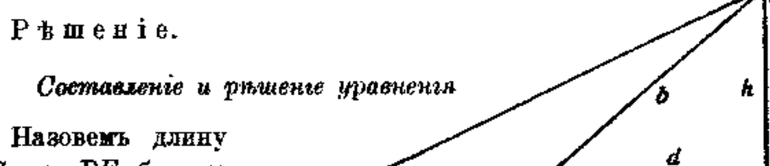
Примѣръ.

Задача.

Въ треугольникѣ ABC построена высота AD и въ вершинѣ A возставленъ къ сторонѣ его AB перпендикуляръ, пересѣкающій продолженную сторону BC въ точкѣ E. Зная длину a, b и d сторонъ треугольника BC и AC и отрѣзка CD, найти длину отрѣзка DE*) и изслѣдовать рѣшеніе.

Рѣшеніе.

Составленіе и рѣшеніе уравненія.



Назовемъ длину отрѣзка DE буквою x, а длину высоты AD буквою h. Отрѣзокъ BD равенъ разности отрѣзковъ BC и CD, слѣдовательно, длина его должна быть выражена формулою $a—d$.

***) Примѣчаніе.**

Называя въ геометрическихъ задачахъ на вычисленіе длину линій каждую просто одною буквою, предполагаютъ, что эти линіи измѣрены произвольною, но всякій разъ одною и тою же мѣрою, и что буквы выражаютъ, сколько разъ такая мѣра въ нихъ содержится.

Изъ прямоугольнаго треугольника ACD мы по пиѳагоровой теоремѣ имѣемъ:

$$h^2+d^2=b^2,$$

и отсюда

$$h^2=b^2-d^2.$$

По извѣстной геометрической теоремѣ о высотѣ въ прямоугольномъ треугольникѣ мы изъ треугольника ABE имѣемъ:

$$\frac{x}{h}=\frac{h}{a-d}.$$

Умноживъ это уравненіе на h и подставивъ въ него послѣ этого вмѣсто h^2 равное ему выраженіе b^2-d^2, мы получаемъ:

$$x=\frac{h^2}{a-d}$$

$$x=\frac{b^2-d^2}{a-d}.$$

Послѣднею формулою для x и выражается искомая длина отрѣзка DE.

Изслѣдованіе.

По теоремѣ, доказываемой въ геометріи, линія AC какъ наклонная, не можетъ быть меньше перпендикуляра AD. Потому b не можетъ быть меньше d и по этой причинѣ въ частномъ $\frac{b^2-d^2}{a-d}$, которое мы должны изслѣдовать, дѣлимое никогда не можетъ быть отрицательнымъ. Но a можетъ быть и меньше d, такъ какъ вершина B можетъ лежать также между C и D.

Въ этомъ случаѣ уголъ ABC былъ бы тупой, значеніе же x было бы отрицательнымъ, что означаетъ, что точка E находилась бы на продолженіи стороны BC за вершину B (въ чертежѣ правѣе B). Увеличеніе числа a соотвѣтствовало бы перемѣщенію точки B по направленію отъ C къ D. При $a=d$ точка B совпала бы съ D и прямая AE сдѣлалась бы параллельною BC, а изслѣдуемое выраженіе приняло бы видъ

$$x=\mp\infty,$$

что вмѣстѣ съ порядкомъ знаковъ $-$ и $+$ означаетъ, что точка E въ указанномъ случаѣ исчезаетъ на прямой CB въ безконечности на правой сторонѣ и появится опять на ней изъ безконечности, уже слѣва, какъ только a станетъ больше d, то есть, какъ только точка B двинется дальше въ прежнемъ направленіи. Послѣ этого значеніе x остается положительнымъ, и чѣмъ больше будетъ a, тѣмъ меньше будетъ x, то есть, чѣмъ дальше отъ D уйдетъ (вправо) B, тѣмъ ближе къ D будетъ находиться E.

При неизмѣняющихся значеніяхъ a и d абсолютное значеніе x уменьшается вмѣстѣ съ уменьшеніемъ b и увеличивается вмѣстѣ съ увеличеніемъ b. Этимъ указывается, что при неизмѣняющемся положеніи точекъ B, D и C, точка E будетъ приближаться къ основанію высоты D или удаляться отъ него, смотря по тому, будетъ ли къ нему приближаться или отъ него удаляться точка A.

Особеннаго вниманія заслуживаетъ случай, когда при этомъ станетъ

$$b = a.$$

Изслѣдуемая формула въ этомъ случаѣ превращается въ выраженіе $\frac{a^2-d^2}{a-d}$, которое можетъ быть сокращено на $(a-d)$, послѣ чего получается

$$x = a + d.$$

Этимъ указывается на то, что если въ данномъ треугольникѣ стороны BC и AC окажутся равными, то и отрѣзокъ CE будетъ имъ равенъ, такъ что если бы мы описали изъ точки C какъ центра окружность радіусомъ CB, то она прошла бы чрезъ точки A и E.

И если, наконецъ, при томъ же условіи, что

$$b = a,$$

станетъ еще и

$$d = b = a,$$

то корень

$$x = \frac{b^2-d^2}{a-d}$$

приметъ видъ неопредѣленности $\frac{0}{0}$, но въ то же время можетъ считаться также равнымъ $2a$, такъ какъ при условіи $b=a$ значеніе x оказалось равнымъ $a+d$.

Возможное при названныхъ выше условіяхъ преобразованіе

$$x = \frac{b^2-d^2}{a-d} = \frac{a^2-d^2}{a-d} = \frac{(a+d)(a-d)}{a-d} = a + d = 2a$$

есть раскрытіе неопредѣленности корня, дѣлающагося таковымъ именно вслѣдствіе этихъ условій.

Геометрическій же смыслъ этой неопредѣленности и ея раскрытія слѣдующій:

Вычисленіе длины отрѣзка DE по формулѣ

$$x = \frac{b^2-d^2}{a-d}$$

есть вычисленіе длины линіи, получившейся путемъ описаннаго въ задачѣ

построенія. И въ частномъ случаѣ, когда дѣлается

$$b=a,$$

а затѣмъ и

$$d=b=a,$$

этою формулою указывается вычисленіе линіи, получающейся все тѣмъ же именно способомъ. Но какъ только сдѣлаются

$$a=b=d,$$

точки A, B и D сольются, а вмѣстѣ съ тѣмъ сольются и прямыя AE и BC, такъ что у нихъ будетъ уже не одна общая точка (E), а безчисленное множество, и это и указывается неопредѣленностью выраженія для x при названныхъ условіяхъ.

Послѣ же сокращенія, дѣлающагося возможнымъ, когда дѣлается

$$b=a,$$

формула для x превращается въ выраженіе $a+d$ и указываетъ вычисленіе отрѣзка, получающагося не посредствомъ указываемаго задачею построенія, а посредствомъ другого болѣе простого, состоящаго въ отложеніи на BC отрѣзка CE равнаго $CB=CA$.

Только получаемый послѣднимъ способомъ отрѣзокъ DE будетъ имѣть длину $2a$, когда сдѣлаются

$$d=b=a$$

Такъ мы видимъ что раскрывъ неопредѣленность посредствомъ сокращенія, мы вмѣстѣ съ этимъ удалили изъ формулы, соотвѣтствовавшей всѣмъ первоначальнымъ условіямъ задачи, нѣкоторую часть ея, безъ которой она представляетъ рѣшеніе нѣкоторой новой болѣе простой задачи.

Интересно для сравненія прослѣдить и другой путь, которымъ можно перейти къ частному случаю задачи, когда

$$d=b-a.$$

Можно представить себѣ, что сначала дѣлается

$$d=a,$$

слѣдовательно, прямая AE параллельною BC и, какъ уже разъяснено было выше,

$$x=\mp\infty.$$

Уменьшая затѣмъ (выше уже было разъяснено, что b не можетъ быть меньше d) постепенно b до d, мы будемъ все время получать для x безконечно

большія значенія, чѣмъ указывается, что прямая AE, приближаясь вслѣдствіе уменьшенія стороны AC къ BC, будетъ оставаться все время параллельною BC, пока, наконецъ, не станетъ

$$b=a=d$$

и корень уравненія не приметъ видъ

$$x=\frac{0}{0}$$

который смыслъ разъясненъ былъ уже выше.

Примѣчаніе.

Въ разсмотрѣнной задачѣ корень уравненія дѣлался неопредѣленнымъ при условіи, что становились

$$d=b=a.$$

Такъ называемымъ истиннымъ значеніемъ корня въ этомъ случаѣ оказалось

$$x=2a.$$

При изслѣдованіи рѣшенія выяснилось, однако, что по отношенію къ задачѣ истина именно и указывается неопредѣленностью корня уравненія и что названное значеніе не составляетъ даже частнаго случая рѣшенія этой задачи.

§ 392. Еще примѣръ изслѣдованія рѣшенія: задача о курьерахъ.

Задача.

По дорогѣ ѣдутъ два курьера и проѣзжаютъ въ часъ первый c_1 верстъ, второй c_2 верстъ. Второй проѣзжаетъ мимо станціи B t часовъ послѣ того, какъ первый минуетъ станцію A. На какомъ разстояніи отъ B встрѣтятся эти курьеры?

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Положимъ, что курьеры ѣдутъ слѣва вправо и встрѣчаются въ точкѣ W, отстоящей отъ B на разстояніи x верстъ. Отъ момента выѣзда изъ A до момента встрѣчи первый курьеръ проѣхалъ $(d+x)$ верстъ, и такъ какъ онъ

A d B x W

въ часъ проѣзжалъ по c_1 верстъ, то на весь этотъ путь ему понадобилось

столько часовъ, сколько разъ c_1 верстъ содержатся въ $(d+x)$ верстахъ, то есть $\frac{d+x}{c_1}$ часовъ.

Второму курьеру, проѣхавшему до того же момента всего x верстъ, понадобилось на этотъ путь, такъ какъ онъ въ часъ проѣзжалъ по c_2 верстъ, столько часовъ, сколько разъ c_2 верстъ содержатся въ x верстахъ, то есть $\frac{x}{c_2}$ часовъ. На путь отъ A до W первому курьеру понадобилось времени на t часовъ болѣе, чѣмъ второму на путь отъ B до W, то есть, должно быть:

$$\frac{d+x}{c_1} = \frac{x}{c_2} + t.$$

Рѣшеніе уравненія.

Уничтоживъ знаменателей, мы получаемъ:

$$c_2d + c_2x = c_1x + c_1c_2t,$$

а отсюда

$$c_2d - c_1c_2t = c_1x - c_2x$$
$$c_2(d - c_1t) = (c_1 - c_2)x$$

и

$$x = \frac{c_2(d - c_1t)}{c_1 - c_2}$$

Изслѣдованіе.

Предпошлемъ подробному разсмотрѣнію полученной для x формулы, что въ ней произведеніе c_1t означаетъ число верстъ, которое первый курьеръ успѣетъ проѣхать съ момента выѣзда со станціи A до того момента, когда второй курьеръ проѣдетъ станцію B, и что частныя $\frac{d}{c_1}$ и $\frac{d}{c_2}$, которыя будутъ встрѣчаться въ изслѣдованіи, означаютъ число часовъ, въ которое соотвѣтственно первый и второй курьеры проѣзжаютъ пространство отъ A до B.

Наиболѣе полная картина измѣненія мѣста встрѣчи курьеровъ въ зависимости отъ измѣненія скоростей ихъ по величинѣ и направленію должна получиться при слѣдующемъ порядкѣ изслѣдованія.

I. Если $c_1 > c_2 > 0$

и притомъ

1) $c_1t < d$, слѣд., *) $t < \frac{d}{c_1}$, то $x > 0$

---

*) По 1-й изъ теоремъ, доказанныхъ въ § 79.

2) $c_1t=d$, слѣд., $t=\frac{d}{c_1}$, то $x=0$

3) $c_1t>d$, слѣд., $t>\frac{d}{c_1}$, то $x<0$.

Указывается же полученіемъ въ перечисленныхъ случаяхъ различнаго рода значеній корня слѣдующее:

Если первый курьеръ ѣдетъ скорѣе второго, но проѣзжаетъ при этомъ путь отъ A до B болѣе, чѣмъ въ t часовъ, такъ что второй успѣваетъ проѣхать мимо B раньше перваго, то встрѣча произойдетъ вправо отъ B; если же первый при этомъ проѣдетъ путь отъ A до B въ t часовъ, а потому прибываетъ въ B вмѣстѣ съ первымъ, то встрѣча происходитъ въ B; и если, наконецъ, при этомъ первый проѣхалъ путь отъ A до B менѣе, чѣмъ въ t часовъ и потому мимо B раньше второго, то встрѣча произошла до этого момента влѣво отъ B.

Въ послѣднемъ случаѣ встрѣча могла произойти между A и B $\left(\text{при } t<\frac{d}{c_2}\right)$, въ A $\left(\text{при } t=\frac{d}{c_2}\right)$ и лѣвѣе A $\left(\text{при } t>\frac{d}{c_2}\right)$.

II Если $c_1=c_2$

$$c_1>0$$
$$c_2>0$$

и притомъ

1) $c_1t<d$, то $x=+\infty$ *)

2) $c_1t=d$, то $x=\frac{0}{0}$,

3) $c_1t>d$, то $x=-\infty$ *).

Этимъ указывается слѣдующее:

Если курьеры ѣдутъ съ одинаковою скоростью и прибываютъ въ B не одновременно (п.п. 1 и 3), то они нигдѣ не встрѣтятся и нигдѣ не встрѣчались; если же они прибываютъ одновременно въ B, то при одинаковой скорости ѣзды они, очевидно, все время уже ѣхали вмѣстѣ и будутъ продолжать ѣхать такъ же, такъ что каждая точка ихъ общаго пути съ одинаковымъ правомъ можетъ считаться мѣстомъ встрѣчи.

Въ поясненіе смысла безконечнаго рѣшенія добавимъ и болѣе подробное толкованіе его, гласящее такъ: если первый курьеръ успѣваетъ проѣхать мимо B раньше второго (п. 3-й), то чѣмъ меньше c_2 отличается отъ c_1, оставаясь все время меньше c_1, тѣмъ дальше отъ B влѣво произошла встрѣча; если же второй курьеръ проѣзжаетъ мимо B раньше перваго (п. 1-ый), то, при тѣхъ же условіяхъ относительно скоростей, мѣсто встрѣчи бу-

---

*) Знаки передъ символомъ ∞ поставлены на основаніи предположенія, что переходъ отъ случая I къ случаю II совершался постепенно, такъ что разность c_1-c_2 приближалась къ 0, оставаясь все время положительною.

детъ удаляться безпредѣльно вправо отъ B; и такимъ образомъ въ обоихъ случаяхъ вслѣдствіе приближенія разности $c_1 - c_2$ къ 0 мѣсто встрѣчи курьеровъ можетъ оказаться дальше всякой точки на продолженной прямой AB, какъ бы велико разстояніе этой точки отъ B уже ни было.

III. Если $0 < c_1 < c_2$

и притомъ:

1) $c_1 t < d$, то $x < 0$,
2) $c_1 t = d$, то $x = 0$,
3) $c_1 t > d$, то $x > 0$.

Означаетъ же это по отношенію къ задачѣ слѣдующее: если первый курьеръ ѣдетъ медленнѣе второго и второй при этомъ проѣзжаетъ мимо B раньше перваго, то встрѣча произошла влѣво отъ B; если же второй при этомъ прибываетъ въ B вмѣстѣ съ первымъ, то встрѣча въ B и происходитъ; и если, наконецъ, при этомъ первый проѣхалъ мимо B раньше второго, то встрѣча произойдетъ вправо отъ B.

Въ первомъ изъ этихъ трехъ случаевъ встрѣча можетъ произойти или лѣвѣе A $\left(\text{при } t < \frac{d}{c_2}\right)$ или въ A $\left(\text{при } t = \frac{d}{c_2}\right)$ или между A и B $\left(\text{при } t > \frac{d}{c_2}\right)$.

IV Если курьеры ѣдутъ другъ другу навстрѣчу, напр., второй справа влѣво, то его скорость будетъ отрицательная. Это будетъ, слѣдовательно, случай, когда

$$c_1 > 0 > c_2.$$

Чтобы сдѣлать явнымъ, что c_2 отрицательная величина, положимъ

$$c_2 = -\gamma.$$

Тогда формула для x приметъ видъ:

$$x = -\frac{\gamma(d - c_1 t)}{c_1 + \gamma} = \frac{\gamma(c_1 t - d)}{c_1 + \gamma},$$

гдѣ знаменатель $c_1 + \gamma$ и въ числителѣ множитель γ будутъ всегда положительны.

Если теперь при приведенномъ предположеніи будетъ еще:

1) $c_1 t > d$, то $x > 0$
2) $c_1 t = d$, то $x = 0$
3) $c_1 t < d$, то $x < 0$.

А указывается такого рода значеніями корня слѣдующее:

Если первый курьеръ ѣдетъ съ такою большою скоростью что успѣетъ миновать и B еще до прiѣзда туда второго курьера, то встрѣча произойдетъ вправо отъ B; если въ теченiе t часовъ первый курьеръ какъ разъ успѣетъ проѣхать отъ A до B, то встрѣча произойдетъ въ B; и если, наконецъ, скорость перваго курьера будетъ еще меньше, такъ что онъ въ t часовъ не успѣетъ проѣхать отъ A до B, то встрѣча произойдетъ лѣвѣе B; и такъ какъ второй курьеръ долженъ появиться въ B послѣ того, какъ первый появляется въ A, то въ послѣднемъ случаѣ встрѣча состоится, очевидно, между A и B.

V и т. д.. Осталось еще изслѣдовать случаи когда

$$c_1 < 0 < c_2,$$

когда и c_1 и c_2 отрицательны, то есть, оба курьера ѣдутъ справа влѣво, и, наконецъ, еще разъ всѣ перечисленные уже въ п. п. I—V случаи съ c_1 и c_2, но при отрицательномъ t, то есть при условiи, что второй курьеръ проѣзжаетъ чрезъ B раньше, чѣмъ первый курьеръ минуетъ A.

Но показавъ въ пунктахъ I—IV съ достаточною подробностью, какъ должно вестись изслѣдованiе рѣшенiя задачи и указавъ также, что еще осталось разсмотрѣть, мы можемъ предоставить продолженiе этого изслѣдованiя самимъ учащимся.

ГЛАВА IV.

Понятiя о системѣ уравненiй и о равносильныхъ системахъ.

§ 393. **Неопредѣленность рѣшенiй уравненiя съ нѣсколькими неизвѣстными.** Если мы въ уравненiи съ двумя неизвѣстными

$$x + y = 2$$

перенесемъ y въ другую часть, то получимъ:

$$x = 2 - y$$

Если мы теперь возьмемъ y равнымъ $1, 2, 3\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \sqrt{7}$ и т. д. и подставимъ эти значенiя въ послѣднее уравненiе, то соотвѣтственно окажется x равнымъ $1, 0, -1, 1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{5}, 2-\sqrt{7}$ и т. д. Такъ мы для каждаго произвольно взятаго значенiя y можемъ найти такое значенiе x, которое вмѣстѣ съ нимъ удовлетворяетъ уравненiю

$$x + y = 2.$$

Подобнымъ образомъ и во всякомъ другомъ уравненіи съ двумя неизвѣстными каждому произвольно взятому значенію одного неизвѣстнаго соотвѣтствуетъ нѣкоторое опредѣленное значеніе другого, которыя оба вмѣстѣ удовлетворяютъ этому уравненію.

При трехъ неизвѣстныхъ можно двумъ изъ нихъ сообщать произвольныя значенія, при четырехъ тремъ изъ нихъ и т. д. и тѣмъ же способомъ, какъ въ приведенномъ примѣрѣ, всякій разъ вычислить то значеніе остающагося неизвѣстнаго, которое вмѣстѣ съ другими составятъ систему значеній неизвѣстныхъ или *систему корней*, которая удовлетворитъ данному уравненію. Всякая система корней, удовлетворяющая уравненію съ нѣсколькими неизвѣстными, составляетъ *рѣшеніе* его.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что уравненіе съ нѣсколькими неизвѣстными имѣетъ не одно, не два, вообще не опредѣленное число рѣшеній, а обладаетъ охарактеризованною выше неопредѣленностью и допускаетъ всегда безчисленное множество рѣшеній.

§ 394. **Внесеніе опредѣленности.** Въ уравненіе съ нѣсколькими неизвѣстными можетъ быть внесена опредѣленность только посредствомъ ограниченія рѣшеній какими-либо условіями. Если, напр., потребовать, чтобы числа, удовлетворяющія уравненію

$$x+y=2,$$

были цѣлыя и положительныя, то рѣшеніе получится уже только одно, а именно уравненію удовлетворитъ только система корней:

$$x=+1\ ;\ y=+1.$$

Этого рода ограниченіе числа рѣшеній уравненій нами будетъ также разсматриваться, но только позднѣе. Теперь же познакомимся съ другимъ видомъ его.

Можно было бы, напр., поставить условіемъ, чтобы въ уравненіи

$$x+y=2$$

y было вдвое больше x, то есть, чтобы было

$$y=2x.$$

Такъ мы видимъ, что ограниченіе теперь введено при помощи второго уравненія, содержащаго тѣ же неизвѣстныя, и требованія отыскать такія значенія неизвѣстныхъ, которыя бы удовлетворяли и первому и второму изъ этихъ уравненій.

Если мы въ уравненіе

$$x+y=2$$

вмѣсто y подставимъ $2x$, то получимъ:

$$x+2x=2$$

или

$$3x=2,$$

откуда

$$x=\frac{2}{\text{[redacted]}}.$$

Если же мы это значеніе подставимъ вмѣсто x въ уравненіе

$$y=2x,$$

то получимъ

$$y=\frac{4}{\text{[redacted]}}.$$

Подставивъ полученныя для x и y значенія въ уравненіе

$$x+y=2,$$

мы убѣждаемся, что они удовлетворяютъ ему; но они удовлетворяютъ и уравненію

$$y=2x.$$

Какъ легко убѣдиться и какъ это слѣдуетъ изъ общаго правила, которое будетъ ниже выяснено, кромѣ системы корней

$$x=\frac{2}{3}\ ;\ y=\frac{4}{3}$$

другой нѣтъ, которая бы удовлетворяла одновременно обоимъ упоминавшимся выше уравненіямъ.

Такъ оказалось, что требованіе, чтобы *два* неизвѣстныхъ удовлетворили одновременно *двумъ* уравненіямъ, составило вполнѣ опредѣленную задачу.

Разсмотримъ еще случай, когда неизвѣстныхъ три.

Если, напр., дано уравненіе

$$x+y+z=9,$$

то и оно, какъ разъяснено было въ предыдущемъ параграфѣ, допускаетъ безконечное число рѣшеній. Если бы мы предъявили къ встрѣчающимся въ этомъ уравненіи неизвѣстнымъ еще требованіе, напр., чтобы было

$$z=y-2x,$$

то подставивъ въ данное уравненіе $y-2x$ вмѣсто z, мы получили бы

$$x+y+y-2x=9.$$

то есть

$$2y-x=9, \quad \ldots \quad (I)$$

слѣдовательно, одно уравненіе съ двумя неизвѣстными, допускающее также еще безконечное число рѣшеній. Но если бы мы къ неизвѣстнымъ предъявили еще третье требованіе, напр., то, чтобы они удовлетворяли еще уравненію

$$8x-2y+z=1,$$

то, подставивъ и въ него $2y-x$ вмѣсто z, мы получили бы второе уравненіе

$$8x-2y+y-2x=1$$

или

$$6x-y=1, \quad \ldots \quad (II)$$

содержащее также только два неизвѣстныхъ x и y, какъ и уравненіе I. Преобразовавъ это послѣднее такимъ образомъ:

$$-x=9-2y$$
$$x=2y-9$$

и подставивъ выраженіе $2y-9$ вмѣсто x въ уравненіе II, мы получаемъ:

$$12y-54-y=1,$$

а отсюда

$$11y=55$$
$$y=5.$$

Подставивъ это значеніе вмѣсто y въ выраженіе $2y-9$, полученное для x, мы находимъ:

$$x=1,$$

а подставивъ вмѣсто x и y получившіяся для нихъ значенія въ найденное выше уравненіе

$$z=y-2x,$$

мы находимъ, наконецъ,

$$z=3,$$

и вмѣстѣ съ этимъ систему корней:

$$x=1;\quad y=5;\quad z=3,$$

единственную, которая удовлетворяетъ одновременно уравненіямъ:

$$\begin{gathered} x+y+z=9, \\ z=y-2x, \\ 8x-2y+z=1. \end{gathered}$$

Тутъ оказалось, что задача стала опредѣленною, когда къ *тремъ* неизвѣстнымъ было предъявлено требованіе, чтобы они удовлетворяли одновременно *тремъ* уравненіямъ.

Такъ же можетъ быть показано и будетъ впослѣдствіи въ общемъ видѣ доказано, что въ случаѣ 4 неизвѣстныхъ и уравненій должно быть дано 4 и т. д., то есть, что вообще всякій разъ должно быть дано столько уравненій, сколько имѣется неизвѣстныхъ для того, чтобы задача стала опредѣленною.

Но нужно прибавить, что эти уравненія должны быть независимыми другъ отъ друга, т. е. обладать свойствомъ, о которомъ говорится въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 395. **Понятіе о независимыхъ другъ отъ друга уравненіяхъ.** Если мы вернемся къ первому изъ примѣровъ, разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, и замѣнимъ въ немъ второе изъ данныхъ тамъ уравненій ($y=2x$) другимъ, а именно, если мы положимъ, что къ неизвѣстнымъ x и y предъявляется требованіе, чтобы они удовлетворяли одновременно и уравненію

$$x+y=2$$

и уравненію

$$3x+3y=6,$$

получающемуся изъ перваго чрезъ умноженіе частей его на 3, то спрашивается, получимъ ли мы также одно опредѣленное рѣшеніе задачи.

По 2-ой изъ теоремъ, доказанныхъ въ § 366, слѣдуетъ, что всякая система корней, удовлетворяющая первому изъ этихъ двухъ уравненій, должна удовлетворять и второму; выше же было разъяснено, что первому удовлетворяетъ безконечно большое число такихъ системъ; слѣдовательно, все это безчисленное множество системъ корней должно удовлетворять и второму.

Слѣдовательно, высказанное теперь требованіе уже не представляетъ задачи, дающей одно опредѣленное рѣшеніе (или нѣкоторое опредѣленное ограниченное число рѣшеній); и объясняется это тѣмъ, что мы второе урав-

ненiе вывели изъ перваго и что оно поэтому не выражаетъ вовсе *новаго* требованiя по отношенiю къ неизвѣстнымъ.

Приведеннаго примѣра будетъ достаточно для того, чтобы былъ понятенъ смыслъ слѣдующаго опредѣленiя:

 150 **Опредѣленiе.** Уравненiе называется зависящимъ отъ одного или нѣсколькихъ другихъ, если оно можетъ быть представлено какъ слѣдствiе изъ нихъ; если же оно изъ нихъ выведено быть не можетъ, то оно называется независимымъ отъ нихъ.

Изъ теоремъ и разсужденiй, указывающихъ, какъ могутъ получаться изъ уравненiя равносильныя ему, слѣдуетъ, что всѣ получаемыя такимъ образомъ (можно доказать, что вообще всѣ) равносильныя уравненiя зависятъ другъ отъ друга.
Но зависящiя другъ отъ друга уравненiя могутъ быть и неравносильными. Такъ, напр., уравненiе

$$(x+2)^2=9$$

получается изъ уравненiя

$$x+2=3$$

чрезъ возвышенiе послѣдняго въ квадратъ; слѣдовательно, эти уравненiя зависятъ другъ отъ друга; но они не равносильны, ибо послѣднее имѣетъ только корень 1, первое же кромѣ того еще корень —5.

§ 396. **Понятiе о системѣ уравненiй.** Изъ разсужденiй этой главы мы могли убѣдиться, что въ случаѣ нѣсколькихъ неизвѣстныхъ обыкновенно приходится имѣть дѣло съ нѣсколькими неравносильными уравненiями, которымъ *всѣмъ* искомыя значенiя неизвѣстныхъ должны удовлетворять *одновременно* или, что то же самое, которыя, не будучи однозначащими, должны быть удовлетворяемы *всѣ одною и тою же* системою корней или (въ тѣхъ случаяхъ, когда рѣшенiй возможно болѣе одного) одиѣми и тѣми же системами корней. Для изученiя такихъ уравненiй необходимо предварительно установить слѣдующiя понятiя.

 151 **Опредѣленiя.** Уравненiя называются *совмѣстными*, если каждое изъ встрѣчающихся въ нихъ неизвѣстныхъ должно и можетъ имѣть въ нихъ во всѣхъ одно и то же значенiе.

Уравненiя, въ которыхъ неизвѣстныя названнаго требованiя удовлетворить не могутъ, называются *несовмѣстными*.

Совокупность же уравненiй, къ которымъ предъявляется требованiе, чтобы они были совмѣстными, называется *системою уравненiй*.

Для указанія того, что нѣсколько уравненій составляютъ систему, ихъ пишутъ одно подъ другимъ и съ лѣвой (иногда и съ правой) стороны отъ нихъ ставятъ витую скобку {, или же проводятъ подъ ними горизонтальную черту.

Сколькими системами корней данная система уравненій можетъ быть удовлетворена, столько она допускаетъ рѣшеній.

Опредѣленія. Система уравненій называется опредѣленною или неопредѣленною, смотря по тому, допускаетъ ли она конечное (одно или нѣсколько) или безконечное число рѣшеній. **152**

Системы уравненій, не допускающія рѣшеній, принято называть несовмѣстными.

§ 397. **Понятіе объ исключеніи неизвѣстнаго.** Въ § 394 мы пояснили, въ какомъ случаѣ система уравненій дѣлается опредѣленною. Тамъ же мы на примѣрахъ показали, какъ при помощи подстановокъ могли быть найдены рѣшенія разсмотрѣнныхъ тамъ системъ уравненій. Но ихъ можно было бы найти также инымъ способомъ, который покажемъ на слѣдующемъ примѣрѣ:

Можно было бы, чтобы рѣшить разсмотрѣнную уже систему уравненій

$$\begin{array}{r} x+y=2 \\ y=2x \\ \hline \end{array},$$

вычесть второе изъ нихъ изъ перваго, тогда получилось бы

$$x+y-y=2-2x,$$

откуда

$$x+2x=2,$$

слѣдовательно,

$$3x=2$$

и

$$x=\frac{2}{3},$$

какъ и прежде.

Какъ примѣненнымъ прежде способомъ подстановки, такъ и произведеннымъ здѣсь вычитаніемъ достигалось то, что получались уравненія, содержащія однимъ неизвѣстнымъ меньше, чѣмъ данныя, или что это одно неизвѣстное, какъ принято выражаться, исключалось изъ данныхъ уравненій. Иногда такое исключеніе можетъ быть достигнуто и сложеніемъ уравненій, а еще чаще чрезъ сложеніе или вычитаніе уравненій, *умноженныхъ* предварительно на подходящія числа. Исключая изъ уравненій одно неизвѣстное за другимъ, какъ это показано было въ послѣднемъ примѣрѣ въ § 394, мы

въ концѣ концовъ и находимъ значеніе одного изъ неизвѣстныхъ, а затѣмъ легко и значенія всѣхъ остальныхъ.

Но чтобы имѣть право производить надъ уравненіями преобразованія всѣхъ упомянутыхъ видовъ и подобныя имъ дѣйствія, ведущія къ исключенію неизвѣстныхъ, необходимо предварительно доказать допустимость ихъ, что мы и дѣлаемъ въ слѣдующихъ параграфахъ.

§ 398. **Равносильныя системы уравненій.**

153 **Опредѣленіе.** Двѣ системы уравненій называются равносильными, если онѣ имѣютъ одни и тѣ же рѣшенія.

Само собою разумѣется, что упоминаемое въ этомъ опредѣленіи условіе можетъ быть выполнено только тогда, когда въ обѣихъ системахъ неизвѣстныя одни и тѣ же, и что словами «одни и тѣ же рѣшенія» въ немъ въ сжатой формѣ выражается слѣдующее: всякое рѣшеніе одной системы есть также рѣшеніе другой, и наоборотъ.

§ 399. Основная теорема о равносильныхъ системахъ. Для упрощенія доказательствъ, которыя намъ теперь предстоитъ дать, предпошлемъ имъ, что и всякое уравненіе съ нѣсколькими неизвѣстными можетъ быть приведено къ такому виду, при которомъ одна часть его будетъ 0, и что оно при этомъ, на основаніи теоремъ, доказанныхъ въ I главѣ этой части, должно остаться равносильнымъ данному. Потому мы, не нарушая этимъ строгости доказательствъ, можемъ всегда, когда это нужно будетъ, предположить, что уравненіе уже дано въ такомъ видѣ.

154 **Теорема.** Если мы одно изъ уравненій системы рѣшимъ относительно одного изъ неизвѣстныхъ и получившимся выраженіемъ замѣнимъ это неизвѣстное во всѣхъ остальныхъ уравненіяхъ, то образующаяся такимъ образомъ новая система будетъ равносильна прежней.

Предп. Положимъ, что дана система уравненій

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

съ неизвѣстными x, y и z, что, примѣрно, второе изъ уравненій рѣшено относительно z, при чемъ для этого неизвѣстнаго получилось выраженіе B' (B' можетъ, слѣдовательно, содержать только извѣстныя величины и остальныя неизвѣстныя x и y), и что выраженія A и C вслѣдствіе подстановки въ нихъ выраженія B' вмѣсто z превращаются соотвѣтственно въ выраженія A_1 и C_1.

Утв. Система уравненій

$$\begin{cases} A_1=0 \\ z\;=B' \\ C_1=0 \end{cases}$$

и данная система

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

равносильны другъ другу.

Док. Такъ какъ при рѣшеніи всякаго уравненія получаются все новыя уравненія равносильныя прежнимъ, то ясно, что уравненія

$$B=0$$

и

$$z=B'$$

равносильны другъ другу.

Чрезъ подстановку же въ выраженіе B' значеній x и y какой-либо системы корней получается всякій разъ значеніе z той же системы ихъ. А такъ какъ выраженія A_1 и C_1 отличаются отъ выраженій A и C только тѣмъ, что въ первыхъ двухъ стоитъ вмѣсто z равное ему выраженіе B', то вмѣстѣ съ A и C всякою системою корней превратятся въ 0 также A_1 и C_1, и наоборотъ. А вмѣстѣ съ тѣмъ, что сказано было въ началѣ доказательства объ уравненіи

$$z=B',$$

этимъ и выражается справедливость утвержденія.

Такъ же теорема доказывается, сколько бы система ни содержала уравненій и относительно котораго бы изъ неизвѣстныхъ ни было рѣшено любое изъ нихъ.

При помощи преобразованій, указываемыхъ этою теоремою, рѣшеніе всякой системы уравненій можетъ быть сведено къ рѣшенію другой, у которой однимъ неизвѣстнымъ,—тѣмъ, которое было исключено чрезъ подстановку, и однимъ уравненіемъ меньше.

Такъ посредствомъ исключенія одного неизвѣстнаго рѣшеніе системы n уравненій съ n неизвѣстными можетъ быть сведено къ рѣшенію системы $(n-1)$ уравненій съ $(n-1)$ неизвѣстными, эта послѣдняя чрезъ исключеніе другого неизвѣстнаго къ рѣшенію системы $(n-2)$ уравненій съ $(n-2)$ неизвѣстными и т. д., пока мы не дойдемъ до 2 равненій съ 2 неизвѣстными и, наконецъ, одного уравненія съ 1 неизвѣстнымъ. Восходя обратно и подставляя полученныя уже для неизвѣстныхъ значенія въ формулы для тѣхъ

неизвѣстныхъ, которыя послѣдовательно исключались, мы получимъ и всѣ значенія каждой системы корней.

§ 400. **Основная теорема о полученіи равносильной системы искусственнымъ способомъ.** Исключеніе неизвѣстныхъ въ той же послѣдовательности, которая была описана въ концѣ предыдущаго параграфа, но въ случаѣ надобности и въ иномъ порядкѣ, можетъ производиться также при цѣлесообразномъ примѣненіи слѣдующей теоремы:

155 **Теорема.** Если въ системѣ уравненій одно замѣнимъ такимъ, которое получится чрезъ сложеніе умноженныхъ на любыя числа уравненій ея, то получится новая система равносильная прежней, но только при условіи, что множитель замѣняемаго уравненія не есть 0 и что умноженіе уравненій производится не на выраженія, содержащія неизвѣстныя.

Предп. Положимъ, что дана система уравненій

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

съ неизвѣстными x, y и z., что a, b и c произвольныя числа или выраженія, не содержащія неизвѣстныхъ, но c не равно 0, и что, примѣрно, третье уравненіе замѣняется новымъ.

Утв. Система уравненій

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ aA+bB+cC=0 \end{cases}$$

и данная система

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$$

равносильны другъ другу.

Док. Всякая система корней, превращающая и A и B и C въ 0, превратитъ [45] и aA и bB и cC въ 0, слѣдовательно, и сумму этихъ трехъ произведеній. Слѣдовательно, вторая изъ называемыхъ въ утвержденіи системъ удовлетворяется всѣми системами корней, которыми удовлетворяется первая.

Всякая же система корней, превращающая и A и B и $aA+bB+cC$ въ 0, превращаетъ уравненіе

$$aA+bB+cC=0$$

въ слѣдующее:

$$a\,.\,0+b\,.\,0+c\,.\,C=0,$$

то есть въ

$$cC=0$$

Но вслѣдствіе предположенія, что c не равно 0, при этомъ должно превращаться въ 0 выраженіе C. Слѣдовательно, всякая система корней, удовлетворяющая второй изъ называемыхъ въ утвержденіи системъ уравненій, удовлетворяетъ и первой.

А доказавъ то и другое, мы и доказали справедливость утвержденія.

Такъ же теорема доказывается, сколько бы ни было въ системѣ уравненій и которое бы изъ нихъ ни замѣнялось новымъ производнымъ уравненіемъ.

§ 401. **Примѣръ.**

Чтобы рѣшить, примѣняя послѣднюю теорему, слѣдующую систему уравненій:

$$(A)\begin{cases}x-2y+3z=1 & \dots\ (\mathrm{I})\\ x+y-2z=5 & \dots\ (\mathrm{II})\\ 2x-y+2z=7, & \dots\ (\mathrm{III})\end{cases}$$

можно поступать такъ:

Можно уравненіе II замѣнить новымъ, получающимся отъ сложенія уравненій системы, умноженныхъ предварительно: первое на -1, второе на $+1$ и третье на 0. Такъ получается новая система (*Б*), равносильная данной и состоящая изъ уравненій I и III и уравненія

$$3y-5z=4\quad \dots (a)$$

Въ системѣ (*Б*) можно уравненіе III замѣнить новымъ, получающимся чрезъ сложеніе уравненій ея, умноженныхъ предварительно: первое (I) на -2, второе (a) на 0 и третье (III) на $+1$. Такъ получается равносильная ей система (*В*), состоящая изъ уравненій I, (a) и уравненія

$$3y-4z=5,\quad \dots (б)$$

въ которой уравненія (a) и (*б*) сами по себѣ составляютъ опредѣленную систему (*Г*), изъ которой могутъ быть найдены значенія для неизвѣстныхъ y и z. Потому мы можемъ продолжать рѣшеніе задачи, умалчивая объ уравненіи I системы (*В*) и объ умноженіи его на 0, а просто слагая уравненія системы (*Г*), умноженныя предварительно: первое (a) на -1 и второе (*б*) на $+1$.

Такъ мы находимъ:

$$z=1.$$

Это послѣднее уравненіе вмѣстѣ съ (*а*) или (б) составляетъ систему равносильную (*Г*), а еще вмѣстѣ съ уравненіемъ I систему равносильную (B), слѣдовательно, равносильную также системамъ (*Б*) и данной (*А*).

Подставивъ въ уравненіе (а) или (б) вмѣсто z полученное для этого неизвѣстнаго значеніе 1, мы получаемъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ и изъ него

$$y=3.$$

Подставивъ же вмѣсто y и z полученныя для нихъ значенія въ уравненіе I или любое изъ уравненій системы (*А*), мы находимъ способомъ, не требующимъ дальнѣйшаго объясненія:

$$x=4.$$

§ 402. **Упрощеніе объясненія послѣдняго хода рѣшенія.** Мы упростили бы тотъ же ходъ рѣшенія, если бы полученіе уравненія (а) объяснили просто вычитаніемъ уравненія I изъ уравненія II, полученіе уравненія (б) вычитаніемъ удвоеннаго уравненія I изъ уравненія II и, наконецъ, полученіе значенія для z вычитаніемъ уравненія (б) изъ уравненія (а), потому что производя эти дѣйствія, мы по существу дѣлали бы то же самое, что дѣлалось и прежде.

Такъ же упрощенно и кратко мы будемъ выражаться и впредь, не осложняя объясненій постояннымъ повтореніемъ подробной ссылки на послѣднюю теорему. Этимъ мы будемъ только эту теорему, выраженную въ очень общемъ видѣ, примѣнять въ формѣ частныхъ случаевъ ея, которые могли бы быть и особо формулированы какъ слѣдствія изъ нея

ГЛАВА V.

Система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

§ 403. **Приведеніе къ ординарному виду.** Пріемами, указанными въ I главѣ этой части, уравненіе 1-ой степени съ 2 неизвѣстными можетъ быть приведено къ виду

$$ax+by=c,$$

который для такихъ уравненій считается ординарнымъ.

Правило, указывающее необходимыя для этого преобразованія, гласитъ до 5-аго пункта включительно такъ же, какъ и правило въ § 379, и остается въ общемъ тѣмъ же и для предстоящихъ еще случаевъ приведенія уравненій къ ординарному виду.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что *система* двухъ уравненій первой степени

съ двумя неизвѣстными можетъ быть въ общемъ видѣ изображена такъ:

$$ax + by = c$$
$$lx + my = n$$

Въ этомъ видѣ мы и будемъ представлять всякій разъ такую систему, когда будемъ разсматривать какіе-либо вопросы, относящіеся къ ней

§ 404. **Рѣшеніе способомъ подстановки**. Основнымъ способомъ рѣшенія опредѣленныхъ системъ уравненій можно назвать тотъ, который основывается на теоремѣ **154** и которому примѣры мы видѣли при рѣшеніи системъ уравненій съ двумя и съ тремя неизвѣстными въ § 394 Онъ называется способомъ подстановки и состоитъ, какъ это не можетъ не быть уже яснымъ изъ предыдущихъ разсужденій въ слѣдующемъ:

Правило. *Для рѣшенія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными нужно:*

1) ***привести оба уравненія къ ординарному виду,***

2) ***рѣшить одно изъ данныхъ уравненій относительно одного изъ неизвѣстныхъ (т. е. такъ, какъ будто бы другое неизвѣстное было данная величина),***

3) ***подставить полученное выраженіе вмѣсто этого неизвѣстнаго въ другое уравненіе,***

4) ***рѣшить получающееся такимъ образомъ уравненіе, содержащее только одно неизвѣстное,***

и **5)** ***подставить найденное для этого неизвѣстнаго значеніе въ упомянутое выраженіе для другого неизвѣстнаго.***

Примѣръ.

Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{x-y-1}{10-x}=\frac{4}{3}$$
$$\frac{y-2}{3}+\frac{2}{15}x=\frac{y-x}{5}$$

Рѣшеніе.

Чтобы привести первое уравненіе къ ординарному виду, уничтожимъ въ немъ чрезъ умноженіе на $3(10-x)$ знаменателей и перенесемъ въ лѣвую часть члены, содержащіе неизвѣстныя, остальные же въ правую:

$$3x-3y-3=40-4x$$
$$7x-3y=43 \quad \dots (I)$$

Съ тою же цѣлью умножимъ второе изъ данныхъ уравненій на 15 и въ немъ такъ же перенесемъ члены, какъ въ первомъ:

$$5y-10+2x=3y-3x$$
$$5x+2y=10 \quad . \quad (II).$$

Рѣшимъ полученное уравненіе (II) относительно y:

$$2y=10-5x$$
$$y=\frac{10-5x}{2}$$

Найденное выраженіе подставимъ вмѣсто y въ уравненіе I·

$$7x-\frac{30-15x}{2}=43.$$

Получившееся же такимъ образомъ уравненіе рѣшимъ обычнымъ порядкомъ:

$$14x-30+15x=86$$
$$29x=116$$
$$x=\frac{116}{29}.$$

Слѣдовательно,

$$x=4.$$

Это значеніе подставимъ вмѣсто x въ найденное выше для y выраженіе:

$$y=\frac{10-5\,.\,4}{2}=-\frac{10}{2}.$$

Слѣдовательно,

$$y=-5.$$

При повѣркѣ оказывается, что и первое и второе изъ данныхъ уравненій при подстановкѣ значенія 4 вмѣсто x и значенія -5 вмѣсто y превращаются въ тождества.

§ 405. **Способъ сравненія**. Особый видъ способа подстановки составляетъ такъ называемый способъ сравненія. Онъ отличается отъ предыдущаго только тѣмъ, что **оба данныя уравненія сначала рѣшаются относительно одного и того же неизвѣстнаго и затѣмъ уже производится подстановка его или, что по существу то же самое, примѣняется теорема VI.**

Примѣръ.

Задачу, рѣшенную въ предыдущемъ параграфѣ, по этому способу пришлось бы рѣшить такъ:

Рѣшивъ какъ уравненіе I, такъ и уравненіе II относительно y, мы получили бы:

$$y = \frac{7x - 43}{3}$$

и

$$y = \frac{10 - 5x}{2},$$

а отсюда по теоремѣ VI:

$$\frac{7x - 43}{3} = \frac{10 - 5x}{2}.$$

Изъ этого уравненія получается также:

$$x = 4,$$

какъ и по первому способу.

Чрезъ подстановку же этого значенія вмѣсто x въ любое изъ обоихъ выраженій для другого неизвѣстнаго получается также:

$$y = -5.$$

§ 406. **Обычнѣйшіе искусственные пріемы исключенія неизвѣстнаго.** Примѣрами, приведенными въ предыдущей и въ этой главѣ, особенно же разсужденіями въ §§ 397 и 399, въ достаточной степени уже выяснено, что рѣшеніе системъ уравненій достигается чрезъ *исключеніе* неизвѣстныхъ. Основнымъ пріемомъ, при помощи котораго оно можетъ быть произведено, мы назвали подстановку. Но исключеніе неизвѣстнаго можетъ быть также достигнуто при помощи теоремы 155, какъ мы это видѣли на примѣрѣ въ § 397, и какъ мы еще покажемъ это теперь на нѣсколькихъ примѣрахъ, переходя отъ наипростѣйшихъ случаевъ постепенно къ случаямъ болѣе сложнымъ и, наконецъ, (въ слѣдующемъ параграфѣ) къ рѣшенію системы двухъ уравненій 1-ой степени съ двумя неизвѣстными въ общемъ видѣ.

а) Если дана система уравненій:

$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 9 \\ 4x + 3y &= 27 \end{aligned}$$

то сейчасъ же видно, что при сложеніи ихъ исключается y и получается уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$12x = 36.$$

Изъ него мы находимъ:

$$x = 3,$$

подставивъ же это значеніе вмѣсто x въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., второе, мы получаемъ:

$$4 \cdot 3 + 3y = 27,$$

а отсюда:

$$3y = 27 - 12 = 15,$$

слѣдовательно,

$$y = 5.$$

б) Если требуется рѣшить систему уравненій:

$$\begin{array}{r} x + 9y = 24 \\ 3x + 7y = 32 \end{array},$$

то, умноживъ на 3 первое изъ нихъ и вычтя изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія данное второе, подписавъ ихъ предварительно одно подъ другимъ, мы получаемъ:

$$\begin{array}{r} 3x + 27y = 72 \\ 3x + 7y = 32 \\ \hline 20y = 40, \end{array}$$

откуда $y = 2$

Для вычисленія другого неизвѣстнаго мы можемъ полученное значеніе 2 подставить вмѣсто y въ любое изъ данныхъ уравненій, напр., въ первое, и получаемъ въ такомъ случаѣ:

$$x + 9 \cdot 2 = 24,$$

откуда

$$x = 24 - 18,$$

слѣдовательно,

$$x = 6.$$

в) Если дана система уравненій:

$$\begin{array}{r} 3x + 17y = 67 \\ 5x - 8y = 39 \end{array},$$

то неизвѣстное x можно исключить, умноживъ первое уравненіе на 5, второе

на 3 и вычтя затѣмъ одно изъ полученныхъ уравненій изъ другого:

$$\begin{array}{r} 15x+85y=335 \\ 15x-24y=117 \\ \hline 109y=218 \end{array}$$

Отсюда мы получаемъ:

$$y=2.$$

Другое неизвѣстное мы можемъ найти, исключивъ такимъ же образомъ y Для этого умножимъ первое уравненіе данной системы на 8, второе на 17, и сложимъ получающіяся такимъ образомъ уравненія.

$$\begin{array}{r} 24x+136y=536 \\ 85x-136y=663 \\ \hline 109x \quad\quad =1199 \end{array}$$

Изъ послѣдняго же уравненія мы получаемъ:

$$x=11.$$

2) Если въ коэффиціентахъ передъ неизвѣстнымъ есть общіе сомножители, то сравнять эти коэффиціенты удобнѣе такъ, чтобы новый коэффиціентъ былъ общимъ наименьшимъ кратнымъ ихъ.

Напр., въ системѣ.

$$\begin{array}{r} 24x-25y=2 \\ 18x+35y=23 \end{array}$$

общее наименьшее кратное коэффиціентовъ 25 и 35 есть $5^2 \cdot 7$, и потому для исключенія y первое уравненіе слѣдуетъ умножить на дополнительнаго множителя 7, второе на дополнительнаго множителя 5, а затѣмъ получающіяся уравненія сложить:

$$\begin{array}{r} 168x-175y=14 \\ 90x+175y=115 \\ \hline 258x \quad\quad =129. \end{array}$$

Отсюда мы находимъ:

$$x=\frac{1}{2}.$$

Общее наименьшее кратное коэффиціентовъ 24 и 18 есть $2^3 \cdot 3^2$. Потому для исключенія неизвѣстнаго x достаточно первое уравненіе данной системы умножить на дополнительнаго множителя 3, второе на дополнительнаго

множителя 4, получающіяся же такимъ образомъ уравненія вычесть первое изъ второго:

$$\begin{array}{r} 72x - 75y = 6 \\ 72x + 140y = 92 \\ \hline 215y = 86. \end{array}$$

Изъ послѣдняго же уравненія мы находимъ:

$$y = \frac{86}{215}$$

и послѣ сокращенія

$$y = \frac{2}{5}$$

Показанный на послѣднихъ четырехъ примѣрахъ способъ рѣшенія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными состоитъ главнымъ образомъ въ особомъ пріемѣ исключенія неизвѣстнаго, который можетъ быть охарактеризованъ слѣдующимъ образомъ:

156 **Правило**. Для исключенія изъ двухъ уравненій неизвѣстнаго, встрѣчающагося въ нихъ только въ одной и той же степени, достаточно эти уравненія умножить на такихъ множителей, чтобы коэффиціентомъ при исключаемомъ неизвѣстномъ получилось общее наименьшее кратное прежнихъ его коэффиціентовъ, и затѣмъ получившіяся такимъ образомъ уравненія сложить или одно изъ другого вычесть, смотря по знаку передъ членомъ, содержащимъ исключаемое неизвѣстное.

§ 407. **Способъ уравниванія коэффиціентовъ или сложенія и вычитанія**. Разъясненный въ предыдущемъ параграфѣ способъ рѣшенія системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными примѣнимъ и къ системамъ съ бо́льшимъ числомъ уравненій и неизвѣстныхъ и потому намъ придется еще къ нему возвращаться. Онъ называется способомъ уравниванія коэффиціентовъ, чаще же способомъ сложенія и вычитанія.

Что касается примѣненія его къ рѣшенію системъ двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными, то главная суть его для этого случая выражена правиломъ 156, такъ какъ по исключеніи одного неизвѣстнаго получается такое уравненіе 1-ой степени съ одною неизвѣстною

величиною, въ которомъ только и остается перенести коэффиціентъ при ней въ другую часть, чтобы оно было рѣшено, другое же неизвѣстное всегда можетъ быть найдено такимъ же образомъ.

Но необходимо указать на то, что другое неизвѣстное можетъ быть найдено также чрезъ подстановку значенія перваго въ любое изъ уравненій данной системы и рѣшеніе затѣмъ этого уравненія.

Въ *общемъ для буквенныхъ* уравненій оказывается болѣе удобнымъ первый варіантъ этого способа, для численныхъ второй.

Рѣшимъ еще по этому способу данную ***въ общемъ видѣ систему двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными:***

$$ax+by=c$$
$$lx+my=n$$

Чтобы исключить y умножимъ первое изъ этихъ уравненій на m и второе на b и вычтемъ затѣмъ второе изъ получающихся уравненій изъ перваго:

$$amx+bmy=cm$$
$$blx+bmy=bn$$
$$amx-blx=cm-bn.$$

Вынеся еще x за скобки и перенеся образовавшійся при этомъ коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ другую часть, мы находимъ:

$$(am-bl)x=cm-bn$$
$$x=\frac{cm-bn}{am-bl}$$

Чтобы исключить x и найти y, произведемъ аналогичныя дѣйствія, а именно, умножимъ первое уравненіе данной системы на l, второе на a, вычтемъ первое изъ получающихся при этомъ уравненій изъ второго, вынесемъ затѣмъ y за скобки, а коэффиціентъ при y перенесемъ въ другую часть:

$$alx+bly=cl$$
$$alx+amy=an$$
$$amy-bly=an-cl$$
$$(am-bl)y=an-cl$$
$$y=\frac{an-cl}{am-bl}.$$

§ 408. **Способъ Безу.** Сравнять коэффиценты при исключаемомъ неизвѣстномъ можно еще иначе. Если въ системѣ

$$ax+by=c$$
$$lx+my=n$$

второе уравненіе умножимъ на нѣкотораго пока еще неизвѣстнаго множителя t и сложимъ уравненія, то получимъ:

$$\begin{array}{c} ax+by=c \\ ltx+mty=nt \\ \hline (a+lt)x+(b+mt)y=c+nt \end{array} \quad .(A).$$

Если мы желаемъ исключить y, то нужно t избрать такъ, чтобы было

$$b+mt=0.$$

Рѣшая послѣднее уравненіе относительно t, мы находимъ:

$$mt=-b$$

$$t=-\frac{b}{m}.$$

Такъ мы узнаемъ, что y исключится, если мы съ первымъ уравненіемъ данной системы сложимъ умноженное на $-\frac{b}{m}$ второе уравненіе ея.

Если же мы желаемъ исключить x, то нужно t избрать такъ, чтобы было

$$a+lt=0,$$

слѣдовательно,

$$lt=-a$$

и

$$t=-\frac{a}{l}.$$

Такъ оказывается, что исключится x, если мы съ первымъ уравненіемъ данной системы сложимъ умноженное на $-\frac{a}{l}$ второе уравненіе ея.

Но нѣтъ надобности послѣ опредѣленія искомыхъ значеній t производить упомянутыя послѣднія два сложенія уравненій: достаточно для исключенія y, слѣдовательно, для опредѣленія x, въ уравненіе A вмѣсто t подставить $-\frac{b}{m}$, а для исключенія x, слѣдовательно, для опредѣленія y, въ то же уравненіе подставить $-\frac{a}{l}$ вмѣсто t.

Этотъ способъ рѣшенія системы уравненій называется **способомъ неопредѣленныхъ множителей** *) или **способомъ Безу**. **)

*) Это общее названіе. Для системы, состоящей только изъ двухъ уравненій, нуженъ только одинъ такой множитель.

**) Bézout.

Не отличаясь особымъ удобствомъ, онъ интересенъ тѣмъ, что допускаетъ обобщеніе для системъ уравненій съ произвольнымъ количествомъ неизвѣстныхъ (см. §§ 443, 447 и 707).

Перечисленными и разсмотрѣнными четырьмя способами исключенія неизвѣстнаго изъ системы уравненій не исчерпываются пріемы, при помощи которыхъ этого можно достигнуть. Примѣры и иныхъ способовъ исключенія встрѣтятся впослѣдствіи (см. § 420).

§ 409. **Разъединеніе неизвѣстныхъ.** Которымъ бы изъ способовъ мы ни рѣшили систему уравненій

$$ax+by=c$$
$$lx+my=n$$

всегда получается одно и то же рѣшеніе, а именно, оказывается, что эта система уравненій удовлетворяется системою корней

$$x=\frac{cm-bn}{am-bl}$$
$$y=\frac{an-cl}{am-bl}$$

Послѣднюю же должно разсматривать какъ систему двухъ уравненій равносильную данной системѣ, при чемъ важно отмѣтить ту особенность ея, что въ каждомъ изъ уравненій, составляющихъ ее, встрѣчается *только одно* неизвѣстное. Полученіе системы уравненій такого свойства (или нѣсколькихъ такихъ системъ въ томъ случаѣ, когда данная система допускаетъ нѣсколько рѣшеній) и составляетъ суть рѣшенія всякой данной системы уравненій не съ двумя только неизвѣстными, но и съ любымъ количествомъ ихъ. Преобразованіе данной системы уравненій въ такую равносильную можно было бы, переводя существующій для этого иностранный терминъ, назвать разъединеніемъ неизвѣстныхъ.

При рѣшеніи системы 2 уравненій 1-ой степени съ 2 неизвѣстными по способу подстановки (слѣдовательно, и по способу сравненія) послѣдовательно происходятъ преобразованія системъ въ такія новыя, которыя равносильны каждая предыдущей всегда непосредственно по теоремѣ 154.

При примѣненіи же обоихъ другихъ разсмотрѣнныхъ способовъ равносильны данной непосредственно по теоремѣ 155 только двѣ системы: система, состоящая изъ одного изъ данныхъ уравненій и уравненія, получающагося по исключеніи одного неизвѣстнаго, и система, состоящая также изъ одного изъ данныхъ уравненій и уравненія, получающагося по исключеніи другого неизвѣстнаго. Равносильность системы

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{cm-bn}{am-bl} \\ y&=\frac{an-cl}{am-bl}\end{aligned}\right.$$

съ данною уже не слѣдуетъ непосредственно по теоремѣ 155. Но она видна этимъ указаніемъ важно дополнить обоснованіе послѣднихъ двухъ названныхъ способовъ—изъ того. что по теоремѣ 155 равносильны данной системѣ системы

$$\begin{cases} ax+by=c \\ x=\dfrac{cm-bn}{am-bl} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x=\dfrac{cm-bn}{am-bl} \\ lx+my=n. \end{cases}$$

а такъ же системы

$$\begin{cases} ax+by=c \\ y=\dfrac{an-cl}{am-bl} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y=\dfrac{an-cl}{am-bl} \\ lx+my=n, \end{cases}$$

изъ совокупности же послѣднихъ четырехъ системъ слѣдуетъ [§ 398], что системѣ обоихъ данныхъ уравненій равносильна система уравненій съ разъединенными неизвѣстными, представляемая системою корней.

$$\begin{cases} x=\dfrac{cm-bn}{am-bl} \\ y=\dfrac{an-cl}{am-bl}. \end{cases}$$

На основаніи же послѣднихъ разсужденій и того свойства частнаго, о которомъ упоминается въ § 379, должно признать за правило, что въ общемъ **система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными имѣетъ одно рѣшеніе.** (Объ особыхъ случаяхъ и въ частности о признакахъ зависимости уравненій другъ отъ друга говорится въ §§ 413—418 и 424).

§ 410. Сведеніе всѣхъ способовъ къ одному. Если дана система уравненій

$$\begin{cases} ax+by=c \\ lx+my=n \end{cases}$$

и мы, сравнявъ коэффиценты при y [§ 407], перенесемъ во второмъ уравненіи членъ blx въ правую часть, то получаемъ:

$$bmy = bn - blx.$$

Если мы теперь *подставимъ* выраженіе $bn - blx$ вмѣсто bmy въ уравненіе

$$amx + bmy = cm,$$

то получаемъ:

$$amx + bn - blx = cm;$$

и если еще тутъ перенесемъ членъ bn въ правую часть, то получается

$$amx - blx = cm - bn$$

то есть то же самое уравненіе, которое получилось въ упомянутомъ выше параграфѣ послѣ вычитанія уравненій.

Такъ оказывается, что способъ уравниванія коэффиціентовъ можетъ считаться особымъ видомъ способа подстановки. Къ послѣднему могутъ быть сведены, какъ мы теперь видимъ, всѣ остальные способы, которые такъ же, какъ и способы, разсматриваемые позднѣе въ §§ 561 и 562, можно было бы назвать и с к у с с т в е н н ы м и.

ГЛАВА VI.

Изслѣдованіе системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

§ 411. **Общій обзоръ всѣхъ возможныхъ случаевъ.** Чтобы установить, какіе вообще возможны случаи рѣшеній системы двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными, нужно разсмотрѣть такую систему въ общемъ видѣ. Сохранивъ для изображенія послѣдняго тѣ же буквы, которыя нами уже были избраны въ § 403, другими словами, изображая такую систему такъ:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ lx + my = n, \end{cases}$$

мы имѣемъ уже готовымъ и рѣшеніе ея, ибо въ § 407 нами было найдено, что она удовлетворяется системою корней:

$$x = \frac{cm - bn}{am - bl}$$

$$y = \frac{an - cl}{am - bl}.$$

Легко видно, что въ этихъ выраженіяхъ для x и y какъ дѣлимое такъ и дѣлитель можетъ оказаться и положительнымъ, и отрицательнымъ, и равнымъ 0. Но какъ нами уже неоднократно указывалось, частное въ томъ случаѣ, когда дѣлитель его дѣлается равнымъ 0, никакого опредѣленнаго числа означать не можетъ, хотя и можетъ имѣть нѣкоторый особый смыслъ, какъ это разъяснялось, между прочимъ, и въ главѣ III этой части книги. Различая потому случаи, когда выраженіе $am-bl$ не равно 0 и когда оно равняется 0, мы изъ сказаннаго о дѣлимомъ и дѣлителѣ выраженій для x и y заключаемъ, что въ рѣшеніи системы 2 уравненій 1-ой степени съ 2 неизвѣстными значенія послѣднихъ могутъ быть каждое: въ 1-омъ случаѣ и положительнымъ и отрицательнымъ и равнымъ 0, во 2-мъ же только или безконечно большимъ или неопредѣленнымъ.

§ 412. **Опредѣленныя рѣшенія**. Какъ при изслѣдованіи уравненія 1-й степени съ 1 неизвѣстнымъ, такъ и тутъ не составляетъ никакой трудности установить условія, при которыхъ значенія неизвѣстныхъ x и y будутъ имѣть знаки положительный или отрицательный, а также условія, при которыхъ они будутъ, одно или оба, равны 0.

Что же касается послѣдняго случая, то подставивъ въ уравненія

$$ax+by=c$$
$$lx+my=n$$

вмѣсто того и другого неизвѣстнаго 0, мы получаемъ:

$$a\,.\,0+b\,.\,0=c$$
$$l\,.\,0+m\,.\,0=n,$$

изъ чего видно, что только тогда, когда и

$$c=0$$

и

$$n=0,$$

оба неизвѣстныя могутъ оказаться одновременно равными 0 (при условіи, конечно, что буквы a, b, l и m обозначаютъ конечныя числа).

§ 413. **Безконечно большія рѣшенія**. Значенія x и y, удовлетворяющія системѣ 2 линейныхъ уравненій съ 2 неизвѣстными, будутъ безконечно большими при условіи, что въ выраженіяхъ для этихъ неизвѣстныхъ дѣлитель $am-bl$ окажется равнымъ 0, но при этомъ дѣлимыя $cm-bn$ и $an-cl$ не будутъ равны 0; и важно замѣтить, что если изъ неизвѣстныхъ одно окажется безконечно большимъ, то другое конечнымъ быть не можетъ, а будетъ обыкновенно также безконечно большимъ и можетъ оказаться только

еще неопредѣленныхъ, что произойдетъ въ томъ случаѣ, когда въ выраженіи для него дѣлимое окажется также равнымъ 0.

При повѣркѣ такого рѣшенія получаются послѣ подстановки равенства

$$\infty - \infty = c$$

и

$$\infty - \infty = m,$$

которыя по причинамъ, изложеннымъ, между прочимъ, въ § 367, нельзя считать неправильными.

Если въ частности выраженіе $am - bl$ сдѣлается равнымъ 0 вслѣдствіе того, что окажутся

$$a = 0$$

и

$$b = 0,$$

но при этомъ не равными 0 величины c, l и m, другими словами, если будетъ дана система уравненій

$$\begin{cases} 0 \,.\, x + 0 \,.\, y = c \\ lx + my = n, \end{cases}$$

гдѣ и n еще могло бы равняться 0, то ясно, что и такая система можетъ считаться допускающею рѣшеніе не иначе, какъ при помощи понятія о безконечности.

При нежеланіи же разсматривать безконечно большіе корни уравненій какъ рѣшенія ихъ, систему уравненій

$$\begin{cases} ax + by = c \\ lx + my = n \end{cases}$$

можно считать не допускающею при условіи, что

$$am - bl = 0,$$

рѣшенія.

§ 414. **Противорѣчащія другъ другу уравненія.** Выраженіе $am - bl$ можетъ въ частности оказаться равнымъ 0 вслѣдствіе того, что окажутся

$$a = l$$

и

$$b = m.$$

Если при этомъ будетъ

$$c \neq n,$$

то мы будемъ имѣть дѣло съ системою вида

$$\begin{cases} ax+by=c \\ ax+by=n, \end{cases}$$

въ уравненіяхъ которой лѣвыя части тождественны и потому равны другъ другу, какія бы конечныя числа ни обозначались буквами x и y, правыя же части между собою не равны. Такія уравненія, конечно, одними и тѣми же конечными значеніями неизвѣстныхъ удовлетворены быть не могутъ и называются потому **противорѣчащими другъ другу**. Но если мы въ общихъ формулахъ для x и y положимъ

$$a=l$$

и

$$b=m,$$

то получимъ

$$x=\infty$$

и

$$y=\infty.$$

Съ системами уравненій разсматриваемаго здѣсь вида приходится имѣть дѣло въ аналитической геометріи, и тамъ приведенное безконечное рѣшеніе имѣетъ нѣкоторый вполнѣ опредѣленный и ясный смыслъ. Потому и принято систему названныхъ безконечныхъ корней называть рѣшеніемъ разсматриваемой системы уравненій, при чемъ должно считать

$$\begin{aligned} x &= \pm\infty \\ y &= \mp\infty, \end{aligned}$$

если коэффиціенты a и b имѣютъ одинаковые знаки, и

$$\begin{aligned} x &= \pm\infty \\ y &= \pm\infty, \end{aligned}$$

если у этихъ коэффиціентовъ знаки противоположные; ибо только въ томъ случаѣ можетъ быть рѣчь о томъ, что уравненія удовлетворяются названными корнями, если послѣ подстановки ихъ въ эти уравненія получаются равенства

$$\begin{aligned} \infty-\infty &= c \\ \infty-\infty &= n, \end{aligned}$$

которыя не могутъ быть названы несправедливыми.

§ 415. **Неопредѣленныя рѣшенія.** Если кромѣ дѣлителя $am-bl$ въ выраженіи для x станетъ равнымъ 0 также дѣлимое $cm-bn$, то значеніе этого

неизвѣстнаго сдѣлается неопредѣленнымъ. Но если названныя двѣ разности равны обѣ 0, то должно быть

$$bl=am$$
$$bn=cm$$

Раздѣливъ же эти равенства другъ на друга и умноживъ затѣмъ обѣ части полученнаго такимъ образомъ равенства на nc, мы (по теоремѣ VII) узнаемъ, что при названныхъ условіяхъ должно быть:

$$\frac{l}{n}=\frac{a}{c}$$

и, слѣдовательно,

$$cl=an,$$

а потому

$$an-cl=0.$$

А изъ этого слѣдуетъ, что если окажется вслѣдствіе указанныхъ выше причинъ x неопредѣленнымъ, то должно быть неопредѣленнымъ и y.

Изъ уравненій же

$$an=cl$$

и

$$bn=cm$$

мы находимъ

$$a=\frac{cl}{n}$$

и

$$b=\frac{cm}{n},$$

а подставивъ эти выраженія вмѣсто a и b въ первое уравненіе системы, мы получаемъ:

$$\frac{cl}{n}\cdot x+\frac{cm}{n}\cdot y=c$$

При условіи, что c не равно 0 [см. правило Б въ § 373] мы это уравненіе можемъ раздѣлить на c и послѣ этого находимъ:

$$\frac{l}{n}x+\frac{m}{n}y=1.$$

а изъ этого уравненія чрезъ умноженіе его на n

$$lx+my=n,$$

то есть второе уравненіе системы.

Такъ мы убѣждаемся, что при названныхъ выше условіяхъ второе уравненіе системы слѣдуетъ изъ перваго и равносильно ему и потому не выражаетъ новаго условія относительно неизвѣстныхъ, и что вслѣдствіе этого, какъ это разъяснено было въ § 395, система уравненій не можетъ быть опредѣленною, если

$$am-bl=0$$

и

$$cm-bn=0$$

или же окажется, что

$$am-bl=0$$

и

$$an-cl=0$$

Если же все при тѣхъ же условіяхъ будетъ еще

$$c=0.$$

то уравненіе

$$\frac{cl}{n}\cdot x+\frac{cm}{n}\cdot y=c$$

нельзя будетъ раздѣлить на c [по правилу Б въ § 373]. Но оно въ томъ случаѣ, когда $c=0$, есть тождество, слѣдовательно, удовлетворяется, какъ всякое вообще тождество, любыми значеніями встрѣчающихся въ немъ буквъ и потому въ системѣ дѣлается вполнѣ лишнимъ, какъ вообще въ системахъ уравненій тождества не имѣютъ смысла.

Важно въ заключеніе замѣтить, что въ разсмотрѣнныхъ здѣсь случаяхъ неопредѣленности рѣшенія мы въ системѣ не имѣли двухъ независимыхъ другъ отъ друга уравненій, а имѣли или два уравненія, изъ которыхъ одно могло быть выведено изъ другого, или въ сущности одно только уравненіе.

§ 416. **Случай, когда $b=m=0$.** Особаго вниманія заслуживаетъ случай, когда дѣлимое и дѣлитель выраженій для x и y дѣлаются равными 0 вслѣдствіе того, что становятся соотвѣтственно

$$b=m=0$$

или

$$a=l=0.$$

Такъ какъ эти случаи вполнѣ аналогичны другъ другу, то достаточно разсмотрѣть изъ нихъ только одинъ, напр., первый.

При названномъ условіи, что

$$b=m=0,$$

изъ равенствъ

$$am-bl=0$$

и

$$cm-bn=0$$

на основаніи правила Б въ § 373 нельзя заключать, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, что и

$$an-cl=0,$$

хотя случайно и послѣдняя разность можетъ оказаться равною 0, каковой случай мы разсмотримъ въ концѣ этого параграфа.

Если же будетъ

$$an-cl\neq 0,$$

то при упомянутомъ выше условіи будутъ

$$x=\frac{0}{0},$$

а неизвѣстное y равнымъ $+\infty$ или $-\infty$.

Разсматриваемый случай системы 2 линейныхъ уравненій 1-ой степени съ 2 неизвѣстными встрѣчается также въ аналитической геометріи и приведенные символы для значеній неизвѣстныхъ тамъ имѣютъ совершенно ясный и опредѣленный смыслъ. Называя ихъ на этомъ основаніи рѣшеніемъ этой системы, равно какъ и вообще безконечно большія и неопредѣленныя значенія неизвѣстныхъ рѣшеніями системъ уравненій, мы достигаемъ еще того, что за выраженіями для неизвѣстныхъ такимъ образомъ сохраняется характеръ рѣшенія во всѣхъ безъ исключенія мыслимыхъ и особыхъ случаяхъ, изъ которыхъ часть уже разсмотрѣна, а остальные также будутъ изслѣдованы въ этой главѣ

Въ разсматриваемомъ случаѣ, когда

$$b=m=0,$$

наша система превращается въ такую:

$$\begin{cases} ax+0\,.\,y=c \\ lx+0\,.\,y=n. \end{cases}$$

Подставляя въ уравненія, составляющія ее, значенія

$$x=\frac{0}{0}$$

и

$$y=\pm\infty,$$

мы въ лѣвой части каждаго изъ этихъ уравненій получимъ сумму или разность двухъ неопредѣленныхъ выраженій, относительно которыхъ нельзя считать неправильнымъ допущеніе, что онѣ могутъ равняться и c и n. И это допущеніе даже необходимо, если мы приведенныя значенія неизвѣстныхъ желаемъ считать рѣшеніемъ системы.

Если въ системѣ, которой изслѣдованіе мы производимъ, будутъ и

$$b-m=0$$

и кромѣ того

$$an-cl=0,$$

слѣдовательно, какъ легко убѣдиться,

$$\frac{l}{a}=\frac{n}{c},$$

то достаточно первое уравненіе умножить на это послѣднее равенство, чтобы получить второе уравненіе и такимъ образомъ убѣдиться, что второе уравненіе слѣдуетъ изъ перваго и равносильно ему и что потому система, какъ это разъяснено было уже въ предыдущемъ параграфѣ, должна быть неопредѣленной.

Что же касается значеній неизвѣстныхъ въ этомъ случаѣ, то они выражаются символами

$$x=\frac{0}{0}$$

$$y=\frac{0}{0},$$

что вполнѣ соотвѣтствуетъ неопредѣленности системы. Такъ какъ уравненія ея равносильны другъ другу, то для вычисленія системы корней, удовлетворяющихъ имъ, достаточно котораго-нибудь одного изъ нихъ. А такъ

какъ это одно уравненіе содержитъ два неизвѣстныхъ, то оно неопредѣленно (§ 393) и системы корней, которыми оно удовлетворяется должно вычислять, придавая одному неизвѣстному произвольныя значенія и находя соотвѣтствующія значенія другого. Если придавать произвольныя значенія неизвѣстному x, то соотвѣтствующія имъ значенія y нужно будетъ вычислять по формулѣ

$$y=\frac{c-ax}{0}$$

Изъ нея же видно, что какія бы значенія мы для x ни избирали, y будетъ безконечно велико, и только въ случаѣ, когда мы возьмемъ

$$x=\frac{c}{a}$$

y выразится символомъ $\frac{0}{0}$, то есть, будетъ неопредѣленнымъ. А это соотвѣтствуетъ тому, что если мы будемъ придавать неизвѣстному y произвольныя значенія, то, какое бы конечное число мы для него ни избрали, всегда будетъ

$$x=\frac{c}{a}.$$

При нежеланіи же считать неопредѣленные и безконечно большіе корни рѣшеніями уравненій, мы должны разсуждать такъ: въ системѣ

$$\begin{cases} ax+0\cdot y=c \\ lx+0\cdot y=n \end{cases}$$

неизвѣстное y вслѣдствіе умноженія на 0, будучи конечнымъ, исчезаетъ, и система представляетъ собою два уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, которыя въ общемъ будутъ несовмѣстны, совмѣстны же лишь при условіи, что случайно окажется

$$\frac{c}{a}=\frac{n}{l},$$

что произойдетъ въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ, когда

$$an-cl=0.$$

§ 417. **Случай, когда $c=n=0$.** Въ названномъ случаѣ система уравненій принимаетъ видъ:

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ lx+my=0. \end{cases}$$

И изъ общихъ формулъ для неизвѣстныхъ и путемъ непосредственнаго рѣшенія этой системы легко найти, что она удовлетворяется системою корней

$$x=0$$
$$y=0,$$

если будетъ

$$am-bl\neq 0$$

Если же окажется, что

$$am-bl=0,$$

слѣдовательно,

$$\frac{l}{a}=\frac{m}{b},$$

то рѣшеніе будетъ

$$x=\frac{0}{0}$$
$$y=\frac{0}{0},$$

то есть, система неопредѣленною; и не трудно убѣдиться, что въ этомъ случаѣ уравненія зависятъ другъ отъ друга и, напр., второе можетъ быть получено изъ перваго чрезъ умноженіе на равенство

$$\frac{l}{a}=\frac{m}{b}.$$

§ 418. **Дальнѣйшіе случаи неопредѣленныхъ и безконечныхъ рѣшеній.** Въ послѣднихъ параграфахъ мы видѣли, что дѣлимыя и дѣлитель выраженій для x и y могли превращаться въ 0 также вслѣдствіе того, что нѣкоторыя изъ данныхъ величинъ дѣлались равными 0. Возможны еще и другіе такіе же случаи кромѣ разсмотрѣнныхъ. Тамъ, напр., рѣшенія системъ

$$\begin{cases} ax+0\,.\,y=0 \\ lx+0\,.\,y=0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 0\,.\,x+0\,.\,y=0 \\ lx+my=0 \end{cases}$$

гласятъ для той и для другой:

$$x=\frac{0}{0}$$
$$y=\frac{0}{0},$$

то есть, и эти двѣ системы неопредѣленны. Причины же и ихъ неопредѣленности могутъ быть выяснены такими же разсужденіями, какими мы ее дѣлали понятною въ случаяхъ, разсмотрѣнныхъ въ предыдущихъ параграфахъ.

Равнымъ образомъ мы, разсуждая такъ же, какъ тамъ, можемъ выяснить, что система

$$\begin{cases} 0 \,.\, x+0 \,.\, y=c \\ 0 \,.\, x+0 \,.\, y=n \end{cases}$$

допускаетъ рѣшенія только при помощи понятія о безконечности. Если же въ ней въ частности будутъ

$$c=n=0,$$

то и она дѣлается неопредѣленною, притомъ по той очевидной причинѣ, что она въ сущности представляетъ собою не систему уравненій, а есть написанное два раза одно и то же тождество.

Этимъ мы можемъ считать законченнымъ изслѣдованіе системы 2 уравненій 1-ой степени съ 2 неизвѣстными, такъ какъ случаевъ, существенно отличающихся отъ разсмотрѣнныхъ уже болѣе нѣтъ.

§ 419. **Выводы**. Изъ произведеннаго нами въ этой главѣ изслѣдованія мы видимъ, что введя понятія о неопредѣленныхъ и безконечныхъ рѣшеніяхъ, мы можемъ считать допускающею рѣшеніе всякую систему 2 уравненій 1-ой степени съ 2 неизвѣстными, даже такую, въ которой подъ видомъ уравненій даны одно или два тождества, или такую, въ которой, если признавать за рѣшенія только конечные опредѣленные корни, уравненія должны быть названы противорѣчащими другъ другу (см. § 414) или же невозможными (см. конецъ § 413 и § 418).

Весьма важнымъ результатомъ изслѣдованія должно признать выводъ, что только, когда уравненія системы оказывались зависящими одно отъ другого, или когда они оба или одно изъ нихъ оказывались вовсе не уравненіями, а тождествами, рѣшеніе дѣлалось неопредѣленнымъ, т. е., получалось безконечное число рѣшеній, и, слѣдовательно, система уравненій была неопредѣленною.

Но всѣ эти случаи получались только при особыхъ условіяхъ. Чтобы указать на ихъ возможность и на то, что безконечныя и неопредѣленныя рѣшенія иногда не считаются рѣшеніями системы уравненій, прибавимъ въ формулируемомъ ниже результатѣ изслѣдованія слова «въ общемъ» и выразимъ его такъ:

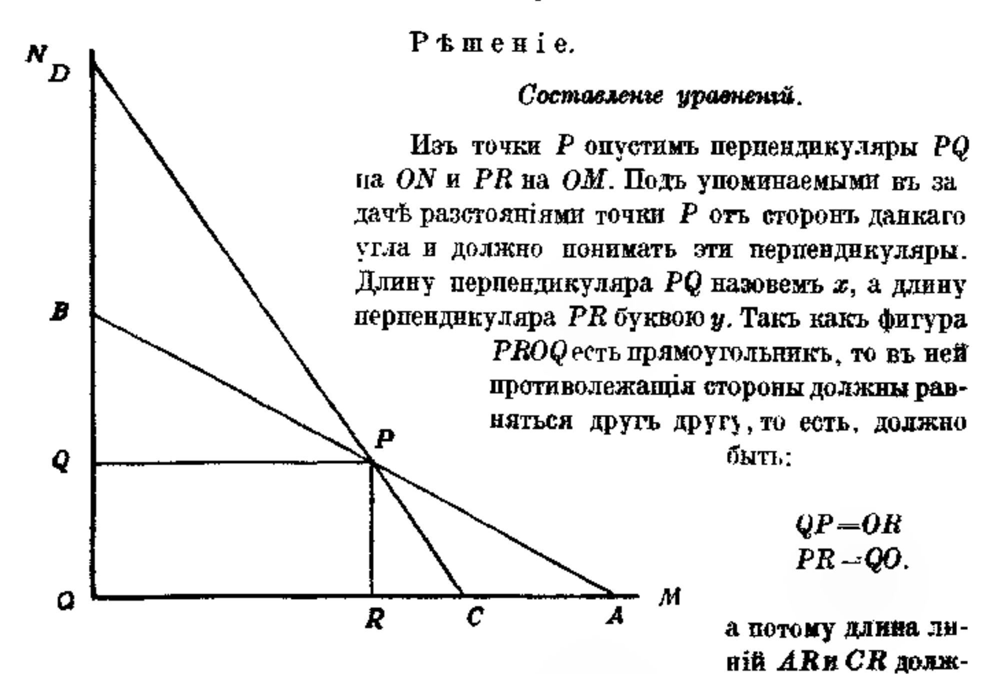
Теорема. *Въ общемъ система 2 независимыхъ другъ отъ друга уравненій 1-ой степени съ 2 неизвѣстными есть система опредѣленная.*

Для рѣшенія же задачъ при помощи уравненій мы изъ полученнаго изслѣдованіемъ результата должны вывести правило, что если въ уравненіи, выражающемъ условіе задачи, встрѣчается 2 неизвѣстныхъ, то должно составить еще уравненіе, содержащее эти неизвѣстныя, и притомъ такое которое выражало бы не то же условіе въ иной формѣ, а другое, такъ какъ въ противномъ случаѣ оба составленныя уравненія не могутъ оказаться независимыми другъ отъ друга.

§ 420. **Примѣръ изслѣдованія рѣшенія задачи** Изслѣдованіе того, какъ должно толковать рѣшеніе системы уравненій по отношенію къ рѣшенію задачи, условія которой ими выражены, покажемъ на слѣдующемъ примѣрѣ

Задача.

Стороны даннаго прямого угла MON пересѣкаются одною прямою въ точкахъ A и B, отстоящихъ отъ вершины на разстояніяхъ a и b*), другою прямою въ точкахъ C и D, отстоящихъ отъ вершины на разстояніяхъ c и d*) Найти: 1) на какихъ разстояніяхъ отъ сторонъ даннаго угла находится точка пересѣченія P этихъ двухъ прямыхъ; 2) выяснить, какой смыслъ имѣютъ безконечное и неопредѣленное рѣшенія.



Рѣшеніе.

Составленіе уравненій.

Изъ точки P опустимъ перпендикуляры PQ на ON и PR на OM. Подъ упоминаемыми въ задачѣ разстояніями точки P отъ сторонъ даннаго угла и должно понимать эти перпендикуляры. Длину перпендикуляра PQ назовемъ x, а длину перпендикуляра PR буквою y. Такъ какъ фигура $PROQ$ есть прямоугольникъ, то въ ней противолежащія стороны должны равняться другъ другу, то есть, должно быть:

$$QP = OR$$
$$PR = QO.$$

а потому длина линій AR и CR должна выражаться соотвѣтственно формулами $a-x$ и $c-x$.

По геометрической теоремѣ, упоминавшейся уже въ задачѣ 2 въ § 399,

*) Какъ понимать такое обозначеніе разстояній, разъяснено въ примѣчаніи къ задачѣ, разсматриваемой въ § 391.

должно быть, такъ какъ линіи PR и ON параллельны другъ другу,

$$\frac{a-x}{a}=\frac{y}{b} \quad \ldots \quad (I)$$

и

$$\frac{c-x}{c}=\frac{y}{d} \quad \ldots \quad (II)$$

Системою этихъ двухъ уравненій должно считать неизвѣстныя величины x и y вполнѣ опредѣленными.

Рѣшеніе системы.

При рѣшеніи системы уравненій I и II удобнѣе всего исключить неизвѣстное y, раздѣливъ эти уравненія другъ на друга.

Такъ получается

$$\frac{c(a-x)}{a(c-x)}=\frac{d}{b},$$

а отсюда въ обычномъ порядкѣ

$$bc(a-x)=ad(c-x)$$
$$abc-bcx=acd-adx$$
$$adx-bcx=acd-abc$$
$$(ad-bc)x=ac(d-b)$$
$$x=\frac{ac(d-b)}{ad-bc}.$$

Неизвѣстное x удобнѣе всего исключить, перенеся въ уравненіяхъ I и II дѣлителей изъ лѣвой части въ правую и вычтя послѣ этого уравненія одно изъ другого.

Такъ мы находимъ:

$$a-x=\frac{ay}{b}$$
$$c-x=\frac{cy}{d}$$
$$\overline{a-c=\frac{ad-bc}{bd}\,y},$$

а отсюда

$$y=\frac{bd(a-c)}{ad-bc}$$

Полученныя для x и y выраженія и составляютъ общее рѣшеніе и *отвѣтъ на 1-ый вопросъ задачи* Отвѣтъ же на 2-ой вопросъ дается въ п. п. 2 и 3 изслѣдованія

Изслѣдованіе.

1) *Конечныя опредѣленныя рѣшенія.*

Легко видно, что выраженія для x и y могутъ быть и положительными, и отрицательными, и равными 0.

Если оба эти выраженія окажутся положительными, то точка P лежитъ между сторонами угла MON.

Если окажутся

$$x<0$$
$$y>0,$$

то точка P лежитъ въ лѣвомъ смежномъ съ MON углѣ.

Если окажутся

$$x<0$$
$$y<0,$$

то точка P лежитъ въ углѣ, вертикальномъ съ угломъ MON

Если, наконецъ, окажутся

$$x>0$$
$$y<0.$$

то точка P лежитъ въ нижнемъ смежномъ съ MON углѣ

Если выраженіе для x окажется равнымъ 0, то P лежитъ на сторонѣ ON угла MON или на ея продолженіи за вершину 0, смотря по тому, будетъ ли при этомъ $y>0$ или $y<0$.

Если же выраженіе для y будетъ равнымъ 0, то P лежитъ на сторонѣ OM угла MON или на ея продолженіи за вершину O, смотря по знаку неизвѣстнаго x.

Наконецъ, если оба эти выраженія окажутся равными 0, то этимъ будетъ указано, что прямыя AB и CD пересѣкаются въ вершинѣ 0.

2) *Безконечное рѣшеніе.*

Значенія для x и y дѣлаются безконечно большими въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$ad-bc=0,$$

если при этомъ, однако, ни одна изъ величинъ a, b, c и d не будетъ равною 0, такъ какъ въ противномъ случаѣ, какъ легко видно, оба неизвѣстныя

дѣлаются неопредѣленными. Но приведенное равенство можетъ быть удовлетворено только, если

$$ad=bc$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

Въ геометріи же доказывается, что если двѣ прямыя отсѣкаютъ отъ сторонъ угла части, между длиною которыхъ существуетъ выражаемая послѣднимъ равенствомъ зависимость, то эти двѣ прямыя параллельны, и что, наоборотъ, параллельныя прямыя отсѣкаютъ отъ сторомъ угла части названнаго свойства *). Такъ оказывается, что разстояніе точки пересѣченія прямыхъ AB и CD отъ сторонъ угла MON будетъ безконечно велико всякій разъ, когда эти прямыя будутъ параллельны между собою. А смыслъ этого отвѣта тотъ, что чѣмъ болѣе положеніе прямыхъ AB и CD приближается къ параллельному, тѣмъ дальше отъ сторонъ даннаго прямого угла уходитъ точка P, и что она такимъ образомъ можетъ удаляться безпредѣльно, пока, наконецъ, не наступитъ моментъ, когда прямыя сдѣлаются параллельными, и у нихъ уже точки пересѣченія не будетъ**)

3) *Неопредѣленныя рѣшенія*

Значеніе для y приметъ видъ $\frac{0}{0}$, если $ad=bc$ и притомъ или $a=c$ или $b=0$, или $d=0$, а также, если $a=c=0$.

а) Если

$$ad=bc$$

и

$$a=c,$$

то мы, раздѣливъ первое равенство на второе, убѣждаемся, что въ этомъ случаѣ также

$$b=d.$$

А изъ этого слѣдуетъ, что при названныхъ условіяхъ и x принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$

*) Геометрическія теоремы, на которыя мы ссылаемся, гласятъ: Прямыя, отсѣкающія отъ сторонъ угла пропорціональныя части, параллельны между собою; и наоборотъ: параллельныя прямыя отсѣкаютъ отъ сторонъ угла пропорціональныя части.

**) Мы прибавляемъ послѣднія слова, чтобы удовлетворить опредѣленію параллельныхъ линій, хотя момента, когда у прямыхъ перестаетъ существовать точка пересѣченія, нельзя себѣ представить, такъ какъ мы прямыя представляемъ себѣ безконечными. Этимъ отвѣтомъ очень наглядно еще разъ поясняется смыслъ безконечности въ томъ двоякомъ пониманіи ея, о которомъ говорилось въ § 117.

Выражается же приведенными равенствами случай, когда прямыя AB и CD совпадають, а неопредѣленность значенiй для неизвѣстныхъ соотвѣтствуеть тому, что одной опредѣленной точки пересѣченiя у этихъ прямыхъ нѣтъ, а каждая точка одной изъ нихъ есть также точка другой.

б) Если

$$ad=bc$$

и

$$b=0.$$

то и

$$ad=0$$

Но произведенiе ad можетъ быть равнымъ 0 только [45*], если

$$a=0$$

или

$$d=0.$$

Разсмотримъ сперва первый изъ этихъ случаевъ

Значенiе для x и теперь оказывается неопредѣленнымъ. Условiями же $a=0$ и $b=0$ указывается, что мы теперь имѣемъ дѣло со случаемъ, когда точки A, B и O сливаются, слѣдовательно, прямая AB проходитъ чрезъ точку 0. Такъ какъ положенiе ея теперь дѣлается неопредѣленнымъ, то понятно что вмѣстѣ съ тѣмъ должно сдѣлаться неопредѣленнымъ и положенiе точки P

Разсмотримъ теперь случай, когда $d=0$.

При этомъ и названномъ выше условiи $ad=bc$ уже выраженiе $\frac{d(a-c)}{ad-bc}$ есть выраженiе неопредѣленное, которое въ общемъ не означаетъ ∞. Потому формула $\frac{bd(a-c)}{ad-bc}$, выражающая значенiе для y, при упомянутомъ еще въ этомъ же пунктѣ условiи $b=0$ превращается въ выраженiе $0\cdot\frac{0}{0}$, которое должно означать 0. Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ рѣшенiе системы

$$x=0$$

$$y=\frac{0}{0}.$$

указывающее на то, что если прямыя AB и CD совпадаютъ со стороною OM даннаго угла, то каждая точка одной прямой есть также точка другой и лежать эти точки на сторонѣ OM.

в) Если

$$ad=bc$$

и

$$d=0,$$

то и

$$bc=0.$$

Но произведеніе bc можетъ равняться 0 только, если

$$b=0$$

или

$$c=0$$

Первый изъ этихъ случаевъ есть тотъ же, который мы только-что разсмотрѣли. Второй же даетъ рѣшеніе системы

$$x=\frac{0}{0}$$

$$y=\frac{0}{0}$$

и есть случай, когда точки C, D и O сливаются, слѣдовательно, прямая CD проходитъ чрезъ вершину угла O. Теперь положеніе точки P дѣлается неопредѣленнымъ потому, что положеніе прямой CD дѣлается неопредѣленнымъ

г) Если, наконецъ,

$$a=c=0,$$

то также, какъ въ предыдущихъ случаяхъ, мы находимъ рѣшеніе системы

$$x=0$$

$$y=\frac{0}{0},$$

имѣющее тотъ смыслъ, что если прямыя AB и CD совпадаютъ со стороною ON даннаго угла, то каждая точка одной прямой есть также точка другой и лежатъ эти точки всѣ на сторонѣ ON.

ГЛАВА VII.

Условія опредѣленности и неопредѣленности системъ уравненій и несовмѣстности уравненій системы.

§ 421. **Несовмѣстность нѣсколькихъ независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ.** Значеніе неизвѣстнаго, удовлетворяющаго уравненію, содержащему только одну эту неизвѣстную величину, не можетъ удовлетворять также произвольному другому уравненію

съ тѣмъ же однимъ неизвѣстнымъ. Такъ, напр , значеніе x, удовлетворяющее уравненію

$$2x+1=5.$$

не удовлетворяетъ, какъ показываетъ повѣрка, также уравненію

$$2x+7-5$$

или уравненію

$$3x-1 \quad 2x$$

или уравненію

$$x^3-3 \quad 2x^2+x$$

и т. д

Чтобы убѣдиться въ томъ, что сказанное справедливо *вообще*, положимъ, что нѣсколько линейныхъ уравненій съ 1 неизвѣстнымъ приведены каждое къ ординарному виду, при чемъ получилось:

$$ax=b$$
$$cx=d$$
$$ex=f$$

и т. д.

Рѣшенія этихъ уравненій суть: въ первомъ случаѣ

$$x=\frac{b}{a},$$

во второмъ

$$x=\frac{d}{c},$$

въ третьемъ

$$x=\frac{f}{e}$$

и т. д.

Слѣдовательно, только если случайно окажутся

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{f}{e} \ldots$$

то всѣмъ даннымъ уравненіямъ удовлетворитъ одно и то же значеніе неизвѣстнаго, иначе же нѣтъ.

Но при условіи, что

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{f}{e}=\ldots,$$

изъ любого изъ данныхъ уравненій, приведенныхъ къ ординарному виду, могутъ быть выведены всѣ остальныя, а, слѣдовательно, и вообще изъ любого

изъ данныхъ всѣ другія данныя уравненія. Напр., умноживъ уравненіе

$$ax=b$$

на равенство

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

мы получаемъ

$$bx=\frac{bd}{c},$$

откуда

$$cx=d.$$

Слѣдовательно, при названномъ выше условіи данныя уравненія не независимы другъ отъ друга.

И даже больше того: изъ преобразованій, при помощи которыхъ это выяснилось [теорема 2 въ § 366], видно, что при названномъ условіи данныя уравненія должны быть равносильны другъ другу.

Но при сравненіи опредѣленій равносильности и совмѣстности уравненій [**141** и **151**] легко обнаружить, что вообще

уравненія съ 1 неизвѣстнымъ должны быть совмѣстны, если они равносильны, и наоборотъ.

Результатъ нашихъ разсужденій, остающійся справедливымъ для уравненій всѣхъ степеней и вообще всякихъ уравненій съ 1 неизвѣстнымъ, мы можемъ выразить такъ:

Два и болѣе независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ 1 неизвѣстнымъ несовмѣстны.

§ 422. **Условныя уравненія** Приведенныя въ предыдущемъ параграфѣ уравненія:

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{f}{e}=\ldots,$$

указывающія, при какихъ условіяхъ уравненія

$$ax=b$$
$$cx=d$$
$$ex=f$$

и т. д.,

могутъ быть совмѣстными, называются условными, какъ и вообще во всѣхъ случаяхъ обозначаются тѣмъ же названіемъ уравненія, выражающія условія совмѣстности уравненій данной системы, если ихъ въ ней больше чѣмъ требуется для того, чтобы система была опредѣленною.

Но въ самомъ широкомъ значеніи слова условными называются вообще уравненія, выражающія зависимость между извѣстными величинами, встрѣчаю-

щимися въ системѣ данныхъ уравненіи, слѣдовательно, уравненія. содержащія въ силу названнаго свойства ихъ только эти величины, но не содержащія неизвѣстныхъ

2 уравненія

$$ax = b$$

и

$$cx = d$$

могутъ быть совмѣстными только при условіи, что

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

3 уравненія

$$ax = b$$
$$cx = d$$
$$ex = f$$

могутъ быть совмѣстными только, если

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

и кромѣ того

$$\frac{b}{a} = \frac{f}{e}$$

(равенство

$$\frac{d}{c} = \frac{f}{e}$$

есть слѣдствіе изъ послѣднихъ двухъ и потому не составляетъ новаго условія).

Изъ этого мы видимъ, что 3 уравненія съ 1 неизвѣстнымъ могутъ быть совмѣстными только. если выполнены 2 условія, выраженныя условными уравненіями

Продолжая разсуждать такимъ же образомъ, мы найдемъ, что совмѣстность 4, 5, 6 и т. д. уравненій съ 1 неизвѣстнымъ будетъ достигнута только въ томъ случаѣ, если будутъ удовлетворены соотвѣтственно 3, 4, 5 и т. д. условныхъ уравненій между встрѣчающимися въ данныхъ уравненіяхъ извѣстными величинами, то есть, что вообще

n уравненій съ 1 неизвѣстнымъ могутъ быть совмѣстными только въ томъ случаѣ, если удовлетворены (n − 1) условныхъ уравненій.

§ 423. **Несовмѣстность трехъ и болѣе независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ 2 неизвѣстными.** Въ § 393 была доказана неопредѣленность одного уравненія съ двумя неизвѣстными, а затѣмъ въ §§ 394 и 419 было разъяснено и установлено, что при предъявленіи къ 2 неизвѣстнымъ

требованій, выраженныхъ 2 независимыми другъ отъ друга уравненіями, задача дѣлается опредѣленною. Если же отъ 2 неизвѣстныхъ будетъ потребовано, чтобы они удовлетворяли 3 независимымъ другъ отъ друга уравненіямъ, то задача уже будетъ переопредѣлена, то есть, не найдется такой системы корней, которая бы удовлетворяла всѣмъ 3 даннымъ уравненіямъ. Напр., системѣ уравненій

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+3y=26 \end{cases}$$

удовлетворяетъ система корней

$$\begin{cases} x=7 \\ y=4, \end{cases}$$

но она не можетъ въ то же время удовлетворить еще любому третьему уравненію, содержащему только тѣ же 2 неизвѣстныя x и y, напр., уравненію

$$x+y=7\frac{1}{2}$$

или уравненію

$$x^2-2y=5.$$

Если перейти къ общему виду уравненій, то мы видимъ то же самое, а именно, что система корней, удовлетворяющая системѣ уравненій (см. § 407).

$$\begin{cases} ax+by=c \\ lx+my=n, \end{cases}$$

не можетъ удовлетворять также еще уравненію

$$dx+ey=f.$$

и только, если случайно окажется, что

$$d\cdot\frac{cm-bn}{am-bl}+e\cdot\frac{an-cl}{am-bl}=f.$$

то названныя 3 уравненія будутъ совмѣстными.

Если же потребуется, что бы тѣ же значенія неизвѣстныхъ x и y удовлетворяли еще уравненію

$$px+qy=r.$$

то это станетъ возможнымъ только, если случайно еще окажется, что

$$p\cdot\frac{cm-bn}{am-bl}+q\cdot\frac{an-cl}{am-bl}=r.$$

И такъ же легко путемъ подстановки найти всякій разъ условіе, при которомъ наша система корней удовлетворитъ алгебраическому уравненію какой угодно степени и вообще какому угодно уравненію, содержащему тѣ же неизвѣстныя.

Продолжая разсуждать такъ же, мы убѣждаемся, что 5, 6, 7 и т. д. уравненій съ 2 неизвѣстными могутъ быть совмѣстными только въ томъ случаѣ, если будутъ удовлетворены соотвѣтственно 3, 4, 5 и т. д. условныхъ уравненій, и приходимъ въ концѣ концовъ къ слѣдующимъ двумъ заключеніямъ, изъ которыхъ первое справедливо и для уравненій высшихъ степеней:

1) *Три и болѣе независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ двумя неизвѣстными не могутъ быть совмѣстными.*

2) *Для того, чтобы n линейныхъ уравненій съ 2 неизвѣстными были совмѣстными, необходима такая зависимость между этими уравненіями, чтобы встрѣчающіяся въ нихъ извѣстныя величины удовлетворяли $(n-2)$ условнымъ уравненіямъ.*

Несовмѣстность системы, происходящую отъ того, что дано слишкомъ много независимыхъ другъ отъ друга уравненій, нѣкоторые иностранные математики характеризуютъ особымъ очень мѣткимъ обозначеніемъ: они такого рода несовмѣстныя системы называютъ переопредѣленными*).

§ 424. **Признакъ зависимости двухъ уравненій другъ отъ друга.** Зависимость двухъ уравненій другъ отъ друга обнаруживается всегда при исключеніи изъ нихъ одного изъ встрѣчающихся въ нихъ неизвѣстныхъ, такъ какъ въ случаѣ такой зависимости послѣ названнаго исключенія *всегда получается тождество.* Въ этомъ легко убѣдиться на любомъ примѣрѣ, и доказывается это слѣдующимъ разсужденіемъ.

Такъ какъ всѣ разсмотрѣнные способы исключенія неизвѣстнаго, какъ это разъяснено было въ § 410, сводятся къ одному, то достаточно разсмотрѣть вопросъ по отношенію къ исключенію неизвѣстнаго способомъ подстановки. Какъ извѣстно, мы должны рѣшить одно изъ двухъ уравненій относительно того неизвѣстнаго, которое должно быть исключено, и подставить полученное такимъ образомъ для этого неизвѣстнаго выраженіе въ другое уравненіе, тогда неизвѣстное и будетъ исключено. Если бы мы это выраженіе подставили въ первое изъ названныхъ уравненій, то, какъ вообще при подстановкѣ рѣшенія уравненія въ это уравненіе, мы и въ этомъ случаѣ получили бы тождество. Въ случаѣ зависимости обоихъ уравненій другъ отъ друга мы тѣ же преобразованія, при помощи которыхъ второе уравненіе можетъ быть выведено изъ перваго, можемъ повторить и послѣ подстановки въ него названнаго выраженія и получили бы такимъ образомъ тотъ же результатъ, который получается послѣ первой изъ упомянутыхъ подстановокъ. Но при преобразованіи тождества по правиламъ, изложеннымъ

*) Нельзя не признать такое названіе болѣе логичнымъ и не согласиться, что лучше только уравненія называть несовмѣстными, а не системы.

въ §§ 357—377, всегда опять получается тождество. Слѣдовательно, и равенство, которое получится, если мы изъ двухъ зависимыхъ другъ отъ друга уравненій исключимъ одно неизвѣстное, должно быть тождествомъ.

И наоборотъ, если по исключеніи изъ двухъ уравненій одного неизвѣстнаго получится тождество, то эти уравненія должны зависѣть другъ отъ друга.

Ибо и въ самомъ дѣлѣ, если въ обоихъ уравненіяхъ только и есть 2 неизвѣстныхъ, то въ случаѣ независимости уравненій другъ отъ друга система должна быть, какъ это было указано въ § 394 и подробно разъяснено для уравненій первой степени въ IV главѣ этой части книги, опредѣленною, а полученіе тождества по исключеніи одного неизвѣстнаго указывало бы на неопредѣленность рѣшенія, а, слѣдовательно, и системы (ср. п. 5 въ § 380); а если въ обоихъ уравненіяхъ неизвѣстныхъ больше двухъ, то въ случаѣ зависимости ихъ другъ отъ друга всякій разъ, когда мы для всѣхъ ихъ кромѣ исключаемаго неизвѣстнаго и еще одного возьмемъ произвольныя значенія, получится опредѣленная система, которая по этой причинѣ не можетъ дать тождества по исключеніи неизвѣстнаго.

Изъ всего же изложеннаго мы должны заключить, что *полученіе тождества при исключеніи неизвѣстнаго изъ двухъ уравненій есть признакъ ихъ зависимости другъ отъ друга* (если подъ видомъ уравненій не даны тождества).

Примѣры.

1) Чтобы исключить x изъ уравненій

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ x^2-6xy=(4+3y)(4-3y), \end{cases}$$

рѣшимъ первое изъ нихъ относительно x и подставимъ получающееся для этого неизвѣстнаго выраженіе во второе уравненіе. Такъ мы находимъ:

$$x=3y+4$$
$$(3y+4)^2-6(3y+4)y=(4+3y)(4-3y).$$

Раскрывъ въ послѣднемъ уравненіи скобки и сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, мы получаемъ тождество:

$$16-9y^2=16-9y^2.$$

Изъ этого мы заключаемъ, что уравненія, изъ которыхъ мы исключили x, должны зависѣть другъ отъ друга. И въ самомъ дѣлѣ, если мы первое изъ данныхъ уравненій возвысимъ въ квадратъ, затѣмъ перенесемъ членъ $9y^2$ изъ лѣвой части въ правую и, наконецъ, въ правой части разложимъ $16-9y^2$ на сомножителей, то и получимъ второе изъ данныхъ уравненій.

2) Если мы изъ уравненій

$$\frac{3x-5y+z}{2}=6-u$$

$$9x-15y=4\left(9-\frac{3}{4}z-1\frac{1}{2}u\right)$$

исключимъ которымъ-либо изъ способовъ любое изъ неизвѣстныхъ, то также получится тождество

И тутъ легко убѣдиться, что уравненія зависятъ другъ отъ друга и что, напр., второе можетъ быть получено изъ перваго, если это первое уравненіе умножимъ на 6, затѣмъ перенесемъ членъ $3z$ въ правую часть и т. д.

§ 425. Число независимыхъ другъ отъ друга уравненій, къ которымъ сводится система совмѣстныхъ уравненій съ 2 неизвѣстными. Способъ составленія упоминаемыхъ въ предыдущемъ параграфѣ условныхъ уравненій указывается непосредственно самою сутью дѣла и уже примѣнялся нами тамъ же. Онъ соотвѣтствуетъ повѣркѣ совмѣстности численныхъ уравненій чрезъ подстановку въ нихъ найденныхъ уже корней и состоитъ въ томъ, что рѣшается система такихъ двухъ изъ данныхъ n уравненій съ двумя неизвѣстными, которыя другъ отъ друга не зависятъ, и полученная система корней подставляется въ остальныя $(n-2)$ уравненій.

И если всѣ полученныя такимъ образомъ $(n-2)$ условныхъ уравненій окажутся или будутъ признаны удовлетворенными, то не трудно убѣдиться, что изъ 2 уравненій системы могутъ быть выведены всѣ остальныя.

Такъ, напр., уравненія

$$ax+by=c$$
$$lx+my=n$$
$$dx+ey=f$$

совмѣстны при условіи, что

$$d\cdot\frac{cm-bn}{am-bl}+e\cdot\frac{an-cl}{am-bl}=f.$$

Предположивъ это условіе удовлетвореннымъ, мы третье изъ названныхъ уравненій можемъ вывести изъ первыхъ двухъ, между прочимъ, слѣдующимъ образомъ:

Умноживъ первое изъ нихъ на $\frac{dm-el}{am-bl}$, а второе на $\frac{ae-bd}{am-bl}$, и сложивъ получившіяся такимъ способомъ уравненія, мы находимъ уравненіе:

$$\frac{a(dm-el)+l(ae-bd)}{am-bl}\cdot x+\frac{b(dm-el)+m(ae-bd)}{am-bl}\cdot y=\frac{c(dm-el)+n(ae-bd)}{am-bl},$$

которое может быть упрощено и еще преобразовано так

$$d\cdot\frac{am-bl}{am-bl}\cdot x+e\cdot\frac{am-bl}{am-bl}\cdot y=\frac{d(cm-bn)+e(an-cl)}{am-bl}$$

$$dx+ey=d\cdot\frac{cm-bn}{am-bl}+e\cdot\frac{an-cl}{am-bl}.$$

А такъ какъ правая часть послѣдняго уравненія, согласно условному уравненію, равна f, то и въ самомъ дѣлѣ оказывается, что уравненіе

$$dx+ey=f$$

вытекаетъ какъ слѣдствіе изъ первыхъ двухъ, если встрѣчающіяся во всѣхъ 3 данныхъ уравненіяхъ извѣстныя величины связаны между собою такъ, какъ это выражается приведеннымъ условнымъ уравненіемъ.

Первое изъ данныхъ уравненій можетъ быть при томъ же условіи выведено изъ второго и третьяго слѣдующимъ образомъ:

Условное уравненіе легко можетъ быть преобразовано (чрезъ уничтоженіе знаменателя и т. д.) въ равносильное ему:

$$a\cdot\frac{fm-en}{dm-el}+b\cdot\frac{dn-fl}{dm-el}=c$$

Пользуясь имъ и сложивъ второе изъ данныхъ уравненій, умноженное на $\frac{bd-ae}{dm-el}$, съ третьимъ, умноженнымъ на $\frac{am-bl}{dm-el}$, мы получимъ первое изъ нихъ совершенно такимъ же способомъ, какимъ выше получили третье.

Наконецъ, такъ же можно было бы, предполагая данное условное уравненіе удовлетвореннымъ, изъ перваго и третьяго изъ данныхъ уравненій вывести второе.

И такъ же можно было бы изъ двухъ уравненій вывести всѣ остальныя, если бы было дано болѣе трехъ совмѣстныхъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

Изъ всего же изложеннаго здѣсь слѣдуетъ, что *для отысканія системы корней, удовлетворяющей нѣкоторой совокупности линейныхъ уравненій съ 2 неизвѣстными, достаточно двухъ изъ этихъ уравненій, но независимыхъ другъ отъ друга.*

Если же окажется, что изъ *одного* уравненія такой совокупности могутъ быть выведены всѣ остальныя, то ясно, что всѣ уравненія такой системы будутъ однозначащими и что она потому будетъ равносильна любому одному изъ нихъ и по этой причинѣ системою неопредѣленною.

§ 426. **Условія неопредѣленности, опредѣленности и переопредѣленности системы уравненій съ 2 неизвѣстными.** Въ виду предстоящаго ниже

обобщенія резюмируемъ здѣсь то, что мы съ подробностью, соотвѣтствующею важности вопроса, разъяснили въ началѣ IV и въ VI главѣ этой части книги и въ этой главѣ. Такъ какъ выясненныя истины остаются справедливыми и для уравненій высшихъ степеней, какъ это отчасти уже должно было быть очевиднымъ, но будетъ еще все болѣе выясняться постепенно, то мы можемъ выводы изъ названныхъ разсужденій нашихъ формулировать, умалчивая о степени уравненій, такъ:

1) Если неизвѣстныхъ 2 и дано только 1 уравненіе, то оно представляетъ собою неопредѣленную систему.

2) Если неизвѣстныхъ 2 и дано 2 независимыхъ другъ отъ друга уравненія, то они представляютъ собою опредѣленную систему (или въ общемъ опредѣленную, какъ мы выразились въ § 419 по причинѣ, тамъ же указанной).

3) Если неизвѣстныхъ 2 и дано болѣе 2 независимыхъ другъ отъ друга уравненій, то они представляютъ собою переопредѣленную систему (или несовмѣстную—см. конецъ § 423).

§ 427. **Неопредѣленность одного и системы двухъ уравненій съ тремя и болѣе неизвѣстными.** Неопредѣленность одного уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными разъяснена была уже въ § 393, неопредѣленность же системы 2 уравненій съ 3 неизвѣстными показана была на примѣрѣ въ § 394. Теперь послѣднюю истину нѣсколько обобщимъ и притомъ докажемъ.

Система двухъ зависящихъ другъ отъ друга уравненій 1-ой степени съ любымъ числомъ неизвѣстныхъ равносильна одному изъ этихъ уравненій. Потому положимъ, что въ системѣ

$$\begin{cases} a_1u+b_1v+c_1w+d_1x+e_1y+\ldots=p_1 \\ a_2u+b_2v+c_2w+d_2x+e_2y+\ldots=p_2. \end{cases}$$

уравненія, въ которыхъ неизвѣстныхъ болѣе чѣмъ 2, независимы другъ отъ друга. Взявъ для всѣхъ этихъ неизвѣстныхъ кромѣ двухъ, напр., x и y, опредѣленныя, но совершенно произвольныя значенія, мы получимъ систему уравненій, содержащихъ только названныя 2 неизвѣстныя. Эта система будетъ въ общемъ опредѣленная, но если бы въ ней уравненія случайно и оказались зависящими одно отъ другого и она въ силу этого и оказалась бы неопредѣленною, то отъ этого результатъ нашего изслѣдованія не измѣнился бы. Количество названныхъ выше произвольныхъ значеній для замѣняемыхъ ими неизвѣстныхъ величинъ безконечно велико. Каждая группа такихъ значеній вмѣстѣ съ соотвѣтствующими значеніями x и y, удовлетворяющими уравненіямъ, содержащимъ только ихъ, составитъ систему корней, удовлетворяющихъ данной системѣ уравненій. Слѣдовательно, послѣдней удовлетворяетъ безконечно большое число системъ корней. А это и значитъ, что она неопредѣленна; и этимъ доказана вообще неопредѣленность системы 2 уравненій съ 3 и болѣе неизвѣстными.

Занявъ точку зрѣнія, указанную въ концѣ § 419, можно полученный результатъ считать относящимся и къ тому случаю, когда оба уравненія системы противорѣчатъ другъ другу.

При рѣшеніи же вопроса, какая точка зрѣнія предпочтительнѣе, не послѣднюю роль должно играть то обстоятельство, что тамъ, гдѣ при рѣшеніи задачъ приходится встрѣчаться съ совокупностями уравненій типа такъ называемыхъ противорѣчащихъ другъ другу, т. е. главнымъ образомъ въ аналитической геометріи, никакого противорѣчія они не означаютъ, а имѣютъ разумный смыслъ опредѣленныхъ особыхъ случаевъ.

§ 428. **Число возможныхъ исключеній неизвѣстнаго въ системѣ.** Въ § 394 была показана на примѣрѣ опредѣленность системы 3 независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ 3 неизвѣстными. Но примѣръ доказательствомъ служить не можетъ, и прежде чѣмъ принять опредѣленность такой системы за общее правило, необходимо изслѣдовать вопросъ глубже и въ общемъ видѣ.

Такъ какъ оказалось [§ 410], что всѣ разсмотрѣнные способы исключенія неизвѣстнаго сводятся къ одному, то которымъ бы изъ нихъ мы ни исключили одно изъ неизвѣстныхъ, напр., x, изъ предполагаемыхъ независимыми другъ отъ друга уравненій системы

$$\begin{cases} a_2x+b_1y+c_1z=p_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=p_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=p_3, \end{cases}$$

всегда должны получиться въ результатѣ одни и тѣ же уравненія, содержащія только оба другія неизвѣстныя.

Для отысканія значеній этихъ неизвѣстныхъ намъ нужно 2 такихъ уравненія. Но какъ вообще всякое изъ неизвѣстныхъ, такъ и x, мы можемъ исключить изъ уравненій разсматриваемой системы три раза: изъ перваго и второго, изъ перваго и третьяго и, наконецъ, изъ второго и третьяго, то есть, могутъ быть получены 3 уравненія съ неизвѣстными y и z. Потому необходимо главнымъ образомъ изслѣдовать, не представляетъ ли совокупность этихъ 3 уравненій переопредѣленной системы [§ 423], и для этого произведемъ всѣ названныя исключенія неизвѣстнаго x;

Умножимъ первое уравненіе системы на a_2, второе на a_1, и вычтемъ первое изъ получающихся при этомъ уравненій изъ второго:

$$\begin{array}{ll} a_1a_2x+a_2b_1y+a_2c_1z=a_2p_1 & \\ \underline{a_1a_2x+a_1b_2y+a_2c_2z=a_1p_2} & \\ (a_1b_2-a_2b_1)y+(a_1c_2-a_2c_1)z=a_1p_2-a_2p_1 & \qquad (I) \end{array}$$

Подобнымъ же образомъ исключимъ x изъ перваго и третьяго уравненій:

$$\begin{array}{ll} a_1a_3x+a_3b_1y+a_3c_1z=a_3p_1 & \\ \underline{a_1a_3x+a_1b_3y+a_1c_3z=a_1p_3} & \\ (a_1b_3-a_3b_1)y+(a_1c_3-a_3c_1)z=a_1p_3-a_3p_1 & \qquad (II). \end{array}$$

Наконецъ, поступимъ аналогичнымъ образомъ со вторымъ и третьимъ уравненіемъ системы:

$$\begin{array}{l} a_2a_3x+a_3b_2y+a_3c_2z=a_3p_2 \\ \underline{a_2a_3x+a_2b_3y+a_2c_3z=a_2p_3} \\ (a_2b_3-a_3b_2)y+(a_2c_3-a_3c_2)z=a_2p_3-a_3p_2 \end{array} \qquad (III)$$

Если мы которое-либо изъ уравненій данной системы рѣшимъ относительно котораго-либо изъ неизвѣстныхъ, слѣдовательно, и неизвѣстнаго x, то это рѣшеніе составитъ уравненіе равносильное рѣшенному уравненію. Потому по теоремѣ **154** первое уравненіе данной системы и уравненія I и II должны составлять систему равносильную данной системѣ. Равнымъ образомъ должна быть равносильна ей система, состоящая изъ второго уравненія данной системы и уравненій I и III, и, наконецъ, также система, состоящая изъ третьяго уравненія данной системы и уравненій II и III. Изъ этого слѣдуетъ, что опредѣлимъ ли мы y и z изъ системы уравненій I и II или изъ системы уравненій I и III или изъ системы уравненій II и III, для этихъ неизвѣстныхъ должны получиться одни и тѣ же значенія, а именно тѣ, которыми, вмѣстѣ съ вычисленнымъ изъ нихъ значеніемъ x, удовлетворяется данная система уравненій. Потому и безразлично, изъ которой изъ перечисленныхъ трехъ системъ 2 уравненій съ 2 неизвѣстными будутъ опредѣлены эти послѣднія. Относительно же системы уравненій I, II и III изъ сказаннаго слѣдуетъ, что она не можетъ быть системою переопредѣленною. Но она при этомъ не можетъ быть и системою неопредѣленною, такъ какъ при независимости уравненій данной системы другъ отъ друга не могутъ зависѣть также другъ отъ друга ни уравненія I и II, ни уравненія I и III, ни уравненія II и III, что, впрочемъ, видно и изъ того, что ни въ одной изъ названныхъ трехъ системъ уравненій при исключеніи котораго-либо изъ неизвѣстныхъ не получается тождества [§ 424].

§ 429. **Условіе опредѣленности системы уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными.** Указывая и здѣсь, какъ въ § 419, добавляемыми словами «въ общемъ» на то, что возможны и безконечныя значенія неизвѣстныхъ въ рѣшеніи системы уравненій и вообще такого рода особые случаи, какіе разсматривались въ VI главѣ этой части книги и которые иногда не признаются за рѣшенія, мы названное выше условіе опредѣленности системы можемъ выразить въ видѣ слѣдующаго предложенія:

157 **Теорема.** В ъ о б щ е м ъ с и с т е м а н е з а в и с и м ы х ъ д р у г ъ о т ъ д р у г а у р а в н е н і й, в ъ к о т о р о й у р а в н е н і й с т о л ь к о ж е, с к о л ь к о н е и з в ѣ с т н ы х ъ, е с т ь с и с т е м а о п р е д ѣ л е н н а я.

Док. Положимъ, что система состоитъ изъ n независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ n неизвѣстными. Представимъ себѣ одно изъ этихъ уравненій рѣшеннымъ относительно котораго-либо изъ неизвѣстныхъ, которое

будемъ называть x, и полученное для него выраженіе подставленнымъ въ остальныя уравненія системы. Такъ мы получили бы $(n-1)$ уравненій съ $(n-1)$ неизвѣстными.

Но такъ какъ каждое изъ уравненій системы могло бы быть уравненіемъ, которое мы представили себѣ рѣшеннымъ относительно x (кромѣ, конечно, тѣхъ уравненій, въ которыхъ бы этого неизвѣстнаго случайно не оказалось), то мы должны себѣ представить въ общемъ возможными описанныхъ выше системъ $(n-1)$ уравненій съ $(n-1)$ неизвѣстными больше одной. Но всѣ онѣ, каждая вмѣстѣ съ уравненіемъ, изъ котораго для нея опредѣлялось подставляемое выраженіе для x, составляютъ по теоремѣ **154** системы равносильныя данной и, слѣдовательно, равносильныя между собою [§ 428]. Такъ оказывается, что рѣшеніе системы n независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ n неизвѣстными можетъ быть сведено къ рѣшенію системы $(n-1)$ такихъ же уравненій съ $(n-1)$ неизвѣстными. Если мы сможемъ рѣшить послѣднюю, то, подставивъ полученныя для неизвѣстныхъ значенія въ выраженіе для x, мы получимъ рѣшеніе (или рѣшенія, если окажется, что рѣшеній система допускаетъ больше одного) и данной системы.

Но нами уже было доказано, что 2 совмѣстныхъ независимыхъ другъ отъ друга уравненія съ 2 неизвѣстными составляютъ опредѣленную систему уравненій. Слѣдовательно, и система 3 независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ 3 неизвѣстными есть система опредѣленная. А изъ этого слѣдуетъ далѣе, что опредѣленною же должна быть система 4 независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ 4 неизвѣстными и т. д., то есть вообще опредѣленною система n независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ n неизвѣстными, что и требовалось доказать.

Примѣчаніе.

Хотя бы мы и не умѣли найти рѣшенія уравненія относительно x, о которомъ говорится въ доказательствѣ (это можетъ случиться, если степень уравненія окажется слишкомъ высокою), самое доказательство отъ этого не теряетъ своей силы, такъ какъ существуетъ и можетъ быть доказано предложеніе (о немъ будетъ еще рѣчь впослѣдствіи), что всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ корень.

430. Условіе неопредѣленности системы уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными.

Теорема. Система, въ которой независимыхъ другъ отъ друга уравненій меньше, чѣмъ неизвѣстныхъ, есть система неопредѣленная. **158**

Док. Положимъ, что дана система, въ которой независимыхъ другъ отъ друга уравненій n, а неизвѣстныхъ $n+p$. Въ такомъ случаѣ мы p неизвѣстнымъ можемъ придать одинъ разъ за другимъ какія угодно значенія

и всякій разъ послѣ этого получимъ n независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ n неизвѣстными, слѣдовательно, по теоремѣ **157** опредѣленную систему уравненій. А такъ какъ произвольныхъ значеній, которыя мы можемъ придать названнымъ p неизвѣстнымъ безконечно много, ибо каждое число можетъ быть такимъ значеніемъ,—то и опредѣленныхъ системъ n уравненій съ n неизвѣстными безконечно много. А это и значитъ, что данная совокупность n совмѣстныхъ уравненій съ $(n+p)$ неизвѣстными есть система неопредѣленная.

Но мыслимы случаи, когда изъ уравненій, получающихся по приданіи p неизвѣстнымъ произвольныхъ значеній, одно или нѣсколько уравненій окажутся зависящими отъ другихъ. Въ этихъ случаяхъ мы будемъ имѣть независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ n неизвѣстными меньше, чѣмъ n и, слѣдовательно, какъ уже выяснено было въ началѣ этого доказательства, системы неопредѣленныя, изъ чего слѣдуетъ, что и въ такихъ особыхъ случаяхъ данная система все-таки будетъ неопредѣленною.

Такъ оказывается, что дѣйствительно вообще всякая система, въ которой независимыхъ другъ отъ друга уравненій меньше, чѣмъ неизвѣстныхъ, есть система неопредѣленная.

§ 431. Условіе переопредѣленности системы уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными.

159 **Теорема.** Система, въ которой независимыхъ другъ отъ друга уравненій больше, чѣмъ неизвѣстныхъ, есть система переопредѣленная (несовмѣстная).

Док. Положимъ, что дана система, въ которой независимыхъ другъ отъ друга уравненій n, неизвѣстныхъ же меньше, чѣмъ n, и представимъ себѣ, что и здѣсь, какъ при доказательствѣ теоремы **157**, мы одно изъ уравненій рѣшили относительно одного неизвѣстнаго, которое будемъ называть x, и подставили полученное для него выраженіе въ остальныя уравненія системы. Такимъ образомъ мы получили бы систему, въ которой и уравненій и неизвѣстныхъ было бы на одно меньше, чѣмъ въ данной системѣ, и которыя вмѣстѣ съ уравненіемъ, изъ котораго для нея опредѣлялось подставляемое выраженіе для x, составила бы по теоремѣ **154** систему, равносильную данной. Равносильными ей были бы и остальныя системы, которыя могли бы быть получены описаннымъ способомъ [ср. доказательство теоремы **157**]. Такъ мы видимъ, что рѣшеніе всякой системы и разсматриваемаго здѣсь вида можетъ быть сведено къ рѣшенію системы, въ которой число и уравненій и неизвѣстныхъ на 1 меньше первоначальнаго. Но нами уже было доказано (§§ 421, 423), что если даны 2 или болѣе независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ 1 неизвѣстнымъ или если даны 3 или болѣе независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ 2 неизвѣстными, то такія совокупности уравненій составляютъ переопредѣленныя системы

уравненій. Слѣдовательно, должна быть переопредѣленною также система 4 или болѣе независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ 3 неизвѣстными и т. д., то есть вообще система независимыхъ другъ отъ друга уравненій, если въ ней этихъ послѣднихъ больше, чѣмъ неизвѣстныхъ. А это и требовалось доказать.

§ 432. **Условія совмѣстности уравненій въ переопредѣленной системѣ.** Послѣдняя теорема вмѣстѣ съ приводимымъ ниже слѣдствіемъ изъ нея суть обобщенія истинъ, найденныхъ нами въ §§ 421, 422, 423, 425. Что же касается упомянутаго слѣдствія, то оно для уравненій, степень которыхъ выше первой, справедливо съ извѣстными оговорками, почему мы и ограничиваемся здѣсь такою формулировкою его.

Слѣдствіе. Для того, чтобы n линейныхъ уравненій съ $(n-p)$ неизвѣстными были совмѣстными, необходима такая зависимость между этими уравненіями, чтобы встрѣчающіяся въ нихъ извѣстныя величины удовлетворяли p условнымъ уравненіямъ.

И въ случаѣ удовлетворенія этихъ условныхъ уравненій изъ $(n-p)$ независимыхъ другъ отъ друга уравненій данной системы могутъ быть выведены остальныя p уравненій ея.

§ 433. **Практическій выводъ изъ послѣднихъ теоремъ.** Изъ послѣднихъ теоремъ слѣдуетъ важное правило, которое необходимо примѣнять при рѣшеніи посредствомъ уравненій такихъ задачъ, для которыхъ требуются *опредѣленныя рѣшенія безъ ограниченія ихъ извѣстною областью чиселъ* (ср. § 394). Оно есть обобщеніе правила, приведеннаго нами въ концѣ § 419, и можетъ быть формулировано такъ:

Правило. Для рѣшенія задачи необходимо всегда составлять столько независимыхъ другъ отъ друга уравненій, сколько въ нихъ встрѣчается неизвѣстныхъ. 

Примѣръ.

Задача. Въ треугольникѣ одинъ изъ внутреннихъ угловъ втрое, а другой вдвое больше третьяго. Вычислить величину этихъ угловъ.

Рѣшеніе.

Составленіе уравненій.

Если мы обозначимъ число градусовъ, заключающихся въ наименьшемъ изъ искомыхъ угловъ, въ слѣдующемъ по величинѣ и въ наибольшемъ изъ нихъ, соотвѣтственно буквами x, y и z, то условія задачи будутъ выражены слѣдующими уравненіями:

$$z = 3x \quad \ldots \quad (I)$$
$$y = 2x \quad \ldots \quad (II)$$

Уравненій I и II, однако, недостаточно для рѣшенія задачи, такъ какъ въ нихъ встрѣчается 3 неизвѣстныхъ величины. Третье уравненіе, содержащее эти 3 неизвѣстныя можно получить различными способами. Такъ, напр., мы могли бы такое уравненіе составить, разсуждая слѣдующимъ образомъ:

Если одинъ изъ внутреннихъ угловъ треугольника втрое, а другой вдвое больше третьяго, то оба первые угла вмѣстѣ должны быть впятеро больше третьяго; а это было бы выражено слѣдующимъ уравненіемъ:

$$y+z=5x.$$

Но если мы станемъ рѣшать систему, состоящую изъ этого уравненія и уравненій I и II, то при исключеніи, какъ неизвѣстнаго y, такъ и неизвѣстнаго z, мы получимъ уравненіе, уже имѣющееся въ системѣ, а при исключеніи неизвѣстнаго x одно и то же уравненіе, изъ которыхъ бы уравненій мы это неизвѣстное ни исключали. Изъ этого видно, что въ названной системѣ уравненія не независимы другъ отъ друга, и что она по этой причинѣ неопредѣленна. Но и до того, какъ приступлено будетъ къ рѣшенію ея, должно быть ясно, что она опредѣленною быть не можетъ, такъ какъ для составленія третьяго уравненія мы воспользовались условіями задачи, которыя уже были примѣнены при составленіи уравненій I и II, вслѣдствіе чего уравненія должны были оказаться зависящими другъ отъ друга. И въ самомъ дѣлѣ легко вывести любое изъ нихъ изъ остальныхъ двухъ.

Но не трудно получить третье уравненіе, содержащее неизвѣстныя x, y и z, и не зависящее отъ уравненій I и II. По извѣстной геометрической теоремѣ сумма внутреннихъ угловъ треугольника должна составлять 180^0.

Въ силу этой теоремы мы имѣемъ:

$$x+y+z=180 \quad \dots \quad \text{(III)}.$$

Уравненія I, II и III составляютъ опредѣленную систему, рѣшивъ которую мы и найдемъ искомыя величины.

Рѣшеніе системы.

Подставивъ въ уравненіе III вмѣсто z и y данныя уравненіями I и II выраженія, мы получаемъ:

$$x+2x+3x=180,$$

а отсюда

$$6x=180$$

и, слѣдовательно,

$$x=30.$$

Чрезъ подстановку же этого корня въ уравненія II и I мы находимъ:

$$y=60$$
$$z=90$$

Отвѣтъ.

Величина угловъ треугольника. 30°, 60° и 90°.

Еще примѣръ въ поясненіе послѣдняго правила будетъ приведенъ впослѣдствіи (въ § 565).

ГЛАВА VIII

Опредѣленныя системы уравненій первой степени.

§ 434. **Ординарный видъ уравненія первой степени съ нѣсколькими неизвѣстными.** Какъ сказано было въ § 403, ординарный видъ уравненія первой степени съ 2 неизвѣстными есть

$$ax+by=c.$$

Если уравненія посредствомъ преобразованій, указанныхъ въ I главѣ этой части книги, могутъ быть приведены къ виду:

$$ax+by+cz=d$$
$$ax+by+cz+du=e$$

и т. д., то это будутъ уравненія первой степени съ 3, 4 и т. д. неизвѣстными; и такой видъ ихъ считается ординарнымъ для уравненій 1-ой степени съ нѣсколькими неизвѣстными.

§ 435. **О порядкѣ исключенія неизвѣстныхъ.** Изслѣдованіями предыдущихъ главъ въ общемъ уже предуказано, какъ должно рѣшать опредѣленную систему уравненій. Ходъ такого рѣшенія мы резюмируемъ въ видѣ правила въ слѣдующемъ параграфѣ и къ примѣненію его къ линейнымъ уравненіямъ мы уже подготовлены. Только полезно еще предварительно указать, какъ избѣжать ошибки, которая легко можетъ произойти при исключеніи неизвѣстныхъ и которая состоитъ въ томъ, что въ случаѣ несоблюденія извѣстнаго порядка при такомъ исключеніи могутъ получиться зависящія другъ отъ друга уравненія, какъ это можетъ быть доказано слѣдующимъ разсужденіемъ.

Положимъ, что мы желаемъ исключить одно и то же неизвѣстное, которое назовемъ x, изъ нѣкоторыхъ 3 уравненій системы. Въ этихъ уравненіяхъ представимъ себѣ всѣ члены, кромѣ того, который содержитъ x, перенесенными въ правую часть. Обозначивъ получившіяся послѣ этого правыя части названныхъ уравненій буквами P_1, P_2 и P_3, мы эти уравненія можемъ изобразить въ такомъ видѣ:

$$a_1x=P_1$$
$$a_2x=P_2$$
$$a_3x=P_3.$$

Исключеніе изъ этихъ уравненій неизвѣстнаго x мы можемъ произвести любымъ изъ способовъ, разсмотрѣнныхъ въ главѣ V этой части книги, а также чрезъ дѣленіе уравненій другъ на друга. Уничтоживъ затѣмъ еще знаменателей, мы такимъ образомъ получаемъ изъ перваго и второго уравненія:

$$(I) \quad a_1P_2 = a_2P_1,$$

изъ перваго и третьяго

$$(II) \quad a_1P_3 = a_3P_1$$

и изъ второго и третьяго

$$(III) \quad a_2P_3 = a_3P_2.$$

Но раздѣливъ уравненія I и II другъ на друга и уничтоживъ также затѣмъ знаменателей, мы тоже получимъ уравненіе III. Такимъ образомъ мы видимъ, что уравненіе III зависитъ отъ уравненій I и II. А вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ легко убѣдиться, и уравненіе I можетъ быть выведено изъ уравненій II и III, а уравненіе II изъ уравненій I и III. Изъ сказаннаго же слѣдуетъ, что при составленіи, чрезъ исключеніе котораго-либо изъ неизвѣстныхъ изъ данной опредѣленной системы, новой опредѣленной системы, въ которой и однимъ неизвѣстнымъ и однимъ уравненіемъ меньше, чѣмъ въ данной, нельзя изъ однихъ и тѣхъ же трехъ уравненій исключать неизвѣстное три раза, другими словами должно для полученія третьяго уравненія новой системы исключить x изъ одного изъ этихъ трехъ уравненій и любого четвертаго уравненія данной системы.

И такъ вообще необходимо при названномъ выше составленіи новой системы, исключая неизвѣстное, соединять уравненія по два другъ съ другомъ такъ, чтобы одно изъ нихъ не принадлежало къ числу примѣненныхъ уже уравненій Легче же всего обозрѣть выполненіе послѣдняго требованія, соединяя при исключеніи неизвѣстнаго одно и то же уравненіе системы съ каждымъ другимъ. Такой порядокъ исключенія неизвѣстнаго соблюдается, напр., всегда, когда одно изъ уравненій системы рѣшается относительно исключаемаго неизвѣстнаго и полученное для него выраженіе подставляется въ остальныя уравненія ея.

§ 436. **Правило рѣшенія опредѣленной системы линейныхъ уравненій.** Послѣ замѣчаній въ предыдущемъ параграфѣ, мы можемъ считать себя достаточно подготовленными для резюмированія того, каковъ долженъ быть ходъ рѣшенія названной въ заглавіи этого параграфа системы уравненій.

Правило. *Для рѣшенія опредѣленной системы, состоящей изъ n уравненій, нужно:*

1) изъ уравненій данной системы исключить однимъ изъ способовъ одно и то же неизвѣстное $(n-1)$ разъ такъ, чтобы получилась система $(n-1)$ независимыхъ другъ отъ друга уравненій;

2) изъ уравненій послѣдней системы исключить такимъ же образомъ новое неизвѣстное,

3) *изъ новой системы* $(n-2)$ *независимыхъ другъ отъ друга уравненій съ* $(n-2)$ *неизвѣстными исключить какое-либо третье изъ неизвѣстныхъ и затѣмъ продолжать составлять такъ же новыя опредѣленныя системы, пока не получится 1 уравненіе съ 1 неизвѣстнымъ,*

4) *рѣшивъ это послѣднее уравненіе, подставить полученный корень въ одно изъ уравненій системы 2 уравненій съ 2 неизвѣстными или —въ случаѣ примѣненія способа подстановки —въ выраженіе для неизвѣстнаго, исключавшагося изъ этой послѣдней системы,*

5) *полученныя значенія для послѣднихъ двухъ неизвѣстныхъ подставить въ одно изъ уравненій системы 3 уравненій съ 3 неизвѣстными или —въ случаѣ примѣненія способа подстановки —въ выраженіе для исключавшагося изъ этой системы неизвѣстнаго;*

6) *продолжать подставлять такимъ же образомъ найденныя уже значенія неизвѣстныхъ въ уравненія предыдущихъ системъ или — въ случаѣ примѣненія способа подстановки — въ выраженія для исключавшихся изъ этихъ системъ неизвѣстныхъ, пока не получится значеніе и послѣдняго неизвѣстнаго.*

§ 437. Примѣръ рѣшенія системы способомъ подстановки. Рѣшимъ такимъ способомъ слѣдующую систему уравненій съ 3 неизвѣстными:

$$\begin{cases} \dfrac{y+2}{2y-x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{4y-2x}+\dfrac{3}{z} \\[2ex] \dfrac{3+4x}{6}=2\left(y-\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{z-\dfrac{1}{2}}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{5}x-\dfrac{1}{2}y=\dfrac{\dfrac{1}{2}-2z}{15} \end{cases}$$

Сначала приведемъ эти уравненія къ ординарному виду. Для этого умножимъ первое изъ нихъ на общаго знаменателя $2(2y-x)z$ встрѣчающихся въ немъ дробныхъ выраженій, при чемъ мы получаемъ:

$$2z(y+2)-(2y-x)z=xz+6(2y-x).$$

По раскрытіи скобокъ мы отсюда находимъ:

$$2yz+4z-2yz+xz=xz+12y-6x,$$

а послѣ перенесенія всѣхъ членовъ, содержащихъ неизвѣстныя, въ лѣвую часть:

$$6x-12y+4z=0.$$

Раздѣливъ еще послѣднее уравненіе на 2, мы получаемъ:

$$3x-6y+2z=0.$$

Если мы второе изъ уравненій данной системы по раскрытіи скобокъ умножимъ на 6, а третье на 30, и перенесемъ затѣмъ члены, содержащіе неизвѣстныя въ лѣвую часть, а остальные въ правую, то эти оба уравненія также будутъ приведены къ ординарному виду, данная же система будетъ замѣнена слѣдующею равносильною:

$$\begin{cases} 3x-6y+2z=0 \\ 2x-6y+z=3 \\ 6x-15y+4z=1. \end{cases}$$

Способомъ, названнымъ въ заголовкѣ этого параграфа, ее удобнѣе всего рѣшить такъ:

Рѣшивъ второе изъ уравненій ея относительно z, мы получаемъ:

$$z=3-2x+6y \ldots (а)$$

Подставивъ это выраженіе вмѣсто z въ первое и третье изъ уравненій ея, мы находимъ.

$$\begin{cases} 3x-6y+2(3-2x+6y)=0 \\ 6x-15y+4(3-2x+6y)=1, \end{cases}$$

а по приведеніи къ ординарному виду.

$$\begin{cases} x-6y=6 \\ 2x-9y=11. \end{cases}$$

Получивъ изъ перваго уравненія послѣдней системы

$$x=6+6y \ldots (б)$$

и подставивъ полученное выраженіе вмѣсто x во второе уравненіе, мы находимъ:

$$2(6+9y)-9y=11,$$

а по упрощеніи:

$$12+12y-9y=11$$
$$3y=-1,$$

откуда

$$y=-\frac{1}{3}.$$

Подставивъ это значеніе въ выраженіе (б), мы получаемъ:

$$x=6+6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right),$$

то есть

$$x=4.$$

Подставивъ, наконецъ, въ выраженіе (а) вмѣсто x и y найденныя значенія ихъ, мы получаемъ.

$$z = 3 - 2 \cdot 4 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right),$$

то есть

$$z = -7.$$

§ 438. **Примѣръ рѣшенія системы способомъ сложенія и вычитанія.** Рѣшимъ такимъ способомъ слѣдующую систему уравненій съ 5 неизвѣстными:

$$\begin{cases} 27x - y - z + 3u - 5v = 9 \\ 18x + 2y - 6z - 5u + 6v = -1 \\ 45x - 3y + 2z - 4u - 4v = 30 \\ 54x - 4y - 3z + 6u - 3v = 16 \\ 36x + 5y - 4z - 7u + 6v = 42 \end{cases}$$

Важно выбрать для исключенія такое неизвѣстное, чтобы въ новой системѣ коэффиціенты оказались какъ можно меньше. На первый взглядъ можетъ показаться, что y обладаетъ такимъ свойствомъ. Еще же удобнѣе будетъ исключить изъ данной системы z, если соединить 3-ье уравненіе съ каждымъ другимъ, но исключеніе этого неизвѣстнаго изъ третьяго и четвертаго уравненій замѣнить исключеніемъ его изъ второго и четвертаго. Такимъ образомъ получается слѣдующая система:

$$(\text{А}) \begin{cases} \text{а) } 99x - 5y + 2u - 14v = 48 & (\text{изъ уравненій 3 и 1}) \\ \text{б) } 153x - 7y - 17u - 6v = 89 & (\text{» » 3 и 2}) \\ \text{в) } 90x - 10y + 17u - 12v = 33 & (\text{» » 2 и 4}) \\ \text{г) } 126x - y - 15u - 2v = 102 & (\text{» » 3 и 5}). \end{cases}$$

Изъ этой системы удобнѣе всего исключить y, соединяя уравненія г) съ а), г) съ б), и а) (вмѣсто г) съ в). Такимъ путемъ получается слѣдующая система уравненій:

$$(\text{Б}) \begin{cases} 531x - 77u + 4v = 462 \\ 729x - 88u - 8v = 625 \\ 108x - 13u - 16v = 63. \end{cases}$$

Отсюда мы чрезъ исключеніе v получаемъ:

$$(\text{В}) \begin{cases} 1791x - 242u = 1549 & (\text{изъ уравненій 1 и 2}) \\ 1350x - 163u = 1187 & (\text{» » 2 и 3}). \end{cases}$$

Изъ этой системы удобнѣе исключить x, умножая первое уравненіе на 150, а второе на 199 (чтобы получилось общее наименьшее кратное

коэффиціентовъ 1791 и 1350), и вычитая затѣмъ полученное первое уравненіе изъ полученнаго второго:

$$\begin{array}{r} 1791\ .\ 150x-36300\ u = 232350 \\ \underline{1350\ .\ 199x-32437\ u = 236213} \\ 3863\ u = 3863. \end{array}$$

Отсюда же получается:

$$u = 1.$$

Найти x тѣмъ же способомъ изъ системы B очень неудобно. Легче это неизвѣстное вычислить чрезъ подстановку значенія u въ одно изъ уравненій этой системы, напр., во второе. Такъ получается:

$$\begin{gathered} 1350x-163\ .\ 1 = 1187 \\ 1350x\ \ 1350 \\ x = 1. \end{gathered}$$

Чрезъ подстановку найденныхъ для u и x значеній въ одно изъ уравненій (удобнѣе всего третье) системы $Б$ мы получаемъ:

$$v = 2.$$

Подставивъ значенія вычисленныхъ уже трехъ неизвѣстныхъ въ одно изъ уравненій (удобнѣе всего четвертое) системы A, мы получаемъ:

$$y\ \ 5.$$

Осталось, наконецъ, подставить найденныя уже значенія неизвѣстныхъ u, x, v и y въ одно изъ уравненій данной системы, напр., первое, чтобы получить значеніе и послѣдняго неизвѣстнаго:

$$z = 6.$$

§ 439 **Примѣръ рѣшенія системы, въ отдѣльныхъ уравненіяхъ которой встрѣчаются не всѣ неизвѣстныя.** При рѣшеніи задачъ изъ геометріи, физики и т. п. рѣдко бываетъ, чтобы отдѣльныя уравненія системы содержали всѣ неизвѣстныя, встрѣчающіяся въ ней вообще. Потому важно познакомиться съ примѣромъ рѣшенія и такого рода системы, напр. слѣдующей:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3u-w=2 & \dots (I) \\ 5v-4w+3x=14 & \dots (II) \\ u+x+y+z=20 & \dots (III) \\ 4v-y-2z=-8 & \dots (IV) \\ 3u-x=1 & \dots (V) \\ 2u-v-w+2x-z=0 & \dots (VI) \end{array}\right.$$

Изъ этой системы удобнѣе всего исключается y, такъ какъ это неизвѣстное встрѣчается только въ уравненіяхъ III и IV. Сложивъ ихъ, мы получаемъ:

$$u+4v+x-z=12 \quad \ldots (\text{а})$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ уравненіями I, II, V и VI составляютъ новую систему (А), содержащую только 5 неизвѣстныхъ. Изъ послѣдней удобнѣе всего исключить z, встрѣчающееся только въ уравненіяхъ (а) и VI. Вычтя второе изъ нихъ изъ перваго, мы получаемъ:

$$u+5v+w-x=12 \quad \ldots (\text{б})$$

Вмѣстѣ съ этимъ уравненіемъ уравненія I, II и V составляютъ новую систему (Б), содержащую уже только 4 неизвѣстныхъ. Изъ нея удобнѣе всего исключить v, такъ какъ оно встрѣчается только въ уравненіяхъ (б) и II. Вычтя ихъ одно изъ другого, мы получаемъ уравненіе

$$u-5w+4x=2, \quad \ldots (\text{в})$$

которое вмѣстѣ съ уравненіями I и V составляютъ систему (В) съ тремя неизвѣстными.

Изъ нея можетъ быть исключено неизвѣстное x чрезъ сложеніе умноженнаго на 4 уравненія V съ уравненіемъ (в). Получающееся такимъ образомъ уравненіе

$$13u-5w=6 \quad \ldots (\text{г})$$

и уравненіе

$$3u-w=2 \quad \ldots (\text{I})$$

составляютъ систему (Г) уже только съ двумя неизвѣстными, изъ которой можетъ быть слѣдующимъ образомъ исключено w:

$$\begin{array}{r} -13u+5w=-6 \\ 15u-5w=10 \\ \hline 2u=4 \\ u=2\,. \end{array}$$

Подставивъ теперь 2 вмѣсто u въ уравненіе I (какъ уравненіе системы Г), мы получаемъ:

$$w=4,$$

а подставивъ то же значеніе вмѣсто u въ уравненіе V (какъ уравненіе системы В), мы находимъ:

$$x=5.$$

Чрезъ подстановку найденныхъ уже значеній неизвѣстныхъ мы можемъ найти значеніе v изъ уравненія II (какъ уравненія системы Б) и получаемъ:

$$v=3.$$

Такимъ же образомъ получается удобнѣе всего значенiе для z изъ уравненія (a) (какъ уравненія системы A):

$$z=7.$$

Наконецъ, тѣмъ же способомъ мы изъ уравненія III данной системы получаемъ:

$$y=6.$$

§ 440. **Системы уравненій, содержащихъ обратныя величины неизвѣстныхъ.** Здѣсь умѣстно указать на искусственный способъ рѣшенія системы, который удобно примѣнять въ тѣхъ случаяхъ, когда въ уравненіяхъ ея встрѣчаются только обратныя величины всѣхъ или нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ. Въ этихъ случаяхъ избѣгаются усложненія хода рѣшенія, если сначала разсматривать эти обратныя величины какъ неизвѣстныя и вычислять ихъ, а затѣмъ уже изъ нихъ опредѣлять значенія самихъ неизвѣстныхъ.

Для поясненія этого правила рѣшимъ слѣдующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}+\dfrac{5z}{4}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{11}{2x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{5z}{8}=1 \\ \dfrac{17}{x}-\dfrac{4}{3y}-\dfrac{3z}{4}=2. \end{cases}$$

Представимъ ее предварительно въ такомъ видѣ.

$$\begin{cases} 3\cdot\dfrac{1}{x}-4\cdot\dfrac{1}{y}+\dfrac{5}{4}z=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{11}{2}\cdot\dfrac{1}{x}+2\cdot\dfrac{1}{y}-\dfrac{5}{8}z=1 \\ 17\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{4}z=2. \end{cases}$$

А теперь уничтожимъ въ уравненіяхъ ея знаменателей коэффиціентовъ, умножая первое уравненіе на 12, второе на 8 и третье также **на 12:**

$$\begin{cases} 36\cdot\dfrac{1}{x}-48\cdot\dfrac{1}{y}+15z=4 \\ 44\cdot\dfrac{1}{x}+16\cdot\dfrac{1}{y}-5z=8 \\ 204\cdot\dfrac{1}{x}-16\cdot\dfrac{1}{y}-9z=24. \end{cases}$$

Умноживъ, чтобы исключить $\frac{1}{z}$, второе изъ этихъ уравненій на 3 и сложивъ его затѣмъ съ первымъ, мы случайно исключаемъ 2 неизвѣстныхъ заразъ и получаемъ:

$$168 \cdot \frac{1}{x} = 28,$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{x} = \frac{28}{168} = \frac{1}{6},$$

откуда

$$x = 6.$$

Второй разъ исключимъ $\frac{1}{y}$, слагая второе изъ уравненій послѣдней системы съ третьимъ; такъ получается:

$$248 \cdot \frac{1}{x} - 14z = 32.$$

Подставивъ въ это уравненіе $\frac{1}{6}$ вмѣсто $\frac{1}{x}$, мы находимъ:

$$248 \cdot \frac{1}{6} - 14z = 32$$

$$-14z = 32 - \frac{124}{3} = -\frac{28}{3}$$

$$z = \frac{2}{3}.$$

Чтобы отыскать значеніе и третьяго неизвѣстнаго, подставимъ вычисленныя уже значенія обоихъ другихъ неизвѣстныхъ въ первое уравненіе данной системы. Такъ мы получаемъ:

$$\frac{3}{6} - \frac{4}{y} + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{4}{y} = -1,$$

слѣдовательно,

$$y = 4.$$

ГЛАВА IX.

Общее рѣшеніе опредѣленной системы уравненій первой степени со многими неизвѣстными.

§ 441. **Примѣненіе способа Безу́ къ рѣшенію системы съ 3 неизвѣстными.** Прежде, чѣмъ перейти къ примѣненію способа неопредѣленныхъ множителей (Безу́) къ рѣшенію системы линейныхъ уравненій съ произвольнымъ количествомъ неизвѣстныхъ, рѣшимъ этимъ способомъ опредѣленную систему уравненій первой степени съ 3 неизвѣстными. Пусть такая система будетъ:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_2x+b_2y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Если умножимъ первое изъ этихъ уравненій на нѣкотораго пока еще неизвѣстнаго множителя m и второе на нѣкотораго множителя n и сложимъ преобразованныя такимъ образомъ первыя два уравненія системы и третье, то получаемъ:

$$(a_1m+a_2n+a_3)x+(b_1m+b_2n+b_3)y+(c_1m+c_2n+c_3)z=d_1m+d_2n+d_3 \quad \ldots \quad (a).$$

Теперь видно, что если m и n избрать такъ, чтобы они удовлетворяли условіямъ

$$\left.\begin{array}{r} b_1m+b_2n+b_3=0 \\ \text{и } c_1m+c_2n+c_3=0, \end{array}\right\} (A)$$

то окажутся заразъ исключенными y и z, и изъ уравненія (a) мы при условіи, что удовлетворены уравненія А, находимъ:

$$x=\frac{d_1m+d_2n+d_3}{a_1m+a_2n+a_3}.$$

Такъ какъ для опредѣленія множителей m и n нужно рѣшить систему A, то рѣшеніе системы 3 линейныхъ уравненій съ 3 неизвѣстными оказывается сведеннымъ посредствомъ разсматриваемаго способа къ рѣшенію системы двухъ такихъ же уравненій съ двумя неизвѣстными.

Изъ системы A мы получаемъ:

$$m=\frac{b_2c_3-b_3c_2}{b_1c_2-b_2c_1}$$

$$n=\frac{b_3c_1-b_1c_3}{b_1c_2-b_2c_1}.$$

Подставивъ же эти выраженія вмѣсто m и n въ формулу для x и умноживъ затѣмъ ея дѣлимое и дѣлителя на $b_1c_2 - b_2c_1$, мы получаемъ:

$$x = \frac{d_1(b_2c_3 - b_3c_2) + d_2(b_3c_1 - b_1c_3) + d_3(b_1c_2 - b_2c_1)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)}.$$

Если мы изберемъ множителей m и n такъ, чтобы они удовлетворяли условіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_1m + a_2n + a_3 = 0 \\ c_1m + c_2n + c_3 = 0, \end{array}\right\} (Б)$$

то мы при условіи, что удовлетворены уравненія $Б$, находимъ:

$$y = \frac{d_1m + d_2n + d_3}{b_1m + b_2n + b_3},$$

а послѣ подстановки сюда вмѣсто m и n выраженій, получаемыхъ для этихъ величинъ изъ системы $Б$, и послѣ упрощенія имѣемъ:

$$y = \frac{d_1(a_3c_2 - a_2c_3) + d_2(a_1c_3 - a_3c_1) + d_3(a_2c_1 - a_1c_2)}{b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + b_3(a_2c_1 - a_1c_2)}.$$

Если, наконецъ, избрать множителей m и n такъ, чтобы они удовлетворяли условіямъ:

и

$$\left.\begin{array}{l} a_1m + a_2n + a_3 = 0 \\ b_1m + b_2n + b_3 = 0 \end{array}\right\} (В),$$

то изъ уравненія (а) слѣдуетъ:

$$z = \frac{d_1m + d_2n + d_3}{c_1m + c_2n + c_3}.$$

Послѣ же подстановки сюда вмѣсто m и n выраженій, получающихся при рѣшеніи относительно этихъ буквъ системы $В$, мы находимъ:

$$z = \frac{d_1(a_2b_3 - a_3b_2) + d_2(a_3b_1 - a_1b_3) + d_3(a_1b_2 - a_2b_1)}{c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)}.$$

§ 442. **Замѣчанія относительно полученной системы корней.** Если мы въ выраженіяхъ, полученныхъ въ предыдущемъ параграфѣ для x, y и z въ дѣлителяхъ раскроемъ скобки, то убѣдимся, что эти дѣлители совершенно одинаковы.

Кромѣ того легко обнаружить въ этихъ выраженіяхъ, что дѣлимыя ихъ отличаются отъ дѣлителей только тѣмъ, что въ послѣднихъ предъ скобками стоятъ множителями коэффиціенты опредѣляемаго неизвѣстнаго, въ дѣлимомъ же вмѣсто каждаго такого коэффиціента стоитъ свободный

членъ (т. е., членъ, не содержащій неизвѣстнаго и въ каждомъ изъ данныхъ уравненій составляющій правую часть его) того же уравненія, въ которомъ встрѣчается этотъ коэффиціентъ.

Въ формулахъ для неизвѣстныхъ, полученныхъ въ § 407 при рѣшеніи системы 2 уравненій 1-ой степени съ 2 неизвѣстными также видно, что въ нихъ дѣлимыя могли бы быть образованы изъ дѣлителей чрезъ замѣну коэффиціентовъ при опредѣляемомъ неизвѣстномъ соотвѣтственными свободными членами.

§ 443. **Примѣненіе способа Безу къ любой опредѣленной системѣ линейныхъ уравненій.** Не трудно обобщить примѣненный только что пріемъ и составить правило для рѣшенія по способу неопредѣленныхъ множителей опредѣленной системы линейныхъ уравненій съ произвольнымъ количествомъ неизвѣстныхъ.

Если неизвѣстныхъ, а, слѣдовательно, и уравненій n, то $(n-1)$ уравненій умножаемъ на неизвѣстныхъ пока множителей $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}$, и затѣмъ слагаемъ умноженныя и неумноженное уравненія. Для того, чтобы получить значеніе котораго-либо изъ неизвѣстныхъ, нужно, чтобы въ уравненіи, полученномъ отъ сложенія, коэффиціенты при остальныхъ $(n-1)$ неизвѣстныхъ превратились въ 0. Это требованіе даетъ $(n-1)$ линейныхъ уравненій для опредѣленія $(n-1)$ неопредѣленныхъ множителей; и рѣшеніе системы съ n неизвѣстными сводится такимъ образомъ къ рѣшенію системы, въ которой и неизвѣстныхъ и уравненій на одно меньше.

Рѣшеніе послѣдней системы можетъ быть сведено такимъ же способомъ къ рѣшенію системы, въ которой и неизвѣстныхъ и уравненій еще на одно меньше, и т. д. Такъ и при примѣненіи этого способа мы постепенно доходимъ до системъ 3 уравненій съ 3 неизвѣстными, 2 уравненій съ 2 неизвѣстными и, наконецъ, 1 уравненія съ 1 неизвѣстнымъ, которыя всѣ уже рѣшены нами подробно.

§ 444. **Закономѣрность построеній формулъ, выражающихъ корни системы.** Въ выраженіяхъ, полученныхъ въ § 441, для неизвѣстныхъ x, y и z, видна такая закономѣрность построенія ихъ, которая даетъ возможность сразу писать рѣшенія, не производя всякій разъ всей процедуры рѣшенія системы. Чтобы явнѣе обнаружить законъ, по которому нужно образовывать эти выраженія, вернемся къ системѣ съ 2 неизвѣстными [см. § 407]:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ lx+my=n. \end{cases}$$

Расположивъ коэффиціенты неизвѣстныхъ между вертикальными чертами въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ l & m \end{vmatrix},$$

мы видимъ, что одинаковый для обоихъ неизвѣстныхъ дѣлитель получается чрезъ умноженіе крестъ на крестъ этихъ коэффиціентовъ и вычитаніе изъ перваго произведенія am второго произведенія bl.

Если символомъ

$$\begin{vmatrix} a & b \\ l & m \end{vmatrix}$$

обозначить выраженіе $am-bl$, то будетъ послѣдовательно обозначить выраженіе $cm-bn$ символомъ

$$\begin{vmatrix} c & b \\ n & m \end{vmatrix}$$

и, слѣдовательно, значеніе неизвѣстнаго x выраженіемъ

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ n & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ l & m \end{vmatrix}}.$$

Пользуясь введеннымъ символомъ, мы выраженіе для y можемъ представить въ видѣ:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ l & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ l & m \end{vmatrix}}.$$

§ 445. **Первое понятіе объ опредѣлителѣ.** При помощи введенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ символовъ мы можемъ въ выраженіи для x, полученномъ въ § 441 при рѣшеніи системы съ 3 неизвѣстными, изобразить дѣлителя слѣдующимъ образомъ:

$$a\cdot\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Все же это выраженіе сокращенно обозначается символомъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Символы, съ которыми мы тутъ познакомились, называются *опредѣлителями*, а числа, изъ которыхъ они составляются, *элементами* ихъ. При

сравненіи послѣдняго опредѣлителя съ выраженіемъ, которое онъ замѣняетъ, мы видимъ, какъ опредѣлитель съ тремя горизонтальными строками и такимъ же количествомъ вертикальныхъ столбцовъ (опредѣлитель 3-ьяго порядка) можетъ быть выраженъ чрезъ опредѣлители, въ которыхъ по одной строкѣ и одному столбцу меньше (опредѣлители 2-ого порядка). Не трудно замѣтить, что при этомъ элементы перваго столбца опредѣлителя 3-ьяго порядка съ чередующимися знаками являются множителями, а множимыми опредѣлители, получающіеся черезъ вычеркиваніе той строки и того столбца, въ которыхъ находится множитель

На основаніи изложеннаго не можетъ быть сомнѣній, какія алгебраическія выраженія слѣдуетъ понимать, если мы систему корней системы уравненій, рѣшенной въ § 441, изобразимъ въ видѣ·

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

§ 446 **Рѣшеніе въ общемъ видѣ системы 4 линейныхъ уравненій съ 4 неизвѣстными.** Чтобы рѣшить систему уравненій съ 4 неизвѣстными:

$$\left|\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+d_1u=l_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2u=l_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3u=l_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4u=l_4. \end{array}\right.$$

сложимъ эти уравненія, умноживъ предварительно первое на m, второе на n и третье на p. Мы исключимъ одновременно неизвѣстныя y, z и u и получимъ x, если изберемъ множителей m, n и p такъ, чтобы они удовлетворяли условіямъ:

$$\left|\begin{array}{l} b_1m+b_2n+b_3p+b_4=0 \\ c_1m+c_2n+c_3p+c_4=0 \\ d_1m+d_2n+d_3p+d_4=0 \end{array}\right.$$

Изъ послѣдней же системы мы по правилу, изложенному въ предыдущемъ параграфѣ находимъ.

$$m = \frac{\begin{vmatrix} b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \\ d_4 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{b_4(c_2d_3 - c_3d_2) + c_4(b_3d_3 - b_3d_2) - d_4(b_2c_3 - b_3c_2)}{b_1(c_2d_3 - c_3d_2) - c_1(b_2d_3 - b_3d_2) + d_1(b_2c_3 - b_3c_2)}$$

$$= -\frac{b_2(c_3d_4 - c_4d_3) - b_3(c_3d_4 - c_4d_2) + b_4(c_3d_3 - c_3d_2)}{b_1(c_2d_3 - c_3d_2) - b_2(c_1d_3 - c_3d_1) + b_3(c_1d_2 - c_2d_1)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}.$$

Такимъ же образомъ чрезъ разложеніе и вынесеніе другихъ множителей за скобки мы получаемъ:

$$n = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_4 & b_3 \\ c_1 & c_4 & c_3 \\ d_1 & -d_4 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}.$$

$$p = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & -b_4 \\ c_1 & c_2 & -c_4 \\ d_1 & d_2 & -d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}.$$

Подставивъ эти выраженія вмѣсто m, n и p въ формулу:

$$x = \frac{l_1m + l_2n + l_3p + l_4}{a_1m + a_2n + a_3p + a_4},$$

получающуюся по исключенiи неизвѣстныхъ y, z и u, перемѣнивъ знаки въ дѣлимомъ и дѣлителѣ ея и расширивъ затѣмъ ее на общаго знаменателя выраженiй для m, n и p, мы находимъ:

$$x = \frac{l_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - l_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + l_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - l_4 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}{a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}$$

Дѣлитель этого выраженiя построенъ совершенно такъ же, какъ и первое выраженiе въ § 445, и потому по аналогiи съ введеннымъ тамъ сокращеннымъ обозначенiемъ и его естественно выразить символомъ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

который называется опредѣлителемъ четвертаго порядка. Изъ происхожденiя же его слѣдуетъ, что правило, какъ выразить его чрезъ опредѣлители 3-ьяго порядка, должно гласить такъ же, какъ и правило, по которому опредѣлитель 3-ьяго порядка выражается чрезъ опредѣлители 2-ого (см. стр. 530), а именно, онъ равенъ многочлену, въ членахъ котораго элементы его перваго столбца съ чередующимися знаками являются множителями, а множимыми опредѣлители получающiеся черезъ вычеркиванiе той строки и того столбца, въ которыхъ находится множитель.

Дѣлимое въ формулѣ для x, будучи такимъ же выраженiемъ, какъ и дѣлитель, можетъ быть также изображенъ при помощи введеннаго нами теперь символа. И такъ же могутъ быть выражены и остальныя неизвѣстныя рѣшаемой нами системы, такъ что система корней, удовлетворяющая ей, можетъ быть изображена такъ:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} l_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ l_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ l_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ l_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & l_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & l_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & l_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & l_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & l_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & l_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & l_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & l_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}, \quad u = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & l_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & l_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}$$

И тутъ, какъ въ приведенной въ концѣ предыдущаго параграфа системѣ корней, опредѣлители въ дѣлителяхъ одинаковы, а опредѣлители въ дѣлимыхъ отличаются отъ первыхъ тѣмъ, что въ нихъ коэффиціенты каждаго опредѣляемаго неизвѣстнаго замѣнены соотвѣтственными свободными членами

§ 447. **Указаніе на предстоящія обобщенія.** Позднѣе будетъ доказано, что уже предуказывается разсмотрѣнными здѣсь примѣрами, а именно, что въ случаѣ и большаго количества неизвѣстныхъ рѣшеніе опредѣленной системы линейныхъ уравненій можетъ быть выражено при помощи опредѣлителей. При помощи нихъ мы даже будемъ въ состояніи въ общемъ видѣ выразить рѣшеніе системы n уравненій 1-ой степени съ n неизвѣстными [см. § 707], при чемъ окажется, что корни такой системы будутъ выражены чрезъ опредѣлители n-аго порядка

Тамъ же будетъ доказано, что опредѣлитель любого (n-аго) порядка разлагается на опредѣлители низшаго [$(n-1)$-аго] порядка по тому же правилу, по которому мы производили такого рода разложеніе опредѣлителей 4-аго и 3-ьяго порядка, и что при постепенномъ переходѣ къ опредѣлителямъ все низшаго и низшаго порядка въ концѣ концовъ получается тотъ многочленъ, который былъ обозначенъ разложеннымъ опредѣлителемъ.

ГЛАВА X.

Отношенія и пропорціи.

I. Общія понятія.

§ 448. **Отношенія.** Существуетъ два способа сравненія двухъ однородныхъ величинъ между собою: или указываютъ, *на сколько* одна изъ нихъ больше другой, или же, *во сколько разъ* одна больше другой. Въ обоихъ случаяхъ говорятъ объ о т н о ш е н і и этихъ величинъ другъ къ другу. Перваго рода отношеніе находится чрезъ вычитаніе, отношеніе послѣдняго рода вычисляется чрезъ дѣленіе.

161ª а) **Опредѣленіе.** Ариѳметическимъ отношеніемъ двухъ величинъ a и b называется ихъ разность $a-b$.

161б б) **Опредѣленіе**. Геометрическимъ или кратнымъ отношеніемъ (или просто отношеніемъ*) двухъ величинъ называется частное ихъ $\frac{a}{b}$.

Въ обоихъ случаяхъ a и b называются членами, a — предыдущимъ, b — послѣдующимъ. Численное значеніе отношенія $\frac{a}{b}$ называется также его знаменателемъ **).

§ 449. **Пропорціи.**

162ª а) **Опредѣленіе.** Равенство, части котораго суть ариѳметическія отношенія, называется ариѳметическою пропорціею.

Такъ, напр., ариѳметическія пропорціи суть:
тождество

$$18-11=10-3$$

и уравненіе

$$a-b=c-d.$$

162б б) **Опредѣленіе**. Равенство, части котораго суть геометрическія отношенія, называется геометрическою пропорціею.

Такъ, напр., геометрическія пропорціи суть:
тождество:

$$3:8=1\frac{1}{2}:4$$

и уравненіе:

$$a:b=c:d.$$

Читаются же такія равенства, если имъ присваивается названіе пропорцій, такъ: «3 относится къ 8, какъ $1\frac{1}{2}$ къ 4» ;и «a относится къ b, какъ c относится къ d».

Какъ въ одного, такъ и въ другого рода пропорціяхъ первый и послѣдній членъ называются к р а й н и м и, второй и третій с р е д н и м и.

Если въ пропорціи оба средніе члена одинаковы, то она называется н е п р е р ы в н о ю.

---

*) такъ какъ ариѳметическое отношеніе почти никогда не примѣняется.

**) *Прим.* Нельзя не замѣтить, что обозначеніе это выбрано весьма неудачно, такъ какъ слово «знаменатель» примѣняется и въ другомъ общеизвѣстномъ смыслѣ.

§ 450. **Пропорціи по существу уравненія.** Пропорціи, выражающія геометрическія теоремы или физическіе законы, равно какъ и пропорціи, составляемыя для рѣшенія и при рѣшеніи ариѳметическихъ, геометрическихъ и другихъ задачъ, это всегда уравненія. Уравненіе же есть всякая пропорція, написанная въ общемъ видѣ, напр.

$$m : n = p : q$$

Поэтому и неизвѣстное, встрѣчающееся въ пропорціи, какъ, напр., въ пропорціи

$$6 - x = 8 - 3$$

или въ пропорціи

$$5 : 3 = x : 4,$$

можетъ быть вычислено по правиламъ, по которымъ рѣшаются уравненія.

Теоремы же о пропорціяхъ, которыя будутъ доказываться ниже чрезъ преобразованія по правиламъ, по которымъ преобразовываются уравненія, останутся, конечно, въ силѣ и для тождествъ, имѣющихъ видъ пропорцій, такъ какъ при преобразованіи по этимъ правиламъ тождествъ опять получаются тождества [§ 364].

II. Ариѳметическая пропорція.

§ 451. **Теорема.** Сумма крайнихъ членовъ ариѳметической пропорціи равна суммѣ ея среднихъ членовъ.

Предп. $a - b = c - d.$

Утв. $a + d = b + c.$

Док. Если въ пропорціи

$$a - b = c - d$$

перенесемъ b въ правую, а d въ лѣвую часть, то мы и получаемъ:

$$a + d = b + c.$$

§ 452. **Теорема.** Въ непрерывной ариѳметической пропорціи средній членъ равенъ полусуммѣ обоихъ остальныхъ членовъ ея.

Предп. $a - m = m - b$

Утв. $m = \frac{a + b}{2}$

Док. По предыдущей теоремѣ изъ пропорціи

$$a-m=m-b$$

получается:

$$2m=a+b.$$

слѣд.,

$$m=\frac{a+b}{2}.$$

§ 453. **Другой видъ непрерывной ариѳметической пропорціи.** Если мы въ непрерывной ариѳметической пропорціи

$$a-m=m-b$$

перемѣнимъ знаки и переставимъ члены, то получится пропорція:

$$m-a=b-m.$$

Потому мы имѣемъ право называть непрерывною ариѳметическою пропорціею и такую, въ которой крайніе члены одинаковы.

§ 454. **Ариѳметическое среднее.**

Опредѣленіе. Повторяющійся членъ въ непрерывной ариѳметической пропорціи называется ариѳметическимъ среднимъ остальныхъ двухъ членовъ ея.

163 **Слѣдствіе.** Полусумма двухъ величинъ есть ихъ ариѳметическое среднее.

Понятіе объ ариѳметическомъ среднемъ обобщается слѣдующимъ образомъ:

164 **Опредѣленіе. Ариѳметическимъ среднимъ нѣсколькихъ величинъ называется частное отъ дѣленія ихъ суммы на число ихъ.**

Такъ $\frac{a+b+c+d}{4}$ есть среднее ариѳметическое величинъ a, b, c и d; $\frac{m+n+p+q+r+s+t}{7}$ есть ариѳметическое среднее величинъ m, n, p, q, r, s и t.

III. Геометрическая пропорція.

§ 455. **Опредѣленія.** Каждый членъ геометрической пропорціи называется четвертымъ пропорціональнымъ остальныхъ трехъ. Каждый изъ неповторяющихся членовъ непрерывной геометрической пропорціи называется третьимъ пропорціональнымъ остальныхъ двухъ.

Такъ въ пропорціи

$$a : m = m : b$$

a есть третье пропорціональное величинъ *b* и *m*. *b* есть третье пропорціональное величинъ *a* и *m*.

Опредѣленіе. Повторяющійся членъ въ непрерывной геометрической пропорціи называется *геометрическимъ среднимъ* или *среднимъ пропорціональнымъ* остальныхъ двухъ членовъ ея 165

§ 456. **Теорема.** Произведеніе крайнихъ членовъ геометрической пропорціи равно произведенію ея среднихъ членовъ. 166

Предп. $a : b = c : d$

Утв. $ad = bc$

Док. Если мы пропорцію

$$a : b = c : d$$

умножимъ на bd *), *то и получается*

$$ad = bc.$$

Слѣдствіе 1. Если въ пропорціи **) равны другъ другу одинъ крайній и одинъ средній члены, то и остальные два члена ея равны между собою. 167

Слѣдствіе 2. Крайній членъ пропорціи равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній; средній членъ равенъ произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній. 168

§ 457. **Теорема** (обратная). Изъ сомножителей двухъ равныхъ произведеній можетъ быть образована пропорція, въ которой крайними членами будутъ сомножители одного изъ этихъ произведеній, а средними сомножители другого. 169

Предп. $mn = pq$.

Утв. $m : p = q : n$

---

*) Это есть то же самое, что уничтожить знаменателей въ уравненіи.

**) Если говорятъ просто о пропорціи, то понимаютъ геометрическую.

Док. Раздѣливъ равенство

$$mn=pq$$

на pq, мы и получаемъ:

$$m:p=q:n.$$

§ 458. **Возможныя перестановки членовъ въ пропорціи.** Изъ пропорцій

$$a:b=c:d$$

по теоремѣ **166** слѣдуетъ равенство:

$$ad=bc.$$

Изъ этого же равенства по теоремѣ обратной [**169**] кромѣ первоначальной пропорціи можно образовать еще 7, слѣдовательно, вообще слѣдующія:

1) $a:b=c:d$	5) $c:d=a:b$
2) $d:b=c:a$	6) $c:a=d:b$
3) $a:c=b:d$	7) $b:d=a:c$
4) $d:c=b:a$	8) $b:a=d:c$.

Заключающееся въ этихъ равенствахъ слѣдствіе изъ названныхъ двухъ теоремъ можетъ быть формулировано такъ:

170 **Слѣдствіе.** В ъ п р о п о р ц і и д о п у с т и м ы:

1) п е р е с т а н о в к а к р а й н и х ъ ч л е н о в ъ м е ж д у с о б о ю,

2) п е р е с т а н о в к а с р е д н и х ъ ч л е н о в ъ м е ж д у с о б о ю,

3) о д н о в р е м е н н а я п е р е с т а н о в к а к р а й н и х ъ ч л е н о в ъ м е ж д у с о б о ю и с р е д н и х ъ м е ж д у с о б о ю,

4) з а м ѣ н а к р а й н и х ъ ч л е н о в ъ с р е д н и м и и с р е д н и х ъ к р а й н и м и.



§ 459. **Теорема.** Если три члена пропорціи равны соотвѣтственнымъ членамъ другой, то и четвертые члены этихъ пропорцій равны.

Предп. $a:b=x:c$
$a:b=y:c$

Утв. $x=y$

Док. Изъ пропорцій

$$a:b=x:c$$
$$\underline{a:b=y:c}$$

по теор. **VI** слѣдуетъ: $x:c=y:c$.

Слѣдовательно, по теоремѣ **167**,

$$x=y.$$

Такъ же нужно было бы доказывать теорему, если бы x и y были въ данныхъ пропорціяхъ не третьими, а какими-либо другими соотвѣтственными членами.

§ 460. **Теорема.** Среднiй членъ непрерывной геометрической пропорціи равенъ корню квадратному изъ произведенія обоихъ остальныхъ членовъ ея.

Предп. $a : m = m : b$

Утв. $m = \sqrt{ab}$

Док. Изъ пропорціи

$$a . m = m . b$$

слѣдуетъ по теоремѣ **166** что

$$m^2 = ab.$$

а отсюда по опредѣленію **66**[a], что

$$m = \sqrt{ab}.$$

§ 461. **Другой видъ непрерывной геометрической пропорціи.** Если мы въ непрерывной геометрической пропорціи

$$a . m = m . b$$

по теоремѣ **170** крайніе члены замѣнимъ средними, а средніе крайними, то она приметъ видъ:

$$m : a = b : m$$

Потому мы имѣемъ право называть непрерывною геометрическою пропорціею и такую, въ которой крайніе члены одинаковы.

§ 462. **Обобщеніе понятія о геометрическомъ среднемъ.** Изъ опредѣленія **166** и теоремы, доказанной въ § 460, слѣдуетъ:

Слѣдствіе. Геометрическое среднее двухъ чиселъ есть корень квадратный изъ произведенія ихъ.  172

На основаніи этого предложенія понятіе о геометрическомъ среднемъ можетъ быть обобщено слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленіе. Геометрическимъ среднимъ n данныхъ чиселъ называется корень n-ой степени изъ произведенія ихъ.  173

Такъ, $\sqrt[5]{abcde}$ есть геометрическое среднее чиселъ a, b, c, d и e.

§ 463. **Производныя пропорціи.** Изъ данной пропорціи могутъ быть образованы новыя, представляющія равносильныя съ ними уравненія, при помощи пріемовъ, указываемыхъ теоремами, приводимыми и доказываемыми въ этомъ и въ слѣдующемъ параграфахъ.

274 **Теорема.** Сумма или разность членовъ перваго отношенія пропорціи относится къ его послѣдующему члену, какъ соотвѣтственно сумма или разность членовъ второго отношенія къ его послѣдующему.

Предп. $a : b = c : d$

Утв. $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

Док. Если мы къ обѣимъ частямъ данной пропорціи прибавимъ по ± 1, то получаемъ:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1.$$

а приведя каждую часть къ общему знаменателю

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d},$$

что и требовалось доказать.

275 **Теорема.** Сумма или разность членовъ перваго отношенія пропорціи относится къ его предыдущему члену, какъ соотвѣтственно сумма или разность второго отношенія къ его предыдущему.

Предп. $a : b = c : d$

Утв. $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$

Док. По предыдущей теоремѣ изъ данной пропорціи

$$a : b = c : d$$

получается слѣдующая:

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

Въ обѣихъ этихъ пропорціяхъ можно по теоремѣ **170** переставить средніе члены:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Изъ послѣднихъ же двухъ пропорцій по теор. **VI** слѣдуетъ

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}.$$

Переставивъ и тутъ средніе члены, мы и получаемъ

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}.$$

Слѣдствіе. Сумма или разность членовъ перваго отношенія пропорціи относится соотвѣтственно къ суммѣ или разности членовъ второго отношенія, какъ предыдущій членъ перваго отношенія къ предыдущему второго, или какъ послѣдующій членъ перваго отношенія къ послѣдующему второго. 176 

§ 464. **Теорема.** Сумма членовъ перваго отношенія пропорціи относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія къ ихъ разности. 177

Предп. $a : b = c : d$

Утв. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Док. По теоремѣ **176** изъ данной пропорціи

$$a : b = c : d$$

слѣдуетъ:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$$

и

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c},$$

а отсюда по теоремѣ **VI**:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$$

и послѣ перестановки среднихъ членовъ:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

178 **Слѣдствіе.** Сумма членовъ перваго отношенія пропорціи относится къ суммѣ членовъ второго, какъ разность членовъ перваго отношенія къ разности членовъ второго.

IV. Системы пропорцій.

§465. **Разъясненіе понятія.** Иногда, напр., въ ариѳметикѣ при рѣшеніи задачъ на такъ называемое пропорціональное дѣленіе, приходится имѣть дѣло съ системами пропорцій. Такія системы часто соединяются въ одну составную пропорцію вида:

$$a : b : c : d : e : \ldots \quad m : n : p : q : r : \ldots,$$

которая, однако, не должна разсматриваться какъ одно уравненіе, а замѣняетъ собою систему нѣсколькихъ пропорцій. Такъ, напр., составная пропорція

$$a : b : c : d = m : n : p : q$$

замѣняетъ собою систему:

$$\begin{cases} a : b = m : n \\ b : c = n : p \\ c : d = p : q, \end{cases}$$

и заключаетъ въ себѣ также слѣдующія пропорціи, зависящія отъ приведенныхъ трехъ:

$$\begin{aligned} a : c &= m : p \\ a : d &= m : q \\ b : d &= n : q. \end{aligned}$$

Но можно было бы также сказать, что названная составная пропорція замѣняетъ собою систему:

$$\begin{cases} a : b = m : n \\ a : c = m : p \\ a : d = m : q. \end{cases}$$

равносильную приведенной выше, или же еще всякую изъ равносильныхъ ей, которыя мы можемъ получить, если изъ числа 3 пропорцій первой системы и названныхъ 3 пропорцій, зависящихъ отъ нихъ, возьмемъ 2 произвольныя и 3-ью отъ этихъ двухъ независимую.

Важно замѣтить, что тогда какъ *уравненію*

$$a : b : c : d = m : n : p : q$$

можетъ быть приданъ видъ:

$$\frac{a}{bcd} = \frac{m}{npq},$$

составную пропорцію

$$a : b : c : d = m : n : p : q$$

такъ преобразовать нельзя, такъ какъ она вообще не равенство, а представляетъ собою написанную особымъ способомъ систему уравненій.

При рѣшеніи же задачъ необходимо всегда имѣть въ виду, что составная пропорція выражаетъ собою систему стольких независимыхъ другъ отъ друга пропорцій, сколько по одну сторону отъ знака равенства стоитъ знаковъ дѣленія. Чтобы сдѣлать это болѣе явнымъ, можно такую пропорцію, на основаніи теоремы **170**, преобразовать въ рядъ равныхъ между собою отношеній. Напр., пропорцію

$$a : b : c : d = m : n : p : q$$

можно преобразовать такъ:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \frac{d}{q}.$$

Изъ послѣдней же строки и подобныхъ примѣровъ легко выводится правило, что рядъ равныхъ между собою отношеній представляетъ собою систему стольких независимыхъ другъ отъ друга пропорцій, сколько въ немъ насчитывается знаковъ равенства. Столько же потому въ немъ можетъ встрѣчаться неизвѣстныхъ *).

§ 466. Обобщенія теоремъ о производныхъ пропорціяхъ.

Теорема. Сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ нѣсколькихъ равныхъ между собою отношеній относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ любой изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему. 

Предп. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_k}{b_k} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

Утв. $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k + \dots + b_n} = \frac{a_k}{b_k}$

---

*) Въ задачахъ   пропорціональное дѣленіе бываетъ дано кромѣ пропорцій еще одно условіе, почему тамъ неизвѣстныхъ бываетъ однимъ больше, чѣмъ пропорцій

Док. Численное значеніе предположенныхъ равными между собою отношеній $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и т. д. обозначимъ буквою q. Въ такомъ случаѣ по опредѣленію **53*** должно быть:

$$\begin{aligned} a_1 &= q\ b_1 \\ a_2 &= q\ b_2 \\ a_3 &= q\ b_3 \\ &\ \vdots \\ a_k &= q\ b_k \\ &\ \vdots \\ a_n &= q\ b_n \end{aligned}$$

Сложивъ [§ 9] эти равенства и вынеся затѣмъ общаго множителя за скобки, мы получаемъ:

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+\cdots+a_n=q(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_k+\cdots+b_n).$$

Слѣдовательно, по опредѣленію **53***, (или по теоремѣ **145**)

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_k+\cdots+b_n}=q$$

или

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_k+\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_k}{b_k}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

Чрезъ перестановку же въ этой пропорціи среднихъ членовъ получается слѣдующая теорема:

180 **Слѣдствіе.** Сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ ряда равныхъ между собою отношеній относится къ одному изъ этихъ членовъ, какъ сумма всѣхъ послѣдующихъ членовъ къ соотвѣтственному послѣдующему.

§ 467. **Дальнѣйшія обобщенія.** Тѣмъ же способомъ, какъ теорема **179**, легко доказывается слѣдующая болѣе общая:

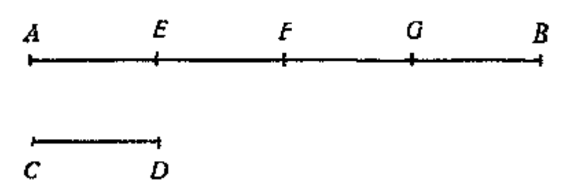
Теорема. Если данъ рядъ равныхъ между собою отношеній, то сумма ихъ предыдущихъ членовъ, умноженныхъ каждый на произвольное число, относится къ суммѣ послѣдующихъ, умноженныхъ каждый соотвѣтственно на то же число, какъ любой изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему.

Чрезъ перестановку же среднихъ членовъ получается легко формулируемое обобщеніе теоремы **180**.

V. Измѣреніе и отношеніе величинъ.

§ 468 **Отношеніе величинъ.** Сравниваютъ между собою способами, указанными въ § 448, не только числа, но и сплошныя величины [§ 1], и даже числа обыкновенно именно ради сравненія величинъ, выраженныхъ этими числами. Такое сравненіе величинъ можетъ производиться или непосредственно или при посредствѣ пріема, называемаго *измѣреніемъ* [ср. § 4]. Нагляднѣе всего можно показать примѣры этихъ способовъ сравненія на прямыхъ отрѣзкахъ.

Положимъ, что мы желаемъ сравнить между собою длину прямыхъ отрѣзковъ AB и CD.



Отложивъ на отрѣзкѣ AB отрѣзокъ AE равный CD, мы видимъ, что AB на EB больше CD, а разность $AB - CD = EB$ можно назвать ариѳметическимъ отношеніемъ отрѣзковъ AB и CD.

Отложивъ же на AB еще отрѣзки EF и FG равные CD и убѣдившись чрезъ нанесеніе на AB еще разъ отъ G вправо отрѣзка CD, что GB также равняется CD, мы узнаемъ, что AB ровно въ 4 раза длиннѣе CD или что CD содержится въ AB ровно 4 раза. Это выражается равенствомъ

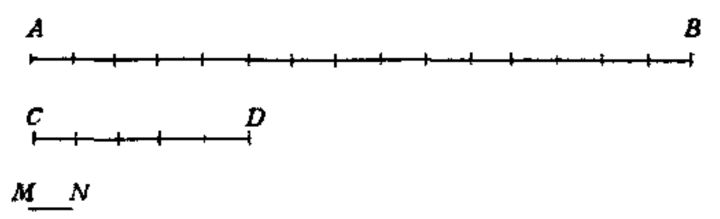
$$AB = 4CD,$$

но также и равенствомъ

$$\frac{AB}{CD} = 4;$$

и выраженіе $\frac{AB}{CD}$ или $AB : CD$ можно было бы назвать геометрическимъ отношеніемъ отрѣзковъ AB и CD; но обыкновенно его называютъ просто отношеніемъ ихъ.

§ 469. **Понятіе о мѣрѣ.** Убѣдившись послѣднимъ изъ описанныхъ



способовъ относительно отрѣзковъ AB, CD и MN, что

$$AB = 15MN$$

и

$$CD=5MN,$$

мы въ то же время пріобрѣли возможность узнать, во сколько разъ AB больше CD, или опредѣлить отношеніе $\frac{AB}{CD}$: такъ какъ CD въ 5 разъ больше MN, то CD должно содержаться въ AB въ 5 разъ меньшее количество разъ, чѣмъ MN, то есть $\frac{15}{5}$ разъ, другими словами,

$$\frac{AB}{CD}=\frac{15}{5}.$$

Изъ этого примѣра мы видимъ, что отношеніе двухъ отрѣзковъ, а равнымъ образомъ и двухъ величинъ вообще, можетъ быть опредѣлено при посредствѣ нѣкоторой третьей однородной съ ними величины, которая содержится въ нихъ обоихъ. Въ жизни мы сравниваемъ такъ линіи съ одною и тою же извѣстною всѣмъ линіею, которую называютъ футомъ, или съ нѣкоторою другою, избранною по соглашенію, которую называютъ метромъ, и т. д.; и послѣ такого сравненія мы имѣемъ возможность узнать, которая изъ сравненныхъ съ футомъ или метромъ и т. д. линій больше, и на сколько именно или во сколько именно разъ. Такъ сравниваютъ и вѣса тѣлъ съ нѣкоторыми избранными по соглашенію и извѣстными всѣмъ опредѣленными вѣсами, которые называются пудъ, фунтъ, золотникъ, граммъ, килограммъ и т. п., а послѣ такого сравненія пріобрѣтается возможность сравнить и вѣса этихъ тѣлъ между собою.

Эти величины, избираемыя по соглашенію для того, чтобы при посредствѣ ихъ (по предварительномъ опредѣленіи геометрическаго отношенія къ нимъ) можно было сравнивать между собою величины однородныя съ ними, называются мѣрами; и всякому изъ насъ извѣстно, что есть мѣры длины, поверхностей, объемовъ, времени, вѣса и т. д.

Но мы можемъ также для всякаго отдѣльнаго случая избирать особую произвольную мѣру, такъ что вообще понятіе о мѣрѣ можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленіе. Если при сравненіи двухъ однородныхъ величинъ A и M оказывается, что A въ a разъ больше M, то есть, что

$$A=aM$$

или, что то же самое,

$$\frac{A}{M}=a,$$

то M есть мѣра или можетъ быть названа мѣрою величины A, а α можно назвать числомъ измѣра величины A по отношенію къ мѣрѣ M *).

Въ примѣрѣ, приведенномъ въ предыдущемъ параграфѣ, можно отрѣзокъ CD назвать мѣрою, которою измѣренъ былъ отрѣзокъ AB, при чемъ получилось число измѣра **4**. Въ примѣрѣ же, разсмотрѣнномъ въ началѣ этого параграфа, отрѣзки AB и CD имѣли *общую* мѣру MN, при чемъ числа измѣра отрѣзковъ AB и CD по отношенію къ ней были 15 и 5. Отношеніе же линій AB и CD оказалось равнымъ отношенію названныхъ чиселъ измѣра ихъ, что является частнымъ случаемъ слѣдующей общей математической истины.

§ 470. Важная математическая теорема. **181**

Теорема. Отношеніе двухъ величинъ, выраженныхъ въ одной и той же мѣрѣ, равняется отношенію ихъ чиселъ измѣра.

Предп. A, B и M однородныя величины;

α и β вещественныя числа;

$$A=\alpha M$$
$$B=\beta M.$$

Утв. $\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Док. Повтореніе величины и узнаваніе, сколько разъ величина содержится въ однородной ей, соотвѣтствуютъ умноженію и дѣленію чиселъ. Понятіе же объ этихъ дѣйствіяхъ нами расширены такъ, что эти дѣйствія могутъ производиться надъ всякаго рода числами. А такъ какъ «во столько то разъ больше» означаетъ умноженіе, а «во столько то разъ меньше» или «содержится столько-то разъ» означаетъ дѣленіе, то мы въ правѣ разсуждать такъ:

По предположенію M содержится въ A α разъ. Такъ какъ по предположенію же B въ β разъ больше, чѣмъ M, то B должно содержаться въ A въ β разъ меньшее число разъ, чѣмъ M., т. е. $\frac{\alpha}{\beta}$ разъ.

А это можетъ быть выражено равенствомъ

$$A=\frac{\alpha}{\beta}B,$$

слѣдовательно, и равенствомъ

$$\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{\beta},$$

которое требовалось доказать.

*) Выраженіемъ «число измѣра» мы переводимъ общеупотребительное у нѣмецкихъ математиковъ слово „Maßzahl“

§ 471. **Опредѣленіе отношенія при помощи измѣренія.** При дальнѣйшихъ разсужденіяхъ о пріемахъ, которые должно примѣнять при измѣреніи одной величины другою (однородною, конечно,) или при опредѣленіи отношенія двухъ величинъ, мы ограничимся областью прямыхъ отрѣзковъ, причемъ уже напередъ можно предвидѣть, что выводы, къ которымъ мы придемъ, должны остаться въ силѣ и для всякихъ другихъ величинъ.

Положимъ, что отрѣзки EF и CD измѣряются отрѣзкомъ MN и оказывается, что

$$EF=17MN$$

и

$$CD=5MN$$

E H I K F

C L D

M N

Поступая, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, мы получили бы

$$\frac{EF}{CD}=\frac{17}{5}$$

или

$$\frac{EF}{CD}=3\frac{2}{5}$$

или

$$EF=3\frac{2}{5}CD.$$

Смыслъ же послѣднихъ равенствъ, очевидно, тотъ, что отрѣзокъ CD въ отрѣзкѣ EF не содержится, что послѣ того, какъ отрѣзокъ CD будетъ отложенъ на EF 3 раза, получится остатокъ KF меньшій, чѣмъ CD, и что отрѣзокъ равный одной пятой части отрѣзка CD (выражаясь короче, $\frac{1}{5}CD$), содержится въ названномъ остаткѣ еще 2 раза.

Если бы мы безъ помощи отрѣзка MN стали сравнивать между собою отрѣзки EF и CD непосредственно, то, отложивъ одинъ разъ CD на EF, мы получили бы отрѣзокъ EH, а отложивъ его другой и третій разъ, еще отрѣзки HI и IK и послѣ этого остатокъ KF. Откладывая затѣмъ одинъ разъ за другимъ отрѣзокъ KF на CD, мы получили бы уже послѣ 2 разъ оста-

токъ LD меньшій, чѣмъ KF. Откладывая же, наконецъ, еще LD на KF, мы убѣдились бы, что

$$KF = 2LD,$$

и, слѣдовательно,

$$CD = 2KF + LD = 2\,.\,2LD + LD = 5LD$$

и

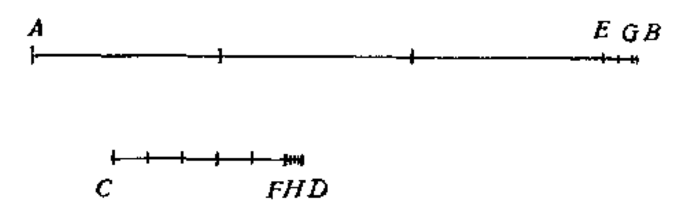
$$EF = 3CD + KF = 3\,.\,5LD + 2LD = 17LD$$

а потому

$$\frac{EF}{CD} = \frac{17LD}{5LD} = \frac{17}{5}.$$

Послѣдній примѣръ намъ даетъ указаніе, какъ должно поступить, чтобы найти отношеніе двухъ произвольныхъ отрѣзковъ, не измѣряя ихъ при помощи нѣкоторой *данной* мѣры, а отыскивая для нихъ общую наибольшую мѣру при помощи пріемовъ вполнѣ соотвѣтствующихъ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя способомъ послѣдовательныхъ дѣленій.

§ 472. **Отысканіе общей наибольшей мѣры.** Положимъ, что требуется отыскать отношеніе отрѣзка AB, который назовемъ a, къ отрѣзку CD



который назовемъ b. Оказывается, что CD можно отложить на AB 3 раза, послѣ чего получается остатокъ EB меньшій, чѣмъ CD, который назовемъ c. Затѣмъ мы откладываемъ c на b, при чемъ узнаемъ, что первый изъ этихъ отрѣзковъ содержится во второмъ 5 разъ и получается еще остатокъ FD, который назовемъ d. Такимъ же образомъ мы продолжаемъ откладывать каждый послѣдній остатокъ на предыдущемъ, называя новые остатки GB буквою e и HD буквою f. Какъ бы точны и хороши ни были примѣняемые для измѣренія инструменты, въ концѣ концовъ остатки дѣлаются такъ малы, что продолжать откладывать ихъ описаннымъ способомъ дѣлается невозможнымъ. Единственно, что еще можно послѣ этого сдѣлать, это на глазомѣръ опредѣлить, сколько разъ послѣдній остатокъ содержится въ предпослѣднемъ. Такъ относительно остатка f положимъ, что онъ содержится въ остаткѣ e ровно 2 раза. Закончивъ этимъ производившіяся нами механическія дѣйствія, мы результатъ ихъ можемъ выразить слѣдующими равенствами:

$$a = 3b + c$$
$$b = 5c + d$$
$$c = 2d + e$$
$$d = 3e + f$$
$$e = 2f.$$

Въ этихъ равенствахъ мы всѣ правыя части можемъ выразить чрезъ f, если произведемъ подстановки, начавъ съ предпослѣдняго равенства и продолжая ихъ послѣдовательно до перваго. Такъ получается:

$$\begin{aligned} d &= 3 \,.\, 2f + f = 7f \\ c &= 2 \,.\, 7f + 2f = 16f \\ b &= 5 \,.\, 16f + 7f = 87f \\ a &= 3 \,.\, 87f + 16f = 277f \end{aligned}$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ мы теперь узнаемъ, что

$$\frac{a}{b} = \frac{277}{87}$$

или что

$$a = \frac{277}{87} b = 3\frac{16}{87} b$$

Отрѣзокъ f, найденный нами описаннымъ способомъ, есть *наибольшая общая мѣра* отрѣзковъ a и b, а способъ этотъ назовемъ «общимъ» по аналогіи съ обозначеніемъ тѣмъ же названіемъ способа отысканія общаго наибольшаго дѣлителя при помощи послѣдовательныхъ дѣленій.

Характеръ вычисленій, которыми заканчивается отысканіе разсмотрѣннымъ способомъ отношенія, настолько выясненъ послѣднимъ примѣромъ, что мы въ правѣ сдѣлать слѣдующій выводъ:

При отысканіи общимъ способомъ отношенія 2 отрѣзковъ (и вообще 2 величинъ) возможны только 2 случая:

1) когда отношеніе отрѣзковъ есть *цѣлое* число, то меньшій изъ нихъ долженъ содержаться въ большемъ сразу же безъ остатка; и 2) когда меньшій изъ данныхъ отрѣзковъ не содержится въ большемъ сразу же безъ остатка, то названнымъ способомъ можетъ быть получено только *дробное* значеніе отношенія, но не какое-либо другого рода число.

§ 473. **Ирраціональное отношеніе и несоизмѣримыя величины.** Въ § 138 подробно было разъяснено, что ни однимъ, ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ не можетъ быть выражено, во сколько разъ гипотенуза прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника больше его катета, и что дѣлается это возможнымъ только по введеніи новаго рода чиселъ, а именно чиселъ ирраціональныхъ. Послѣ же обогащенія нашего запаса чиселъ этого рода числами говорятъ, что гипотенуза BC такого треугольника въ $\sqrt{2}$ разъ больше катета AC, другими словами, что

$$BC = \sqrt{2} \,.\, AC.$$

И по аналогіи съ разсмотрѣнными уже случаями мы должны въ этомъ случаѣ говорить, что отношеніе

$$\frac{BC}{AC} = \sqrt{2}.$$

Если бы мы стали опредѣлять отношеніе $\frac{BC}{AC}$ способомъ, изложеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, то въ результатѣ смогли бы получить только дробь, которая, конечно, никоимъ образомъ не могла бы оказаться равною $\sqrt{2}$. Но при этомъ мы замѣтили бы, что процессъ опредѣленія отношенія намъ пришлось бы ранѣе или позднѣе прекратить, какъ въ примѣрѣ, разсмотрѣнномъ въ предыдущемъ параграфѣ, вслѣдствіе того, что инструменты и глазъ въ концѣ концовъ перестали бы давать отчетливые результаты.

Если же мы, послѣ отложенія (возможно наибольшее количество разъ) меньшаго отрѣзка на большемъ, остатка на меньшемъ, и, послѣ всякаго слѣдующаго послѣ этого откладыванія остатка на предыдущемъ остаткѣ, буденъ вычислять искомое отношеніе, то получимъ рядъ приближенныхъ значеній $\sqrt{2}$, которыя удастся довести до тѣмъ большей степени точности, чѣмъ точнѣе будутъ примѣняемые нами инструменты и наша работа. И о степени точности, достигнутой при этомъ, и о точности построенія даннаго прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника дастъ намъ возможность судить сравненіе получающихся дробей съ десятичною дробью, выражающею приближенно $\sqrt{2}$ (см. § 160).

Такъ же мы во всѣхъ случаяхъ, когда отношеніе двухъ величинъ можетъ быть выражено только ирраціональнымъ числомъ, этого числа путемъ отыскапія общей мѣры не найдемъ, а найдемъ этимъ способомъ только приближенныя значенія этого отношенія. А изъ этого мы заключаемъ, что общей мѣры двѣ величины, которыхъ отношеніе можетъ быть выражено только ирраціональнымъ числомъ, и имѣть не могутъ, такъ какъ, если бы такая мѣра существовала, то отношеніе непремѣнно, какъ на это указано было уже въ концѣ предыдущаго параграфа, выражалось бы дробью. А изъ этого далѣе слѣдуетъ, что ***есть величины, не имѣющія общей мѣры.***

Для такихъ величинъ, равно какъ и для величинъ, имѣющихъ общую мѣру, существуютъ особыя обозначенія, которыя мы приводимъ вмѣстѣ съ выводами изъ разсужденій этого параграфа.

Опредѣленіе. Двѣ величины, имѣющія общую мѣру, называются *соизмѣримыми.*

Слѣдствіе 1. Если отношеніе двухъ величинъ равно раціональному числу (цѣлому числу или дроби), то онѣ соизмѣримы.

Слѣдствіе 2. Отношеніе двухъ соизмѣримыхъ величинъ всегда раціонально.

Опредѣленіе. Двѣ величины, не имѣющія общей мѣры, называются *несоизмѣримыми.*

Слѣдствіе 1. Если отношеніе двухъ величинъ равно ирраціональному числу, то онѣ несоизмѣримы.

Слѣдствіе 2. Отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ величинъ всегда ирраціонально

§ 474. **Три случая отношеній.** Важно все изложенное въ послѣднихъ параграфахъ резюмировать еще такъ:

1) Если изъ двухъ величинъ одна содержится въ другой одинъ или нѣсколько разъ безъ остатка, то отношеніе этихъ величинъ выражается ***цѣлымъ числомъ.***

2) Если изъ двухъ величинъ одна въ другой безъ остатка не содержится, но эти величины имѣютъ общую мѣру, то отношеніе этихъ величинъ выражается ***дробью.***

3) Если отношеніе двухъ величинъ можетъ быть выражено только ***ирраціональнымъ числомъ,*** то эти двѣ величины общей мѣры не имѣютъ: онѣ несоизмѣримы.

Примѣчаніе. Практически никакое измѣреніе не можетъ быть произведено безъ погрѣшностей, слѣдовательно, невозможно и безошибочное отысканіе общей мѣры при помощи инструментовъ (циркуля, линейки, вѣсовъ и т. п.). Слѣдовательно, и вопросъ, соизмѣримы ли двѣ данныя величины или нѣтъ, практически не можетъ быть никогда рѣшенъ. О соизмѣримости или несоизмѣримости мы можемъ судить только по указанной или извѣстной зависимости величинъ другъ отъ друга (на основаніи геометрическихъ теоремъ или физическихъ законовъ и т. п.).

VI. Понятіе о пропорціональности.

§ 475. **Зависимыя другъ отъ друга величины.** Если между двумя величинами существуетъ такая связь, что вслѣдствіе измѣненія одной измѣняется и другая, то говорятъ, что эти величины зависятъ одна отъ другой. Всякому извѣстно, что при нагрѣваніи столбъ ртути въ термометрѣ удлиняется, и потому можно сказать, что длина этого столба ртути зависитъ отъ степени нагрѣванія термометра. Вообще объемъ тѣлъ при измѣненіи температуры измѣняется, и потому мы можемъ его назвать величиною, зависящею отъ температуры. Равнымъ образомъ глубина погруженія въ воду корабля зависитъ отъ величины принятаго имъ груза и т. д.

Самые простые виды зависимости двухъ величинъ другъ отъ друга тѣ, которые носятъ названія простыхъ прямой и обратной пропорціональности.

§ 476. **Прямая пропорціональность.**

Опредѣленіе. Прямо пропорціональными или просто «пропорціональными» другъ другу называются величины, зависящія другъ отъ друга такъ, что во сколько разъ увеличится одна изъ нихъ, во столько же разъ увеличится и другая.

Это названіе такимъ величинамъ дано по той причинѣ, что зависимость между ними можетъ быть выражена при помощи пропорціи, такъ какъ от-

ношеніе двухъ значеній одной изъ нихъ всегда равно отношенію соотвѣтственныхъ значеній другой.

Задачи на такъ называемое тройное правило содержатъ обиліе примѣровъ пропорціональныхъ величинъ

§ 477. Обратная пропорціональность.

Опредѣленіе. Обратно пропорціональными другъ другу называются величины, зависящія другъ отъ друга такъ что во сколько разъ увеличится одна изъ нихъ, во столько разъ уменьшится другая.

Примѣромъ величинъ обратно пропорціональныхъ другъ другу могутъ служить число рабочихъ, необходимыхъ для исполненія нѣкоторой работы, и время, въ которое она будетъ совершена такъ какъ на это понадобится во столько разъ меньше времени, во столько разъ больше будетъ рабочихъ.

Если работа совершается u рабочими въ v дней и та же работа такими же a рабочими въ b дней, то v должно быть во столько же разъ меньше b, во сколько разъ u больше a. Но v меньше b въ $\frac{b}{v}$ разъ, u же больше a въ $\frac{u}{a}$ разъ

Слѣдовательно,

$$\frac{b}{v} = \frac{u}{a}.$$

Изъ этого примѣра мы видимъ, что въ случаѣ обратной пропорціональности двухъ величинъ отношеніе двухъ значеній одной изъ нихъ равно ***обратному*** *отношенію соотвѣтственныхъ двухъ значеній другой.*

И примѣровъ обратно пропорціональныхъ величинъ даютъ задачи на тройное правило въ изобиліи.

§ 478 Выраженіе пропорціональности безъ помощи пропорціи.

Если b фунтовъ товара стоятъ a рублей и x фунтовъ того же товара стоятъ y рублей, то пропорціональность названныхъ въ этомъ примѣрѣ величинъ можетъ быть выражена пропорціею

$$\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$$

Изъ нея же слѣдуетъ, что

$$y = \frac{a}{b} \cdot x.$$

Изъ названнаго выше условія, что b фунтовъ товара стоятъ a рублей, слѣдуетъ, что 1 фунтъ его стоитъ $\frac{a}{b}$ рублей. Такъ мы видимъ, что частное $\frac{a}{b}$ имѣетъ особый смыслъ: оно означаетъ стоимость 1 фунта товара, которая вводится какъ новое понятіе, есть новая величина, и называется цѣною

Если мы ее, т. е. значеніе частнаго, обозначимъ буквою c, то стоимость всего товара выразится формулою

$$y = cx.$$

Это равенство также выражаетъ пропорціональность стоимости всего товара его количеству, такъ какъ изъ него видно, что во сколько разъ станетъ больше x, во столько же разъ увеличится и y; но въ то же время мы изъ него видимъ, что стоимость товара пропорціональна также цѣнѣ.

Важно въ заключеніе отмѣтить, что мы здѣсь познакомились съ однимъ изъ способовъ, какъ создаются новыя, производныя величины Такимъ же образомъ, какимъ произошло понятіе о цѣнѣ, создались и величины, называемыя скоростью, ускореніемъ, плотностью, плотностью электричества и т. д., и можетъ быть создано сколько угодно новыхъ величинъ.

§ 479. **Выраженіе обратной пропорціональности безъ помощи пропорціи.** Изъ пропорціи

$$\frac{b}{v} = \frac{u}{a},$$

выведенной въ § 477, слѣдуетъ, что

$$v = \frac{ab}{u}.$$

Изъ этого равенства не менѣе отчетливо или даже отчетливѣе, чѣмъ изъ пропорціи, видно что величина v обратно пропорціональна величинѣ u *), такъ какъ оно ясно показываетъ, что во сколько разъ u станетъ больше, во столько разъ уменьшится v.

Если мы ту работу, которую 1 рабочій можетъ совершить въ 1 день, назовемъ «рабочимъ днемъ», то произведеніе ab выразитъ въ «рабочихъ дняхъ» всю работу, которая должна быть сдѣлана. И если мы ab замѣнимъ буквою c, то послѣднее наше равенство приметъ видъ

$$v = \frac{c}{u},$$

изъ котораго видно еще кромѣ того, что число рабочихъ, необходимое для исполненія нѣкоторой работы, пропорціонально величинѣ этой работы.

Важно здѣсь замѣтить, что мы въ этомъ параграфѣ познакомились еще съ другимъ способомъ, какъ создаются новыя, производныя величины.

Подобно введенной нами здѣсь величинѣ созданы величины, называемыя въ физикѣ работою, количествомъ движенія, количествомъ теплоты, и другія

---

*) Такъ мы будемъ въ подобныхъ случаяхъ сокращенно выражаться и впредь, вмѣсто того, чтобы точнѣе говорить: «величина, которой число измѣра есть v», и «величина, которой число измѣра есть u».

§ 480. **Сложная пропорціональность.** Сказанное въ послѣднихъ двухъ параграфахъ не трудно распространить на произвольное число величинъ. Такъ, напр., если для вычисленія какой-либо величины существуетъ формула

$$y=\frac{abcd}{mnp},$$

то изъ нея ясно видно, что эта величина пропорціональна величинѣ a *), пропорціональна также величинѣ b и пропорціональна еще каждой изъ величинъ c и d, каждой же изъ величинъ m, n и p обратно пропорціональна

Разсужденія въ этомъ и предыдущихъ двухъ параграфахъ приводятъ насъ къ заключеніямъ, которыя мы, выражаясь сокращенно, въ родѣ того, какъ въ § 479 (см. тамъ подстрочное примѣчаніе), можемъ формулировать такъ.

1) *Произведеніе пропорціонально каждому изъ его сомножителей* (конечно, буквенныхъ, могущихъ принимать различныя значенія)

2) *Частное пропорціонально дѣлимому и обратно пропорціонально дѣлителю.*

А отсюда слѣдуетъ въ общемъ видѣ **правило**, как ъ указывается прямая и обратная пропорціональность нѣсколькимъ величинамъ:

Частное двухъ произведеній пропорціонально каждому изъ сомножителей въ дѣлимомъ и обратно пропорціонально каждому изъ сомножителей въ дѣлителѣ.

§ 481. **Коэффиціентъ пропорціональности.** Если въ формулѣ

$$y=cx,$$

выведенной въ § 478, c останется числомъ, выражающимъ въ рубляхъ цѣну одного фунта товара, стоимость же товара мы пожелаемъ выразить въ копѣйкахъ, то послѣднюю придется выразить формулою:

$$y=100cx.$$

Если цѣна останется выраженною такъ же, количество же товара будетъ дано въ золотникахъ, то стоимость въ копѣйкахъ должно будетъ вычислять по формулѣ:

$$y=\frac{100}{96}cx,$$

которая послѣ сокращенія принимаетъ видъ:

$$y=\frac{25}{24}cx.$$

*) См. подстрочное примѣчаніе на предыдущей страницѣ.

Такъ мы видимъ, что передъ формулою cx появляется то одинъ, то другой множитель, въ зависимости отъ того, въ какихъ мѣрахъ выражены встрѣчающіяся въ ней величины. Эти мѣры могли бы быть и иностранныя, и отчасти русскія, отчасти иностранныя, и даже совершенно произвольныя, и при всякомъ новомъ выборѣ ихъ пришлось бы передъ cx ставить новаго множителя. Обозначивъ его, ради обобщенія, нѣкоторою буквою, напр., буквою k, мы стоимость товара могли бы обозначить формулою

$$y = kx,$$

которая выражаетъ, что, независимо отъ выбора мѣръ, стоимость товара пропорціональна и цѣнѣ его и количеству его. Множитель же k, которымъ снабжена наша формула для y и который ставится и передъ другими выраженіями, указывающими, какъ вычисляется величина по даннымъ другимъ величинамъ, отъ которыхъ она зависитъ, носитъ особое названіе:

Опредѣленіе. Коэффиціентомъ пропорціональности называется множитель передъ формулою, зависящій отъ мѣръ, въ которыхъ желательно считать выраженными встрѣчающіяся въ ней величины и величину, ею выраженную.

§ 482. **Примѣры болѣе сложной зависимости величинъ другъ отъ друга.** Обозначенія «пропорціональный» и «обратно пропорціональный» примѣняются также еще въ тѣхъ случаяхъ болѣе сложной зависимости величинъ другъ отъ друга, которые могутъ быть выражены *одночленами*.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ такой зависимости.

При свободномъ паденіи тѣло въ 2 секунды проходитъ путь въ 4 раза большій, чѣмъ въ 1 секунду, въ 3 секунды путь въ 9 разъ большій, чѣмъ въ 1 секунду, вообще въ t секундъ путь въ t^2 разъ большій, чѣмъ въ 1 секунду. Эту зависимость выражаютъ, говоря, что путь свободно падающаго тѣла *пропорціоналенъ квадрату времени*.

Освѣщеніе тѣла тѣмъ слабѣе, чѣмъ оно дальше отъ источника свѣта, причемъ сила освѣщенія дѣлается въ 4, 9, d^2 разъ меньше, если разстояніе освѣщаемаго предмета отъ свѣтового источника дѣлается въ 2, 3, d разъ больше. Эту зависимость выражаютъ, говоря, что интенсивность освѣщенія *обратно пропорціональна квадрату разстоянія* отъ источника свѣта.

Если длина маятника дѣлается въ 4, въ 9, въ 16, въ l разъ больше, то время, въ которое онъ совершаетъ одно колебаніе, дѣлается въ 2, въ 3, въ 4, въ $\sqrt{l}$ разъ больше. Эту зависимость времени, въ которое маятникъ совершаетъ одно качаніе, отъ длины маятника, выражаютъ, говоря, что время колебанія его *пропорціонально корню квадратному* изъ длины его.

Всѣ виды зависимости, перечисленные въ приведенныхъ примѣрахъ, могутъ быть изображены формулами и изъ нихъ однимъ взглядомъ усмотрѣны и быстрѣе мысленно вычитаны, чѣмъ при прочтеніи приведенныхъ выше предложеній.

Такъ, путь s, проходимый тѣломъ при свободномъ паденіи, пропорціональный, какъ уже сказано было, квадрату времени и пропорціональный еще величинѣ, которая называется ускореніемъ и которую обозначимъ буквою a, долженъ быть, при обозначеніи коэффиціента пропорціональности буквою k, выраженъ формулою

$$s = kat^2$$

Обозначивъ число свѣтовыхъ единицъ, содержащихся въ источникѣ свѣта (напр., число свѣчей) буквою n и коэффиціентъ пропорціональности въ этотъ разъ буквою c, мы можемъ интенсивность освѣщенія выразить формулою

$$I = c\frac{n}{d^2},$$

выражающею, какъ нельзя нагляднѣе, зависимость этой интенсивности и отъ величины n и отъ величины d.

Путемъ такого же, какъ въ предыдущихъ примѣрахъ, разсужденія мы получаемъ, обозначивъ коэффиціентъ пропорціональности буквою C, для времени t колебанія маятника формулу

$$t = C\sqrt{l}.$$

§ 483. **Выраженіе въ словахъ болѣе сложной зависимости, указанной формулою.** Предыдущимъ параграфомъ можно считать въ достаточной степени разъясненнымъ, какъ должно переводить на слова и болѣе сложныя одночленныя формулы. Такъ, напр., если какая-либо величина должна вычисляться по формулѣ

$$y = k\cdot\frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c^4\sqrt[5]{d}},$$

то зависимость ея отъ величинъ, которыхъ числа измѣра въ общемъ видѣ встрѣчаются въ формулѣ, должна быть выражена въ словахъ такъ: Величина y *) пропорціональна квадрату величины a, пропорціональна корню кубичному изъ величины b, обратно пропорціональна 4-й степени величины c и обратно пропорціональна корню 5-й степени изъ величины d.

О k, какъ коэффиціентѣ пропорціональности, при этомъ не слѣдуетъ упоминать.

Наоборотъ, если зависимость подобнымъ образомъ выражена въ словахъ, то ее легко сразу же выразить формулою.

---

*) Такъ мы выражаемся сокращенно вмѣсто того, чтобы точнѣе говорить «Величина, которой число измѣра обозначено буквою y, пропорціональна квадрату величины, которой число измѣра обозначено буквою a» и т. д.

ГЛАВА XI.

Квадратное уравненіе.

§ 484. **Общій и простѣйшій виды полнаго квадратнаго уравненія.** Чтобы привести алгебраическое уравненіе съ 1 неизвѣстнымъ къ ординарному виду, нужно, какъ это разъяснено было въ I главѣ этой части книги, произвести слѣдующія преобразованія этого уравненія:

1) раскрыть скобки,

2) освободить уравненіе отъ знаменателей,

3) перенести всѣ члены въ одну (обыкновенно лѣвую) часть уравненія,

4) сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ въ численномъ уравненіи, а въ буквенномъ произвести соотвѣтственное вынесеніе неизвѣстнаго за скобки.

Если послѣ всѣхъ этихъ преобразованій (NB:2-го безъ введенія постороннихъ рѣшеній) въ той части уравненія, въ которую перенесены были всѣ члены, окажется многочленъ второй степени относительно неизвѣстнаго, то рѣшаемое уравненіе будетъ 2-й степени или квадратное уравненіе. Слѣдовательно, квадратнымъ будетъ всякое уравненіе, которое послѣ приведенія въ порядокъ [§ 374] принимаетъ видъ

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

гдѣ A, B и C могутъ быть и опредѣленныя числа, которыя пока для упрощенія будемъ предполагать вещественными, и любыя выраженія, не содержащія неизвѣстнаго.

Уравненіе

$$Ax^2+Bx+C=0$$

будемъ называть общимъ видомъ квадратнаго уравненія. Въ немъ, какъ и во всякомъ алгебраическомъ уравненіи, приведенномъ къ ординарному виду, членъ, не содержащій неизвѣстнаго, слѣд., членъ C, называется свободнымъ членомъ. Иногда же его называютъ, наравнѣ съ коэффиціентами A и B, также коэффиціентомъ квадратнаго уравненія.

Если ни B, ни C не равны 0, то уравненіе называется полнымъ квадратнымъ уравненіемъ, въ противномъ же случаѣ неполнымъ.

Раздѣливъ общій видъ квадратнаго уравненія на A, мы получаемъ равносильное ему уравненіе

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0$$

и убѣждаемся такимъ образомъ, что каждое квадратное уравненіе можно еще преобразовать такъ, что въ немъ коэффиціентъ при x^2 будетъ 1. Обозна-

чивъ для упрощенія $\frac{B}{A}$ буквою p и $\frac{C}{A}$ буквою q, мы видимъ, что ***самый простой общій видъ квадратнаго уравненія есть***

$$x^2+px+q=0.$$

Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію полнаго квадратнаго уравненія въ томъ или другомъ общемъ видѣ, разсмотримъ, какъ оно рѣшается въ тѣхъ болѣе простыхъ частныхъ случаяхъ, когда въ первомъ изъ приведенныхъ видовъ его или $B=0$, или $C=0$, или $B=C=0$, но во всѣхъ случаяхъ при A неравномъ 0, такъ какъ при условіи, что $A=0$, наше уравненіе перестанетъ быть квадратнымъ.

§ 485. **Случай неполнаго квадратнаго уравненія, когда $B=0$.** При условіи, названномъ въ этомъ заголовкѣ, мы имѣемъ дѣло со слѣдующимъ неполнымъ квадратнымъ уравненіемъ.

$$Ax^2+C=0$$

Чтобы рѣшить его, нужно C и A перенести въ правую часть. Такъ мы получаемъ:

$$Ax^2=-C$$
$$x^2=-\frac{C}{A},$$

а отсюда, по опредѣленію **96ª**, 2 рѣшенія уравненія [§ 182]:

$$x_1=+\sqrt{-\frac{C}{A}}$$
$$x_2=-\sqrt{-\frac{C}{A}}.$$

Эти корни рѣшеннаго уравненія будутъ вещественными только при условіи, что C и A означаютъ числа съ противоположными знаками. Если же эти буквы означаютъ числа съ одинаковыми знаками, то оба корня уравненія будутъ мнимыми и могли бы быть, какъ это указано въ XXV главѣ I части книги, представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$x_1=+\sqrt{(-1)\cdot\frac{C}{A}}=+\sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{C}{A}}=+i\sqrt{\frac{C}{A}}$$
$$x_2=-\sqrt{(-1)\cdot\frac{C}{A}}=-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{C}{A}}=-i\sqrt{\frac{C}{A}}.$$

Не трудно убѣдиться чрезъ подстановку, что и x_1 и x_2 удовлетворяютъ рѣшенному уравненію

$$Ax^2+C=0,$$

все равно, означают ли выраженія $+\sqrt{-\frac{C}{A}}$ и $-\sqrt{-\frac{C}{A}}$ вещественныя или мнимыя числа.

Примѣры.

Задача 1. Рѣшить уравненіе

$$\frac{3}{37}=\frac{8}{15x^2-8}.$$

Рѣшеніе.

Уничтоживъ знаменателей, мы получаемъ:

$$45x^2-24=296,$$

откуда

$$45x^2=320$$

$$x^2=\frac{320}{45}=\frac{64}{9},$$

слѣд.,

$$x=\pm\frac{8}{3}$$

или

$$x_1=+2\frac{2}{3},\quad x_2=-2\frac{2}{3}.$$

Задача 2. Рѣшить уравненіе

$$x^2+49=0.$$

Рѣшеніе.

$$x^2=-49$$

$$x=\pm\sqrt{-49}$$

или

$$x=\pm\sqrt{49.(-1)}=\pm\sqrt{49}\sqrt{-1}=\pm 7i$$

или

$$x_1=+7i,\quad x_2=-7i.$$

Задача 3. Рѣшить уравненіе

$$\frac{3}{x-1}=\frac{9}{x-2}+2.$$

Рѣшеніе.

Умноживъ уравненіе на $(x-1)(x-2)$, чтобы освободить его отъ знаменателей, мы получаемъ

$$3(x-2)=9(x-1)+2(x-1)(x-2),$$

а раскрывъ скобки:

$$3x-6=9x-9+2x^2-6x+4.$$

Отсюда же мы находимъ

$$2x^2+1=0$$
$$2x^2=-1$$
$$x^2=-\frac{1}{2}$$
$$x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$$

или

$$x_1=+\frac{i}{\sqrt{2}}$$
$$x_2=-\frac{i}{\sqrt{2}}.$$

§ 486. **Случай неполнаго квадратнаго уравненія, когда $C=0$.** При условіи, названномъ въ этомъ заголовкѣ, мы имѣемъ дѣло со слѣдующимъ неполнымъ квадратнымъ уравненіемъ:

$$Ax^2+Bx=0.$$

Вынеся въ лѣвой части его x множителемъ за скобки, мы получаемъ

$$x(Ax+B)=0,$$

послѣ чего, по теоремѣ **452**, видно, что рѣшаемое уравненіе можетъ быть удовлетворено двоякимъ образомъ, а именно, или значеніемъ

$$x=0$$

или значеніемъ x, которое превращаетъ $Ax+B$ въ 0, другими словами корнемъ уравненія

$$Ax+B=0,$$

т. е. значеніемъ

$$x=-\frac{B}{A}$$

Итакъ, разсмотрѣнное нами неполное квадратное уравненіе имѣетъ 2 корня, а именно:

$$x_1=0$$

$$x_2=-\frac{B}{A}$$

§ 487. **Случай неполнаго квадратнаго уравненія, когда** $B=C=0$. При названномъ условіи мы имѣемъ дѣло съ уравненіемъ

$$Ax^2=0,$$

которое при условіи, что $A\neq 0$, по теоремѣ **45ª**, можетъ быть удовлетворено только значеніемъ

$$x=0$$

Но разсматривая уравненіе

$$Ax^2=0$$

какъ частный случай уравненія

$$Ax^2+C=0,$$

мы видимъ, что чѣмъ болѣе C будетъ приближаться къ 0, тѣмъ менѣе будутъ отличаться другъ отъ друга и отъ 0 корни послѣдняго уравненія [ихъ разность равна $2\sqrt{-\frac{C}{A}}$] и сливаются, наконецъ, при $C=0$, другъ съ другомъ и съ нулемъ. Потому принято говорить, что уравненіе

$$Ax^2=0$$

имѣетъ, какъ и первые два вида неполнаго квадратнаго уравненія, два корня, но равные между собою, а именно:

$$x_1=x_2=0.$$

§ 488. **Примѣръ, наводящій на способъ рѣшенія полнаго квадратнаго уравненія.** По примѣру рѣшенія уравненія

$$Ax^2+C=0$$

[§ 485] можетъ быть рѣшено уравненіе

$$(x-3)^2-16=0.$$

Если мы въ немъ членъ -16 перенесемъ изъ лѣвой части въ правую, то получимъ уравненіе

$$(x-3)^2=16,$$

изъ котораго, извлекая корень, находимъ [§ 132] два значенія разности $x-3$ такъ какъ оно будетъ удовлетворено и въ томъ случаѣ, когда мы возьмемъ

$$x-3=+4$$

и въ томъ случаѣ, когда мы возьмемъ

$$x-3=-4$$

Рѣшая послѣднія два уравненія 1-й степени, мы находимъ 2 корня рѣшавшагося уравненія

$$(x-3)^2-16=0,$$

а именно

$$x_1=+7 \quad x_2=-1$$

Раскрывъ же въ этомъ рѣшенномъ уравненіи скобки и сдѣлавъ приведеніе, мы получили бы

$$x^2-6x-7=0 \qquad (\alpha)$$

то есть, *полное* квадратное уравненіе. Обратное преобразованіе его въ первоначальный видъ, даетъ намъ указаніе, къ какимъ пріемамъ слѣдуетъ прибѣгать вообще, чтобы рѣшить полное квадратное уравненіе. Очевидно, нужно въ уравненіи (α) перенести -7 въ правую часть и прибавить къ обѣимъ частямъ его число 9, превращающее лѣвую изъ нихъ въ полный квадратъ разности $x-3$. Такъ получается:

$$x^2-6x+9=7+9$$

или

$$(x-3)^2=16,$$

то есть уравненіе, рѣшенное уже нами.

Такимъ же образомъ въ каждомъ квадратномъ уравненіи можно часть, содержащую неизвѣстное, представить въ видѣ полнаго квадрата бинома и при помощи этого пріема рѣшеніе полнаго квадратнаго уравненія свести къ рѣшенію того случая неполнаго квадратнаго уравненія, который разсмотрѣнъ былъ въ § 485.

Этимъ же пріемомъ мы можемъ воспользоваться и для того, чтобы рѣшить полное квадратное уравненіе въ обоихъ общихъ видахъ.

§ 489. **Рѣшеніе уравненія $x^2+px+q=0$.** Перенеся членъ q въ правую часть, представимъ лѣвую въ видѣ квадрата бинома, имѣющаго первымъ членомъ x. Для этого мы членъ px должны будемъ принять за удвоенное произведеніе члена бинома x на второй его членъ, который, слѣдовательно, долженъ быть $\frac{p}{2}$. Потому, если мы послѣ перенесенія q въ правую часть

къ обѣимъ частямъ уравненія прибавимъ квадратъ названнаго втораго члена, то лѣвая превратится въ полный квадратъ. Такъ получается

$$x^2+px=-q$$

или

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x=-q$$

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

откуда

$$x+\frac{p}{2}=+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ или } x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

слѣдовательно,

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

или, какъ вмѣсто этого пишутъ,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Полученное вмѣстѣ съ этою формулою **правило для вычисленія корней квадратнаго уравненія** можно выразить слѣдующимъ образомъ:


182 **Теорема.** Неизвѣстное квадратнаго уравненія, приведеннаго къ виду

$$x^2+px+q=0,$$

равно взятой съ обратнымъ знакомъ половинѣ коэффиціента при неизвѣстномъ въ первой степени ± (+ для одного корня, — для другого) корень квадратный изъ разности между квадратомъ этой половины и свободнымъ членомъ.

§ 490. **Рѣшеніе уравненія $ax^2+bx+c=0$.** До сихъ поръ мы, изображая общій видъ квадратнаго уравненія, коэффиціенты его обозначали прописными буквами, чтобы этимъ напомнить о томъ, что названные коэффиціенты могутъ быть и какія либо болѣе или менѣе сложныя выраженія. Отнынѣ же

мы для большаго удобства будемъ писать общій видъ квадратнаго уравненія такъ, какъ это уже сдѣлано въ заголовкѣ этого параграфа, не ограничивая этимъ, однако, въ какомъ-либо отношеніи значенія и смысла коэффиціентовъ.

Чтобы рѣшить уравненіе

$$ax^2+bx+c=0,$$

раздѣлимъ его на a и перенесемъ послѣ этого свободный членъ въ правую часть:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

Если мы къ обѣимъ частямъ послѣдняго уравненія прибавимъ по $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, то лѣвая превратится въ полный квадратъ. Такъ мы получаемъ:

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

откуда

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

и, наконецъ,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Заключающееся въ полученной формулѣ **правило для вычисленія корней полнаго квадратнаго уравненія** можетъ быть формулировано слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Неизвѣстное квадратнаго уравненія, приведеннаго къ виду 

$$ax^2+bx+c=0,$$

равно частному, котораго дѣлитель равняется удвоенному коэффиціенту при квадратѣ неизвѣстнаго, а дѣлимое взятому съ обратнымъ знакомъ коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой степени $\pm$ ($+$ для одного корня, $-$ для другого) корень ква-

дратный изъ разности между квадратомъ этого коэффиціента и учетвереннымъ произведеніемъ свободнаго члена на коэффиціентъ при квадратѣ неизвѣстнаго

491 **Другое рѣшеніе послѣдняго уравненія.** Уравненіе

$$ax^2+bx+c=0$$

можно рѣшить также слѣдующимъ образомъ

Лѣвая часть его превращается въ полный квадратъ двучлена, если мы умножимъ его на a, перенесемъ затѣмъ свободный членъ въ правую часть и послѣ этого прибавимъ къ обѣимъ частямъ по $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

Такъ получается

$$a^2x^2+abx+ac=0$$
$$a^2x^2+abx=-ac$$
$$a^2x^2+2ax\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$$
$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4},$$

откуда

$$ax+\frac{b}{2}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$
$$ax=-\frac{b}{2}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$
$$ax=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

§ 492 **Примѣры.**

Задача 1 Рѣшить уравненіе

$$\frac{4}{5x-3}+\frac{3}{7}=\frac{2}{3}-\frac{5}{3x+8}.$$

Рѣшеніе.

Чтобы освободить данное уравненіе отъ знаменателей, умножимъ его на общаго знаменателя $21(5x-3)(3x+8)$ встрѣчающихся въ немъ дробей, перенеся предварительно $\frac{3}{7}$ въ правую часть, такъ мы получаемъ:

$$\frac{4}{5x-3}=\frac{5}{21}-\frac{5}{3x+8}$$
$$4\cdot21(3x+8)=5(5x-3)(3x+8)-5\cdot21(5x-3),$$

по раскрытіи же скобокъ и перенесеніи всѣхъ членовъ въ лѣвую часть уравненія:

$$252x+672=75x^2+155x-120-525x+315$$
$$75x^2-622x-477=0.$$

Отсюда же мы, по теоремѣ **183**, находимъ

$$x = \frac{622 \pm \sqrt{622^2 + 4 \cdot 75 \cdot 477}}{150}$$

$$= \frac{622 \pm \sqrt{529984}}{150}$$

$$= \frac{622 \pm 728}{150}$$

$$x_1 = \frac{1350}{150} = 9 \quad x_2 = -\frac{106}{150} = -\frac{53}{75}$$

З а д а ч а 2. Рѣшить уравненіе

$$x + 3 = \frac{5(2x - 5) - 3}{x - 1}$$

Р ѣ ш е н і е.

Ходъ его слѣдующій:

мы уничтожаемъ знаменателя

$$(x + 3)(x - 1) = 5(2x - 5) - 3,$$

раскрываемъ скобки:

$$x^2 + 2x - 3 = 10x - 25 - 3,$$

переносимъ всѣ члены въ первую часть и дѣлаемъ приведеніе

$$x^2 - 8x + 25 = 0.$$

и вычисляемъ, наконецъ, корни уравненія по теоремѣ **182**

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 25}$$
$$= 4 \pm \sqrt{-9}$$
$$= 4 \pm \sqrt{9(-1)}$$

Такъ мы находимъ:

$$x = 4 \pm 3i.$$

З а д а ч а 3. Рѣшить уравненіе

$$\frac{a}{x + a} + \frac{b}{x + b} + \frac{c}{x + c} = 0$$

Рѣшеніе.

Освободимъ уравненіе отъ знаменателей и приведемъ его къ простѣйшему ординарному виду:

$$a[x^2+(b+c)x+bc]+b[x^2+(a+c)x+ac]+c[x^2+(a+b)x+ab]=0$$
$$(a+b+c)x^2+[a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)]x+3abc=0$$
$$(a+b+c)x^2+2(ab+ac+bc)x+3abc=0$$
$$x^2+2\cdot\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}\,x+\frac{3abc}{a+b+c}=0$$

Отсюда мы, по теоремѣ 182, получаемъ:

$$x=-\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}\pm\sqrt{\left(\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}\right)^2-\frac{3abc}{a+b+c}}$$

или

$$x=\frac{-(ab+ac+bc)\pm\sqrt{(ab+ac+bc)^2-3abc(a+b+c)}}{a+b+c}$$

Кромѣ этихъ 2 корней рѣшенное уравненіе имѣетъ еще особый корень

$$x=\infty,$$

такъ какъ уравненіе, которое мы получили, уничтоживъ знаменателей, оказалось 2-й степени, общій же знаменатель, на котораго мы, чтобы достигнуть этого, умножили данное уравненіе, былъ 3-й степени [теорема 148а].

ГЛАВА XII.

Зависимость между коэффиціентами и корнями квадратнаго уравненія.

184 § 493. **Теорема.** Сумма корней квадратнаго уравненія, приведеннаго къ виду

$$x^2+px+q=0,$$

равна взятому съ обратнымъ знакомъ коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой степени, произведеніе же этихъ корней равно свободному члену.

Предп. x_1 и x_2 корни уравненія

$$x^2+px+q=0$$

Утв. I. $x_1+x_2=-p$

II. $x_1x_2=q$

Док. По теоремѣ **182** корни приведеннаго въ предположеніи уравненія суть:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Сложивъ эти 2 равенства, мы, по теор. VII, убѣждаемся, что и въ самомъ дѣлѣ

$$x_1 + x_2 = -p$$

При умноженіи же этихъ равенствъ другъ на друга мы получаемъ:

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2$$

$$= \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$$

$$= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$$

$$= q$$

и убѣждаемся такимъ образомъ въ справедливости и второго утвержденія.

§ 494. **Теорема.** Трехчленъ ax^2+bx+c разлагается на 185
сомножителей $a(x-x_1)(x-x_2)$, гдѣ x_1 и x_2 означаютъ корни уравненія, которое получимъ, если этотъ трехчленъ приравняемъ къ 0.

Предп. x_1 и x_2 корни уравненія

$$ax^2+bx+c=0.$$

Утв. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Док. Раздѣливъ уравненіе

$$ax^2+bx+c=0$$

на a, мы получаемъ:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Слѣдовательно, по теоремѣ **184**, должно быть:

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Изъ этихъ же равенствъ слѣдуетъ, что

$$b=-a(x_1+x_2)$$
$$c=ax_1x_2.$$

Если мы эти выраженія подставимъ вмѣсто b и c въ трехчленъ ax^2+bx+c, а затѣмъ по правиламъ, изложеннымъ въ п. IV § 90, разложимъ его на сомножителей, то получаемъ:

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=ax^2-ax_1x-ax_2x+ax_1x_2$$
$$=ax(x-x_1)-ax_2(x-x_1)=a(x-x_1)(x-x_2),$$

что и требовалось доказать.

§ 495. **Разложеніе на сомножителей трехчленовъ ax^2+bx+c и x^2+px+q.** Можно, конечно, и не прибѣгая къ обозначеніямъ x_1 и x_2, написать то произведеніе, которое получается при разложеніи трехчлена ax^2+bx+c на сомножителей. Безъ названныхъ сокращенныхъ обозначеній мы имѣемъ:

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

или же вмѣсто этого:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

По той же теоремѣ **185** должно быть:

$$x^2+px+q=$$
$$\left[x-\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]\cdot\left[x-\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right],$$

слѣдовательно, также:

$$x^2+px+q=$$
$$\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right).$$

Въ допустимости и правильности произведенныхъ здѣсь разложеній на сомножителей можно также убѣдиться чрезъ выполненіе указанныхъ умноженій.

Примѣры.

Задача 1. Разложить на сомножителей $15x^2+14x-8$

Рѣшеніе.

Корни уравненія

$$15x^2+14x-8=0$$

суть $x_1=+\frac{2}{5}$ и $x_2=-\frac{4}{3}$. Слѣд., по теоремѣ **185**

$$15x^2+14x-8=15\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=5\cdot\left(x-\frac{2}{5}\right)\cdot 3\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)=(5x-2)(3x+4)$$

Задача 2. Разложить на сомножителей x^2-4x+1.

Рѣшеніе.

Корни уравненія

$$x^2-4x+1=0$$

суть

$$x_1=2+\sqrt{3}$$
$$x_2=2-\sqrt{3}$$

Слѣд., по теоремѣ **185**

$$x^2-4x+1=\left[x-(2+\sqrt{3})\right]\left[x-(2-\sqrt{3})\right]=(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$$

§ 496. **Составленіе квадратнаго уравненія по даннымъ корнямъ его.** Если корни квадратнаго уравненія обозначимъ α и β, то уравненіе, которому они удовлетворятъ, должно, по теоремѣ **184** гласить:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

На основаніи же теоремы **185** мы можемъ уравненіе, имѣющее эти корни, представить также въ видѣ.

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0.$$

Наоборотъ, если уравненіе дано въ послѣднемъ видѣ, то корни его видны сразу же безъ какихъ бы то ни было вычисленій.

§ 497. **Составленіе уравненія по любому количеству данныхъ корней.** На основаніи теоремы **45[illegible]** можно на подобіе послѣдняго уравненія составить также уравненіе по любому количеству какихъ угодно корней, какъ на это указывалось уже въ § 356.

Такъ, напр., уравненіе, имѣющее данные корни α, β, γ, δ, ε и η, можетъ быть представлено въ видѣ:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)(x-\eta)=0.$$

Что оно удовлетворяется данными корнями легко видно, такъ какъ лѣвая часть его есть произведеніе, которое можетъ быть равнымъ 0 только, если одинъ изъ сомножителей его равенъ 0, то есть, если

$$\begin{aligned}
&\text{или } x-\alpha=0,\\
&\text{или } x-\beta=0,\\
&\text{или } x-\gamma=0,\\
&\text{или } x-\delta=0,\\
&\text{или } x-\varepsilon=0,\\
&\text{или } x-\eta=0,
\end{aligned}$$

слѣдовательно, если

$$\begin{aligned}
&\text{или } x=\alpha,\\
&\text{или } x=\beta,\\
&\text{или } x=\gamma,\\
&\text{или } x=\delta,\\
&\text{или } x=\varepsilon,\\
&\text{или } x=\eta.
\end{aligned}$$

§ 498. **Степень уравненія, составленнаго по даннымъ корнямъ.** Уравненіе

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0,$$

имѣющее 2 произвольно данныхъ корня α и β, 2-й степени. Если мы въ лѣвой части уравненія

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0,$$

имѣющаго 3 произвольно данныхъ корня α, β и γ, раскроемъ скобки, то увидимъ, что оно 3-й степени. Вообще видно, что уравненіе, составленное по n произвольно даннымъ корнямъ, должно быть n-вой степени.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что *нѣтъ такой комбинаціи корней, по которой бы не могло быть составлено уравненіе, при чемъ всегда степень уравненія будетъ равна числу корней.*

Но такъ какъ полное ординарное уравненіе n-вой степени [§ 374] въ общемъ видѣ рѣшено быть не можетъ (алгебраически въ общемъ видѣ рѣшаются уравненія только степеней 1-й, 2-й, 3-й и 4-й), то изъ сказаннаго еще не слѣдуетъ, что всѣ, какія только возможны, комбинаціи n корней дадутъ и всѣ возможныя комбинаціи коэффиціентовъ уравненія n-вой степени. Напротивъ, можно было бы допустить, что есть такія уравненія n-вой степени, которыя никакими ни вещественными ни комплексными значеніями неизвѣстнаго не удовлетворяются.

§ 499. **Такъ называемая основная теорема алгебры о существованіи корня уравненія.** Противъ высказаннаго только-что допущенія говоритъ, однако, то обстоятельство, что существуютъ способы рѣшенія численныхъ уравненій какихъ угодно степеней, всегда дающіе корни. Кромѣ же того

существованіе корней у всякаго алгебраическаго численнаго уравненія любой степени можно доказать, и не рѣшая уравненія. Но первая часть этого доказательства требуетъ такихъ знаній изъ другихъ областей математики, относительно которыхъ мы не имѣемъ права предположить, что они уже имѣются у учениковъ. Поэтому мы должны здѣсь ограничиться указаніемъ, что она состоитъ въ доказательствѣ теоремы, названіе которой приведено въ заголовкѣ этого параграфа, и которая гласитъ:

Теорема. Каждое алгебраическое уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный или комплексный корень*) **186**

Доказательство же этой теоремы состоитъ въ томъ, что показывается, что всегда есть число вида $p+qi$ при подстановкѣ котораго вмѣсто x въ многочленъ вида

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+kx^2+lx+m,$$

гдѣ коэффиценты могутъ быть произвольныя вещественныя или комплексныя числа, этотъ многочленъ превращается въ 0 (какъ указано въ § 279, $p+qi$, то есть вообще комплексное число, есть самый общій видъ числа).

Остальная, не представляющая уже никакихъ трудностей, часть доказательства истины о существованіи корней у всякаго алгебраическаго уравненія состоитъ въ указаніи числа этихъ корней теоремою, которую мы доказываемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 500. Число корней алгебраическаго уравненія.

Теорема. Каждое алгебраическое уравненіе n-вой степени имѣетъ n корней, среди которыхъ могутъ быть, однако, и равные между собою. **187**

Док. По теоремѣ **186** уравненіе

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+kx^2+lx+m=0 \tag{1}$$

должно имѣть корень. Если этотъ корень назовемъ α, а многочленъ въ лѣвой части уравненія буквою P, то по теоремѣ, доказанной въ § 87, P должно дѣлиться на $x-\alpha$. Произведя такое дѣленіе, мы, по теоремѣ **147** уничтожимъ корень

$$x_1=\alpha$$

и получимъ уравненіе вида

$$ax^{n-1}+b_1x^{n-2}+c_1x^{n-3}+\cdots+k_1x+l_1=0,$$

которое также должно имѣть корень. Если его назовемъ β, то многочленъ въ лѣвой части послѣдняго уравненія, который назовемъ P_1, долженъ дѣлиться

*) Доказательства этой теоремы даны математиками **Johann Friedrich Gauss** (3 различныхъ доказательства), **D'Alembert** и **Cauchy**.

на $x-\beta$. Произведя и это дѣленіе, мы уничтожимъ корень послѣдняго уравненія

$$x_2=\beta$$

который есть также корень и даннаго уравненія, какъ это разъяснено было въ § 372, или какъ это видно изъ того, что

$$P=(x-\alpha)P_1$$

Послѣ послѣдняго дѣленія получается уравненіе $(n-2)$-й степени, которое также должно имѣть корень. Назвавъ послѣдній γ и раздѣливъ на $x-\gamma$ послѣднее уравненіе, мы узнаемъ, что данное уравненіе имѣетъ еще корень

$$x_3=\gamma,$$

и получаемъ уравненіе степени $(n-3)$. Продолжая описаннымъ образомъ дѣлить каждое новое уравненіе на разность неизвѣстнаго и корня этого уравненія, мы, наконецъ, дойдемъ до уравненія первой степени

$$a(x-\nu)=0,$$

изъ котораго получимъ еще корень

$$x_n=\nu,$$

вообще же n корней, какое число ихъ и должно имѣть разсмотрѣнное, слѣдовательно, вообще каждое уравненіе n-вой степени.

Примѣчаніе.

Послѣдней теоремѣ повидимому противорѣчитъ существованіе у нѣкоторыхъ уравненій «особаго корня», о которомъ говорится въ §§ 376 и 377 и въ доказанныхъ тамъ теоремахъ

Но разсматривая уравненіе

$$\frac{P}{Q}=0,$$

имѣющее при условіяхъ, установленныхъ въ названномъ параграфѣ, такой корень, какъ частный случай уравненія

$$\frac{P}{Q}=a,$$

мы степень этого уравненія должны считать равною степени того изъ многочленовъ P и Q, котораго степень относительно неизвѣстнаго выше. Если первый изъ этихъ многочленовъ будетъ n-й степени, а второй $(n+k)$-й, и $a=0$, то достаточно считать, что уравненіе

$$\frac{P}{Q}=0$$

$(n+k)$-й степени и имѣть корнями кромѣ n корней уравненія

$$P=0$$

еще k корней равныхъ каждый ∞, чтобы согласовать съ доказанною въ этомъ параграфѣ теоремою, и случай, когда уравненіе имѣетъ «особый корень» (ср. § 509).

§ 501. **Разложеніе многочлена n-вой степени на сомножителей.** Изъ доказательства послѣдней теоремы вытекаетъ какъ слѣдствіе, что многочленъ

$$P=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+kx^2+lx+m$$

долженъ равняться произведенію

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\nu),$$

гдѣ α, β, γ, ... ν означаютъ корни уравненія

$$P=0;$$

и если послѣднее уравненіе будетъ рѣшено, то и многочленъ P можетъ быть разложенъ на сомножителей указаннымъ способомъ. Но буквенное уравненіе n-вой степени въ общемъ видѣ, какъ уже упомянуто было въ § 498, вообще рѣшено быть не можетъ, при опредѣленномъ же n въ тѣхъ немногихъ случаяхъ, которые названы тамъ же. Рѣшеніе же численныхъ уравненій любыхъ степеней, о которомъ мы упомянули въ § 499, разсматривается въ такъ называемой высшей алгебрѣ. Потому для насъ разложеніе многочленовъ вида P на сомножителей путемъ примѣненія вышеприведеннаго слѣдствія будетъ выполнимо только въ тѣсныхъ предѣлахъ, указываемыхъ тѣми случаями уравненій вида

$$P=0,$$

которые мы уже рѣшали и будемъ еще рѣшать.

— —

ГЛАВА XIII.

Изслѣдованіе квадратнаго уравненія.

§ 502. **Дискриминантъ квадратнаго уравненія.** Какъ нами прежде [главы III и VI] изслѣдовано было уравненіе первой степени, такъ намъ теперь надлежитъ изучить, какіе возможны случаи корней при рѣшеніи уравненій 2-й степени, и разсмотрѣть затѣмъ на примѣрахъ, какъ должны и могутъ толковаться различнаго рода корни въ тѣхъ случаяхъ, когда условія заданія выражаются квадратнымъ уравненіемъ.

При этомъ мы можемъ ограничиться изслѣдованіемъ квадратнаго уравненія съ *вещественными коэффиціентами*, такъ какъ не трудно дополнить это изслѣдованіе аналогичнымъ разсмотрѣніемъ случаевъ, когда эти коэф-

фиціенты могутъ быть и комплексныя числа, и притомъ намъ съ послѣдующемъ съ послѣдняго рода коэффиціентами вопсе не придется встрѣчаться

При означенномъ ограниченіи мы видимъ изъ выраженіи

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

и

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

для корней уравненія

$$ax^2+bx+c=0$$

что отъ знака выраженія b^2-4ac зависитъ, будутъ ли корни квадратнаго уравненія вещественные или комплексные, при чемъ должно быть обращено вниманіе и на тотъ случай, когда значеніе этого выраженія есть 0.

Выраженіе b^2-4ac называется дискриминантомъ квадратнаго уравненія

$$ax^2+bx+c=0.$$

§ 503. **Три основные случая.** 1) Если окажется, что дискриминантъ уравненія

$$b^2-4ac>0,$$

то ***корни*** уравненія будутъ ***вещественные и не равны*** между собою

2) Если окажется, что

$$b^2-4ac=0,$$

то ***корни*** уравненія будутъ ***вещественные и равны*** между собою.

3) Если, наконецъ, окажется, что

$$b^2-4ac<0,$$

то ***корни*** уравненія будутъ ***сопряженныя комплексныя числа.***

§ 504. **Подробное изслѣдованіе 1-аго случая: когда $b^2-4ac>0$.**

Во всякомъ уравненіи мы имѣемъ право перемѣнить знаки предъ всѣми членами [теор. 144]

Вслѣдствіе этого квадратное уравненіе можетъ быть всегда приведено къ такому виду, что коэффиціентъ при x^2 будетъ положительный. Потому мы при обозрѣніи всѣхъ возможныхъ случаевъ вещественныхъ неравныхъ корней, получающихся при условіи, названномъ въ заголовкѣ этого параграфа, можемъ предположить, что въ общемъ видѣ квадратнаго уравненія

$$a>0.$$

Въ такомъ случаѣ корни этого уравненія

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

и

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

будутъ имѣть тѣ же знаки, какъ и дѣлимыя въ выраженіяхъ для x_1 и x_2. Обращаясь же къ разсмотрѣнію этихъ знаковъ, мы должны отличить случаи, когда $c>0$, когда $c=0$ и когда $c<0$

1) ***Если $c>0$,***

то $4ac$ означаетъ положительное число, и поэтому должно быть

$$b^2-4ac<b^2,$$

слѣд., по теоремѣ 1 въ § 273, абсолютное значеніе $\sqrt{b^2-4ac}$ меньше абсолютной величины коэффиціента b, а потому названныя выше дѣлимыя должны имѣть тотъ же знакъ, какъ и $(-b)$. А изъ этого слѣдуетъ, что ***оба корня уравненія будутъ положительными, если b отрицательное число, а оба отрицательными, если b положительное число.***

2) ***Если $c=0$,***

то и $4ac=0$ и потому абсолютная величина выраженія $\sqrt{b^2-4ac}$ должна быть равна абсолютному значенію числа b. Слѣдовательно, при названномъ условіи будетъ.

$$x_1=-\frac{b}{a};\ x_2=0,\ \text{если}\ b<0$$

и

$$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a},\ \text{если}\ b>0,$$

то есть, ***одинъ корень уравненія будетъ положительное число, а другой 0, если b отрицательное число, и одинъ корень отрицательное число, другой 0, если b положительное число.***

Примѣчаніе.

Въ разсмотрѣнномъ здѣсь случаѣ мы имѣемъ дѣло съ такимъ же уравненіемъ, о которомъ говорилось въ § 486.

3) ***Если $c<0$,***

то $4ac$ означаетъ отрицательное число, и потому должно быть

$$b^2-4ac>b^2,$$

слѣдовательно, по названной уже выше теоремѣ, абсолютное значение $\sqrt{b^2-4ac}$ больше абсолютной величины коэффиціента b, а потому

$$x_1>0$$
$$x_2<0.$$

то есть, ***одинъ корень уравненія будетъ положительное число, а другой отрицательное.***

§ 505. **Подробное изслѣдованіе 2-ого случая: когда $b^2-4ac=0$,** Только, если разность двухъ чиселъ равна 0, эти числа могутъ быть равны другъ другу. Разность корней квадратнаго уравненія равна $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$, выраженіе же это можетъ, на основаніи опредѣленій частнаго и корня, означать 0 только при условіи, что

$$b^2-4ac=0$$

Въ § 503 уже было упомянуто, что когда соблюдено это условіе, то корни уравненія вещественны и равны другъ другу. Теперь же мы убѣдились, что ни при какихъ другихъ условіяхъ квадратное уравненіе корней такого рода имѣть не можетъ.

При названномъ условіи

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a},$$

слѣдовательно, упомянутые равные корни положительны, если знаки коэффиціентовъ при x^2 и при x не одинаковы, и эти корни отрицательны, если названные знаки одинаковы.

Если

$$b^2-4ac=0,$$

то

$$b^2=4ac,$$

слѣдовательно,

$$c=\frac{b^2}{4a},$$

и потому уравненіе

$$ax^2+bx+c=0$$

можетъ быть представлено въ видѣ:

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=0.$$

Въ послѣднемъ же уравненіи лѣвую часть можно еще преобразовать такъ:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=0$$

$$a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

$$a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]=0$$

Полезно сравнить послѣднее уравненіе съ уравненіями въ § 497 и лѣвую часть его съ произведеніемъ, въ которое преобразованъ былъ трехчленъ ax^2+bx+c въ § 494, чтобы имѣть новый примѣръ, поясняющій, почему принято говорить о 2 равныхъ корняхъ квадратнаго уравненія, вмѣсто того, чтобы говорить, что у него 1 корень: общее правило то, что квадратное уравненіе имѣетъ всегда 2 корня, но встрѣчаются частные случаи, когда эти корни равны между собою; инымъ же какимъ-либо образомъ не происходитъ случай, когда квадратное уравненіе удовлетворяется только однимъ значеніемъ неизвѣстнаго.

Изъ выведеннаго же выше уравненія

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

видно, что въ разсматриваемомъ случаѣ лѣвая часть квадратнаго уравненія есть квадратъ двучлена 1-ой степени относительно неизвѣстнаго, умноженный на коэффиціентъ при x^2. Слѣдовательно, въ уравненіи вида

$$x^2+px+q=0$$

для котораго названное въ заголовкѣ этого параграфа условіе принимаетъ видъ

$$p^2-4q=0$$

или

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0,$$

лѣвая часть при этомъ условіи есть квадратъ бинома, а именно $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$

§ 506. Подробное изслѣдованіе 3-яго случая: когда $b^2-4ac<0$. Если изъ коэффиціентовъ a и c одинъ положителенъ, а другой отрицателенъ, то $(-4ac)$ означаетъ положительное число. Квадратъ всякаго вещественнаго числа положителенъ, а потому и $b^2>0$

Слѣдовательно, при условіи, что a и c числа разнозначныя, дискриминантъ b^2-4ac отрицательнымъ быть не можетъ, то есть, *разсматриваемый случай возможенъ только, если коэффиціенты a и c оба положительны или оба отрицательны.*

Если же

$$b^2-4ac<0,$$

то, какъ разъяснено было въ § 46,

$$4ac-b^2>0$$

и потому комплексныя числа, которыя означаютъ формулы для x_1 и x_2 при этомъ условіи, могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{-(4ac-b^2)}}{2a}$$

$$=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{(4ac-b^2)(-1)}}{2a}, \text{ откуда}$$

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\,i,$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b-\sqrt{-(4ac-b^2)}}{2a}$$

$$=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{(4ac-b^2)(-1)}}{2a}, \text{ откуда}$$

$$x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\,i$$

При сравненіи выраженій для x_1 и x_2 отчетливо видно то, что уже упомянуто было въ § 503, а именно, что въ разсматриваемомъ случаѣ корни квадратнаго уравненія сопряженныя комплексныя числа.

§ 507. **Важное заключеніе изъ произведеннаго изслѣдованія.** Изъ произведеннаго нами до сихъ поръ изслѣдованія мы должны заключить, что если коэффиціенты квадратнаго уравненія вещественныя числа, то не можетъ случиться, чтобы одинъ корень уравненія былъ вещественный, а другой мнимый: *корни всегда или оба вещественные или оба мнимые, и въ послѣднемъ случаѣ непремѣнно сопряженныя комплексныя числа.*

§ 508. **Возможность опредѣленія знаковъ вещественныхъ корней до рѣшенія уравненія.** Если при опредѣленіи знака дискриминанта квадратнаго уравненія окажется, что онъ положительный, и что, слѣдовательно, корни уравненія вещественные, то знаки послѣднихъ могутъ быть опредѣлены по теоремѣ **184.**

Такъ какъ названная теорема относится къ простѣйшему виду квадратнаго уравненія, гдѣ коэффиціентъ при второй степени неизвѣстнаго есть +1, слѣдовательно, положителенъ, то для большаго удобства должно данное уравненіе преобразовать или представить себѣ преобразованнымъ такъ чтобы и въ немъ коэффиціентъ при квадратѣ неизвѣстнаго былъ положительнымъ. Тогда знаки корней получаются по слѣдующему правилу, вытекающему какъ слѣдствіе изъ названной теоремы

Если свободный членъ положительное число, то корни имѣютъ оба одинъ и тотъ же знакъ, притомъ противоположный знаку члена съ неизвѣстнымъ въ первой степени.

Если свободный членъ отрицательное число, то корни имѣютъ противоположные знаки, притомъ корень меньшій по абсолютной величинѣ, тотъ же знака, какъ и членъ съ неизвѣстнымъ въ первой степени

Изъ той же **184** теоремы слѣдуетъ, что если дискриминантъ окажется равнымъ 0, то знакъ получающихся въ этомъ случаѣ равныхъ корней можетъ быть опредѣленъ по первой части даннаго нами только-что правила

Примѣры.

1) Для уравненія

$$6x^2-19x+15=0$$

дискриминантъ

$$19^2-4\,.\,6\,.\,15>0.$$

Слѣдовательно, корни уравненія вещественные.

Такъ какъ въ немъ кромѣ того коэффиціентъ при x^2 и свободный членъ положительны, то эти корни имѣютъ оба одинъ и тотъ же знакъ. А такъ какъ ихъ сумма должна равняться $-\frac{19}{6}$ съ обратнымъ знакомъ, т. е. $+\frac{19}{6}$, то значитъ корни даннаго уравненія оба положительны.

2) Для опредѣленія знаковъ корней уравненія

$$-5x^2+9x+17=0,$$

удобно въ немъ предварительно перемѣнить или представить себѣ мысленно перемѣненными знаки предъ всѣми членами. По знакамъ коэффиціентовъ видно безъ всякихъ вычисленій, что дискриминантъ уравненія положительный, что, слѣдовательно, корни уравненія вещественные.

По знаку же — предъ третьимъ членомъ мысленно преобразованнаго уравненія видно, что знаки этихъ корней не одинаковые. А по знаку — предъ вторымъ членомъ мы заключаемъ, что сумма корней положительна, что слѣдовательно, тотъ изъ нихъ положительное число, который по абсолютной величинѣ своей больше, и что корень, меньшій по абсолютной величинѣ своей, есть отрицательное число.

3) Дискриминантъ уравненія

$$x^2+3x+5=0$$

отрицательное число, слѣдовательно, корни уравненія мнимые.

§ 509. **Изслѣдованіе случая, когда въ квадратномъ уравненіи $a=0$.** Если въ уравненіи

$$ax^2+bx+c=0$$

коэффиціентъ a будетъ равнымъ 0, то при всякомъ конечномъ значеніи неизвѣстнаго членъ ax^2 будетъ также равнымъ 0 и уравненію удовлетворитъ то значеніе x, которое превратитъ $bx+c$ въ 0. Изъ уравненія же

$$bx+c=0$$

мы находимъ

$$x=-\frac{c}{b}$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ одинъ корень разсматриваемаго уравненія. Второй же оно могло бы имѣть только какъ квадратное, т. е. какъ уравненіе, въ которомъ бы первый членъ не исчезалъ, несмотря на то, что превратился бы въ 0 коэффиціентъ a, или исчезъ бы только вслѣдствіе того, что уравненіе удовлетворялось бы значеніемъ 0 неизвѣстнаго. Но, какъ легко убѣдиться, это значеніе могло бы быть корнемъ уравненія только при условіи, что $c=0$. Если же одинъ множитель 0, то произведеніе можетъ не равняться 0 только, если другой ∞ [§ 118]. Слѣдовательно, второй корень разсматриваемаго уравненія могъ бы быть только безконечно большимъ, и уравненіе могло бы считаться удовлетвореннымъ имъ только въ томъ смыслѣ, въ какомъ считались удовлетворенными уравненія въ §§ 383 и 388.

Проще было бы ограничить все изслѣдованіе указаніемъ, что, при $a=0$, квадратное уравненіе превращается въ линейное, которое должно имѣть только одинъ корень, и что этотъ корень есть $-\frac{c}{b}$. Если же мы желаемъ сохранить и при $a=0$ за разсматриваемымъ уравненіемъ характеръ уравненія 2-й степени, то это по той причинѣ, что при изслѣдованія задачъ, рѣшаемыхъ при помощи квадратныхъ уравненій, слѣдовательно, такихъ, которыя могутъ дать 2 рѣшенія, должно разсматривать и предѣльные случаи, и такого рода случаемъ будетъ и тотъ, когда коэффиціентъ при квадратѣ неизвѣстнаго исчезаетъ.

Проще всего было бы вычислить значенія корней для этого случая чрезъ подстановку въ формулы для нихъ значенія 0 вмѣсто a. Но припомнимъ, что при рѣшеніи общаго вида квадратнаго уравненія намъ, между прочимъ, приходилось дѣлить его на a и прибавлять къ обѣимъ частямъ его по $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$; а въ разсматриваемомъ случаѣ это означало бы дѣленіе уравненія

на 0 и прибавленіе къ объимъ частямъ его по безконечности, то есть преобразованія, которыя по правиламъ А и Б въ § 373 недопустимы, такъ какъ при этомъ могутъ получиться уравненія неравносильныя данному.

Потому мы предпочтемъ другой способъ опредѣленія корней уравненія

$$ax^2+bx+c=0$$

при условіи, что $a=0$, состоящій во введеніи новаго неизвѣстнаго. Если положимъ

$$x=\frac{1}{y},$$

то наше уравненіе превратится въ слѣдующее:

$$\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c=0$$

Если послѣднее освободимъ отъ знаменателей, умноживъ его на y^2, то, по теоремѣ 148ª получимъ равносильное ему уравненіе:

$$cy^2+by+a=0,$$

котораго корни суть

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

Если мы въ послѣдней формулѣ замѣнимъ a нулемъ, то получимъ тѣ же значенія корней, которыя бы нашли, если бы въ послѣднемъ уравненіи положили $a=0$ и рѣшили затѣмъ неполное квадратное уравненіе

$$cy^2+by=0$$

способомъ, примѣненнымъ въ § 486, а именно мы получимъ:

$$y_1=-\frac{b}{c}$$

$$y_2=0.$$

А такъ какъ мы положили

$$x=\frac{1}{y},$$

то должно быть

$$x_1=-\frac{c}{b}$$

$$x_2=\pm\infty,$$

то есть, мы получаемъ тѣ именно корни, которые нами уже указаны были въ началѣ этого параграфа.

Что касается безконечнаго корня, то его знакъ зависитъ отъ знака коэффиціента b и отъ того, съ положительной ли или отрицательной стороны коэффиціентъ a приближается къ 0.

§ 510. **Случаи, когда кромѣ a исчезаютъ еще и коэффиціенты b и c.** Легко дополнить послѣднее изслѣдованіе еще разсмотрѣніемъ случаевъ, когда кромѣ a дѣлаются равными нулю также еще и b и c. При этомъ оказывается, что

если $a=0$ и $c=0$, при $b\neq0$, то $x_1=0$
$x_2=\pm\infty$;
если $a=0$ и $b=0$, при $c\neq0$, то $x_1=\pm\infty$
$x_2=\pm\infty$;

и особеннаго вниманія заслуживаетъ случай, когда всѣ 3 коэффиціента дѣлаются равными 0.

При послѣднемъ условіи выраженія для корней уравненія оба превращаются въ символъ для неопредѣленности $\frac{0}{0}$, смыслъ котораго легко понятенъ, такъ какъ уравненіе въ этомъ случаѣ превращается въ тождество, которое удовлетворяется рѣшительно всякимъ значеніемъ неизвѣстнаго.

§ 511. **Краткое резюме всего изслѣдованія.** Чтобы облегчить обзоръ всѣхъ возможныхъ случаевъ корней квадратнаго уравненія, выразимъ результатъ всего нашего изслѣдованія въ видѣ таблицы:

Значенія корней уравненія
$$ax^2+bx+c=0.$$

$a\neq0$	$\frac{c}{a}>0$	$b^2-4ac>0$	$-\frac{b}{a}>0$	корни положительные
			$-\frac{b}{a}<0$	корни отрицательные
		$b^2-4ac=0$		равные корни: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
		$b^2-4ac<0$		корни мнимые
	$c=0$			одинъ корень равенъ 0, другой $-\frac{b}{a}$
	$\frac{c}{a}<0$			одинъ корень положительный, а другой отрицательный
$a=0$	$b\neq0$	$c\neq0$		$x_1=-\frac{c}{b}$; $x_2=\pm\infty$
		$c=0$		$x_1=0$; $x_2=\pm\infty$
	$b=0$	$c\neq0$		оба корня безконечно большіе.
		$c=0$		$x_1=\frac{0}{0}$, $x_2=\frac{0}{0}$ (уравненіе превращается въ тождество).

§ 512. **Изслѣдованіе рѣшеній задачъ.** И въ томъ случаѣ, когда составленное для рѣшенія задачи уравненіе окажется квадратнымъ, соотвѣтствіе между корнями уравненія и искомымъ рѣшеніемъ задачи должно отыскиваться путемъ разсужденій подобныхъ тѣмъ, съ которыми мы познакомились въ §§ 384—392 и 420. Только здѣсь при такихъ изслѣдованіяхъ придется считаться съ тою особенностью квадратныхъ уравненій, что они имѣютъ два корня, которые къ тому же еще могутъ оказаться иногда и комплексными. Въ послѣднемъ случаѣ мы всегда должны будемъ считать задачу не допускающею рѣшенія, такъ какъ въ области тѣхъ величинъ, съ которыми мы можемъ встрѣтиться въ возможныхъ здѣсь примѣрахъ, мнимыя числа непримѣнимы.

Приводимые ниже примѣры должны пояснить, какъ иногда изъ корней уравненія составляетъ рѣшеніе задачи только одинъ, иногда составляютъ рѣшенія задачи оба корня, и какъ именно появленіемъ комплексныхъ корней указывается на то, что задача не допускаетъ рѣшенія.

§ 513. **Примѣръ годности одного корня.**

Задача.

Въ бассейнъ вливается вода изъ двухъ трубъ. Если изъ нихъ будетъ открыта одна первая, то для наполненія бассейна понадобится времени на 4 часа больше, чѣмъ нужно для наполненія его одною второю трубою. Вмѣстѣ же онѣ его наполняютъ въ 50 минутъ.

Во сколько часовъ можетъ наполнить бассейнъ каждая труба отдѣльно?

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Положимъ, что бассейнъ наполняется одною второю трубою въ x часовъ, слѣдовательно, одною первою въ $(x+4)$ часа. Въ такомъ случаѣ въ 1 часъ первая труба наполнила бы $\frac{1}{x+4}$ бассейна, вторая $\frac{1}{x}$ бассейна, а обѣ вмѣстѣ $\frac{6}{5}$ бассейна, такъ какъ онѣ вмѣстѣ наполняютъ весь бассейнъ въ $\frac{5}{6}$ часа. Сказанное о количествѣ воды, вливающейся чрезъ обѣ трубы въ 1 часъ въ бассейнъ, выражается уравненіемъ:

$$\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x}=\frac{6}{5}.$$

Рѣшеніе уравненія.

Приведя обычнымъ способомъ уравненіе въ порядокъ, мы получаемъ:

$$3x^2+7x-10=0,$$

а отсюда:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{6},$$

то есть

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3\frac{1}{3}$$

Выясненіе смысла полученнаго рѣшенія

Второй корень годнаго отвѣта на нашу задачу не даетъ; первый же говоритъ, что одна вторая труба можетъ наполнить бассейнъ въ 1 часъ слѣдовательно, одна первая въ (1+4), т. е въ 5 часовъ

Но и второй корень не лишенъ смысла; только нужно избрать для отвѣта такія выраженія, чтобы стали примѣнимыми относительныя числа. Это будетъ достигнуто, если мы будемъ говорить, что бассейнъ будетъ наполненъ чрезъ столько-то часовъ и былъ полонъ столько-то часовъ тому назадъ. Но въ послѣднемъ случаѣ необходимо допустить, что вода изъ бассейна чрезъ трубы можетъ и выливаться После такого обобщенія условій задачи второе рѣшеніе можно истолковать слѣдующимъ образомъ: трубы такого свойства, что если бассейнъ $3\frac{1}{3}$ *часа тому назадъ былъ полонъ* то онъ какъ разъ къ данному моменту чрезъ вторую трубу опорожнился, а чрезъ первую трубу онъ чрезъ $\left(-3\frac{1}{3}+4\right)$, т. е. *чрезъ* $\frac{2}{3}$ *часа, наполнится* если онъ сейчасъ пустъ. Проще же это толкованіе можетъ быть выражено такъ: бассейнъ наполнится въ 50 мин., если вода въ него вливается чрезъ одну трубу, наполняющую его въ $\frac{2}{3}$ часа, и выливается одновременно чрезъ другую, опоражнивающую его въ $3\frac{1}{3}$ часа.

Но безъ обобщенія условій задача допускаетъ только одно рѣшеніе:

Отвѣтъ

Чрезъ одну первую трубу бассейнъ можетъ наполниться въ 5 часовъ, чрезъ одну вторую въ 1 часъ.

§ 514 **Задача о двухъ источникахъ свѣта.**

З а д а ч а.

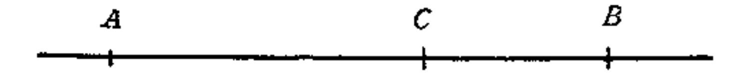
Въ точкахъ A и B, отстоящихъ другъ отъ друга на разстояніи d футовъ, находятся свѣтовые источники, сила которыхъ равна соотвѣтственно a и b свѣчамъ.

Въ какой точкѣ прямой, проходящей чрезъ A и B, освѣщеніе отъ обоихъ источниковъ будетъ одинаково?

Рѣшеніе.

Составленіе уравненія.

Положимъ, что искомая точка есть C и что ея разстояніе отъ A равно x футамъ, что слѣдовательно, разстояніе отъ C до B равно $(d-x)$ футамъ



По извѣстному закону физики освѣщеніе въ какой-либо точкѣ обратно пропорціонально квадрату разстоянія ея отъ свѣтового источника и пропорціонально силѣ его [см. § 482]. Слѣдовательно, въ точкѣ C освѣщеніе отъ источника, находящагося въ точкѣ A, въ $\frac{a}{x^2}$ разъ сильнѣе, чѣмъ отъ одной свѣчи на разстояніи одного фута, и въ $\frac{b}{(d-x)^2}$ разъ сильнѣе этого отъ источника, находящагося въ B

Что въ точкѣ C освѣщеніе отъ источниковъ въ A и B должно быть одинаково, выражаетъ уравненіе:

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}.$$

Рѣшеніе уравненія.

Оно рѣшается проще всего, если мы изъ него извлечемъ корень:

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=\pm\frac{\sqrt{b}}{d-x}.$$

Этимъ пріемомъ мы достигли того, что квадратное уравненіе распалось на два линейныхъ, рѣшивъ которыя, мы и получимъ его корни:

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=\frac{\sqrt{b}}{d-x}$$
$$d\sqrt{a}-x\sqrt{a}=x\sqrt{b}$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})x=d\sqrt{a}$$
$$x_1=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=-\frac{\sqrt{b}}{d-x}$$
$$d\sqrt{a}-x\sqrt{a}=-x\sqrt{b}$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})x=d\sqrt{a}$$
$$x_2=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

Кромѣ того эти уравненія и уравненіе, составленное нами, имѣютъ, по теоремѣ 149[a], особый корень

$$x_3=\pm\infty.$$

Эти корни и составляютъ рѣшеніе задачи.

Изслѣдованіе

Прежде всего отмѣтимъ, что по смыслу задачи ни a ни b отрицательными числами быть не могутъ, что, слѣдовательно, *корни* x_1 и x_2 *не могутъ быть мнимыми*

Затѣмъ намъ лучше всего удастся прослѣдить всѣ случаи значеній, какія могутъ принять эти корни, если мы представимъ себѣ b измѣняющимся отъ 0 до $+\infty$.

При $\boldsymbol{b=0}$ оказываются

$$x_1=x_2=d.$$

Но $b=0$ означаетъ, что источникъ свѣта въ B вовсе не свѣтитъ, а въ такомъ случаѣ и о получаемомъ изъ B освѣщеніи въ точкѣ C рѣчи быть не можетъ, ни тѣмъ болѣе о равенствѣ освѣщенія въ ней источниками въ A и B. Случай $b=0$ можетъ имѣть смыслъ только, если мы b представимъ себѣ сначала нѣсколько отличающимся отъ 0, а затѣмъ все болѣе и болѣе приближающимся къ 0. Если b только незначительно больше 0, то x_1 и x_2 незначительно отличаются отъ d, будучи притомъ $x_1<d$, а $x_2>d$, то есть, если источникъ въ B свѣтитъ очень слабо, то точка C должна съ одной или съ другой стороны подойти къ B очень близко, чтобы въ ней освѣщеніе, производимое обоими источниками свѣта, оказалось одинаковымъ; и чѣмъ меньше свѣтъ въ B отличается отъ совершенной тьмы, тѣмъ точка C должна быть ближе къ совпаденію съ B, чтобы было возможно такое освѣщеніе, о которомъ говорится въ задачѣ.

Такимъ образомъ значенія x_1 и x_2 могутъ быть безгранично приближены къ значенію d и другъ къ другу, при чемъ мы словомъ «безгранично» выражаемъ, что разность между каждыми двумя изъ названныхъ трехъ величинъ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго заданнаго числа, какъ бы мало оно ни было по абсолютной величинѣ своей. Вмѣсто этого говорятъ также, что d есть общій предѣлъ, къ которому стремятся x_1 и x_2 по мѣрѣ приближенія b къ 0.

Какъ только $\boldsymbol{b>0}$**,** корень x_1, какъ произведеніе d на правильную дробь, будетъ всегда меньше d, а корень x_2 или больше d или отрицательнымъ, такъ какъ x_2 есть произведеніе d на неправильную положительную дробь, пока $a>b$, и на отрицательное частное при $a<b$. Слѣдовательно, корень x_1 даетъ рѣшеніе задачи, по которому C находится между A и B, а корень x_2 рѣшеніе, по которому C освѣщается обоими источниками съ одной и той же стороны, находясь въ нашемъ чертежѣ или за B вправо отъ этой точки, или влѣво отъ A.

Пока $a>b$, по мѣрѣ увеличенія b корень x_1 будетъ все становиться меньше, приближаясь къ $\frac{d}{2}$ а корень x_2 все увеличиваться, приближаясь къ $+\infty$.

При $a = b$ дѣлаются $x_1 = \frac{1}{2}d$, $x_2 = \pm\infty$, при чемъ значеніе второго корня можно писать также $x_2 = +\infty$, чтобы указать, что какъ только b сдѣлается больше a, x_2 начнетъ измѣняться отъ $-\infty$ въ сторону 0.

При $a < b$, по мѣрѣ дальнѣйшаго увеличенія b корень x_1 будетъ продолжать уменьшаться отъ $\frac{d}{2}$ до 0, а корень x_2, оставаясь все время отрицательнымъ, будетъ по абсолютной величинѣ своей уменьшаться до 0 или, другими словами, увеличиваться отъ $-\infty$ до 0.

Наконецъ, при $b = \infty$ и x_1 и x_2 превращаются въ 0.

Смыслъ особаго корня $x = \pm\infty$ можетъ быть истолкованъ такъ, что если источники свѣта безконечно далеки отъ освѣщаемаго предмета, то интенсивность освѣщенія его равна 0 и потому онъ освѣщается одинаково обоими источниками, хотя они и не одинаковой силы.

Всѣ разсмотрѣнные измѣненія корней даютъ *въ примѣненіи къ рѣшенію задачи* слѣдующую картину.

Точекъ, въ которыхъ освѣщеніе отъ A и B одинаково, всегда 2. Пока источникъ свѣта въ B слабъ въ сравненіи съ источникомъ въ A, одинаково ими освѣщаемыя двѣ точки, какъ уже разъяснено было, находятся вблизи B. По мѣрѣ усиленія свѣта въ B одна изъ одинаково освѣщаемыхъ точекъ передвигается къ серединѣ между A и B, а другая все болѣе и болѣе удаляется вправо отъ B. Какъ только свѣтъ въ A и B станетъ одинаково сильнымъ, освѣщеніе будетъ одинаковымъ какъ разъ по срединѣ между A и B, и разница между освѣщеніемъ, получаемымъ отъ A, и освѣщеніемъ, идущимъ изъ B, будетъ тѣмъ менѣе замѣтна, чѣмъ мы дальше уйдемъ отъ точекъ A и B вправо или влѣво. Какъ только свѣтъ въ B станетъ сильнѣе свѣта въ A, одинаковое освѣщеніе слѣдуетъ искать между A и B ближе къ A и за A влѣво отъ A. По мѣрѣ дальнѣйшаго усиленія источника свѣта въ B точки одинаковаго освѣщенія будутъ съ обѣихъ сторонъ приближаться къ A, и будутъ тѣмъ ближе къ A, чѣмъ незначительнѣе окажется свѣтовой источникъ въ A въ сравненіи съ очень сильнымъ свѣтомъ въ B.

Ради полноты изслѣдованія разсмотримъ и объяснимъ еще ***случай, когда*** $d = 0$.

Если при этомъ условіи a не равняется b, то и $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$; если же $a = b$, то $x_1 = 0$, а $x_2 = \frac{0}{0}$.

Эти значенія корней имѣютъ такой смыслъ:

Если источники свѣта помѣщаются въ одной точкѣ, то ими можетъ быть одинаково освѣщена только точка, находящаяся тамъ же, пока сила источниковъ свѣта неодинакова (для лучшаго уясненія сказаннаго достаточно представить себѣ источники свѣта поочередно прекращающими свое дѣйствіе), если же они еще притомъ свѣтятъ съ одинаковою силою, то въ каждой точкѣ будетъ получаться одинаковое освѣщеніе, какъ отъ одного такъ и отъ другого источника.

§ 515 Примѣръ корней, могущихъ быть и комплексными.

Задача.

На какія двѣ части нужно раздѣлить данный отрѣзокъ, чтобы сумма

$$A \qquad\qquad P \qquad\qquad B$$

площадей квадратовъ, построенныхъ на этихъ частяхъ, равнялась площади нѣкотораго даннаго квадрата?

Рѣшеніе.

Составленіе и рѣшеніе уравненія.

Чтобы придать рѣшенію болѣе общій видъ, условимся, какъ это вообще часто дѣлается, не называть мѣры, которою мы предполагаемъ измѣренными всѣ отрѣзки, и предположимъ лишь, что мѣра эта для всѣхъ линій одна и та же.

На основаніи такого соглашенія положимъ, что данный отрѣзокъ AB равенъ a (подразумѣвать нужно здѣсь и вездѣ послѣ: «мѣрамъ» указаннаго свойства) и что одна изъ искомыхъ частей AP равна x. Въ такомъ случаѣ другая часть BP будетъ равна $(a-x)$. Длину стороны даннаго квадрата обозначимъ буквою q. Тогда условіе задачи выразитъ слѣдующее уравненіе.

$$x^2+(a-x)^2=q^2.$$

Упростивъ обычнымъ образомъ это уравненіе, мы получаемъ.

$$2x^2-2ax+a^2-q^2=0,$$

а отсюда

$$x=\frac{a\pm\sqrt{2q^2-a^2}}{2}.$$

Изслѣдованіе.

Полученное для корней уравненія выраженіе полезно для изслѣдованія преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$x=\frac{a\pm\sqrt{(q\sqrt{2}+a)(q\sqrt{2}-a)}}{2}$$

$$=\frac{a\pm\sqrt{(q\sqrt{2}+a)\cdot\sqrt{2}\cdot\left(q-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}}{2}$$

$$=\frac{a\pm\sqrt{\sqrt{2}(q\sqrt{2}+a)\left(q-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)}}{2}$$

$$=\frac{a\pm\sqrt{(2q+a\sqrt{2})(q-\frac{a}{2}\sqrt{2})}}{2}.$$

По смыслу задачи ни a ни q отрицательными величинами быть не могутъ

Слѣдовательно, первый сомножитель подъ знакомъ корня будетъ всегда положительнымъ, а потому знакъ всей подкоренной величины всегда одинаковымъ со знакомъ сомножителя $\left(q-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. А изъ этого слѣдуетъ, что пока

$$q<\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

оба корня для x будутъ числа комплексныя.

Когда будетъ

$$q=\frac{a\sqrt{2}}{2},$$

корни будутъ вещественны и равны $\frac{a}{2}$ каждый.

Если же будетъ

$$q>\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

то корни уравненія будутъ вещественны и другъ другу не равны. При последнемъ условіи, по мѣрѣ увеличенія q корень x_1 будетъ увеличиваться, корень x_2 уменьшаться. При $q=a$ будутъ $x_1=a$, $x_2=0$.

При дальнѣйшемъ увеличеніи q оба корня будутъ по абсолютному значенію своему увеличиваться, оставаясь первый больше a, второй отрицательнымъ. При $q=\infty$, будутъ $x_1=+\infty$; $x_2=-\infty$.

Замѣтимъ, что сумма корней уравненія, выражающаго требованіе задачи,

$$x_1+x_2=a.$$

что, слѣдовательно,

$$x_2=a-x_1.$$

то есть, что во второмъ рѣшеніи искомая точка, которая нами названа была P, отстоитъ отъ A на томъ же разстояніи, на которомъ она отстоитъ въ первомъ рѣшеніи отъ B Другими словами, если мы построимъ квадраты на AP и BP, о которыхъ говорится въ задачѣ, то чертежъ второго рѣшенія

представить перевернутый около перпендикулярной къ AB оси чертежъ перваго рѣшенія.

Замѣтимъ еще, что по теоремѣ Пиѳагора діагональ квадрата, котораго сторона имѣетъ длину a, равна $a\sqrt{2}$, что, слѣдовательно, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ есть длина половины такой діагонали.

Послѣ всего изложеннаго мы можемъ приступить къ изображенію картины измѣненія рѣшенія задачи въ зависимости отъ измѣненія стороны даннаго квадрата.

Пока эта сторона не достигла длины половины діагонали квадрата, построеннаго на данномъ отрѣзкѣ AB, задача рѣшенія не допускаетъ. Впервые получается рѣшеніе, когда эта сторона будетъ равна упомянутой полудіагонали. Въ этомъ случаѣ получится одно рѣшеніе задачи, въ которомъ искомыя части даннаго отрѣзка будутъ равны между собою. Какъ только сторона даннаго квадрата будетъ дана больше половины упомянутой полудіагонали, рѣшеній будетъ получаться два, при чемъ въ обоихъ изъ нихъ квадратъ, построенный на большей части даннаго отрѣзка, будетъ, по мѣрѣ увеличенія стороны даннаго квадрата, увеличиваться, квадратъ же, построенный на другой части, соотвѣтственно уменьшаться, пока, наконецъ, при $q=a$, первый не сравняется съ квадратомъ, имѣющимъ данный отрѣзокъ AB стороною, а второй не исчезнетъ. Вмѣстѣ съ этимъ прекращается возможность буквально понимаемаго рѣшенія задачи.

Но рѣшенія продолжаются, если понимать задачу въ болѣе общемъ смыслѣ, допускающемъ, чтобы точка P находилась и на продолженіяхъ даннаго отрѣзка. Эта болѣе общая задача должна бы быть выражена, примѣрно, такъ: «На прямой даны двѣ точки. Найти третью точку такого свойства, чтобы сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на ея разстояніяхъ отъ данныхъ точекъ, равнялась площади нѣкотораго даннаго квадрата».

ГЛАВА XIV.

Свойства трехчлена второй степени.

§ 516. **Опредѣленія и предварительныя замѣчанія.** Выраженіе ax^2+bx+c называется трехчленомъ второй степени относительно x. Значенія x, превращающія его въ 0, или, другими словами, корни уравненія

$$ax^2+bx+c=0$$

называются также корнями трехчлена ax^2+bx+c.

Такихъ корней имѣется, какъ выяснили наши изслѣдованія, всегда два, а именно

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Въ одномъ случаѣ, а именно, когда

$$b^2-4ac=0,$$

то есть, когда

$$b^2=4ac,$$

эти корни равны между собою. При значеніяхъ x, отличающихся отъ корней трехчлена, онъ не будетъ равнымъ 0, а при вещественныхъ значеніяхъ, обладающихъ названнымъ свойствомъ, онъ будетъ положительною или отрицательною величиною. Какою же именно когда, это рѣшается по слѣдующему правилу:

§ 517. **Теорема.** Трехчленъ второй степени ax^2+bx+c **188**
имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и коэффиціентъ a, при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ x кромѣ тѣхъ, которыя заключены между корнями трехчлена.

Док. Замѣтимъ предварительно, что теорема, говоря о вещественныхъ значеніяхъ x, заключенныхъ между корнями трехчлена, тѣмъ самымъ указываетъ на возможность такихъ значеній только при условіи, что названные корни вещественны и неравны, ибо числомъ, заключеннымъ между двумя другими числами, называется такое, которое больше одного изъ этихъ двухъ и меньше другого, а къ мнимымъ числамъ понятія «больше» и «меньше» не примѣняются.

Далѣе отмѣтимъ, что въ теоремѣ a, b и c предполагаются вещественными числами. Потому корни трехчлена

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

будутъ комплексные, если $b^2<4ac$, вещественны и равны, если $b^2=4ac$, и, наконецъ, вещественны и неравны, если $b^2>4ac$.

При доказательствѣ теоремы нужно особо разсмотрѣть каждый изъ этихъ случаевъ.

I. $b^2<4ac$.

Преобразовавъ трехчленъ слѣдующимъ образомъ:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right],$$

мы видимъ, что выраженіе въ угловатыхъ скобкахъ въ случаѣ *комплексныхъ корней* трехчлена есть величина положительная, ибо въ этомъ случаѣ $b^2<4ac$, слѣдовательно, $4ac-b^2>0$, и $4a^2$ и $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ также положительны, такъ какъ квадратъ всякаго вещественнаго числа есть число положительное. Слѣ-

довательно, и въ самомъ дѣлѣ ax^2+bx+c означаетъ положительное число, если $a>0$, и отрицательное, если $a<0$.

II. $b^2=4ac$

При помощи того же преобразованія мы убѣждаемся, что въ случаѣ *вещественныхъ равныхъ корней* трехчлена должно быть

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

ибо при условіи, что $b^2=4ac$, второй членъ въ угловатыхъ скобкахъ равенъ 0. Слѣдовательно, и теперь трехчленъ имѣетъ одинаковый съ a знакъ, такъ какъ множитель $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, какъ квадратъ вещественнаго числа, есть всегда величина положительная.

III. $b^2<4ac$

1) ***Значенія x внѣ области, заключенной между корнями.***

Только въ случаѣ *вещественныхъ неравныхъ корней* и возможны—и такія значенія x, которыя заключены между этими корнями, и такія, которыя находятся внѣ этой области.

Такъ какъ безразлично, который изъ корней называется x_1 и который x_2, то положимъ, что x_1 есть большій изъ нихъ. А затѣмъ изобразимъ трехчленъ разложеннымъ на сомножителей по теоремѣ **185**:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія всякое значеніе x, которое больше x_1, подавно больше x_2, а потому сомножители $x-x_1$ и $x-x_2$ оба положительны, если $x>x_1$; всякое же значеніе x, которое меньше x_2, подавно меньше x_1, а потому сомножители $x-x_1$ и $x-x_2$ оба отрицательны, если $x<x_2$. Слѣдовательно, въ обоихъ этихъ случаяхъ произведеніе $(x-x_1)(x-x_2)$ положительно, а потому произведеніе его еще на a, равное трехчлену, положительно, если $a>0$, и отрицательно, если $a<0$. Другими словами, и при названныхъ условіяхъ трехчленъ ax^2+bx+c имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и коэффиціентъ a.

2) ***Значенія x въ области, заключенной между корнями.***

Наконецъ, при всякомъ значеніи x, заключенномъ между корнями, изъ разностей $x-x_1$ и $x-x_2$ одна должна быть положительною, а другая отрицательною, слѣдовательно, произведеніе $(x-x_1)(x-x_2)$ будетъ отрицательнымъ, а потому произведеніе его еще на a, равное трехчлену, будетъ отрицательнымъ, если $a>0$, и положительнымъ, если $a<0$. Другими словами, и въ самомъ дѣлѣ трехчленъ ax^2+bx+c имѣетъ знакъ, противопо-

ложный знаку коэффиціента a при всякомъ значеніи x, заключенномъ между корнями трехчлена.

§ 518. **Теорема.** Значеніе x, при которомъ трехчленъ ax^2+bx+c имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и a, больше большаго корня этого трехчлена, если оно больше полусуммы корней его, и меньше меньшаго корня, если оно меньше этой полусуммы. **189**

Док. Если послѣ подстановки въ трехчленъ ax^2+bx+c вмѣсто x какого-либо вещественнаго числа получается величина знака противоположнаго знаку коэффиціента a, то изъ этого, на основаніи предыдущей теоремы слѣдуетъ, что названное число заключено между корнями этого трехчлена; если же послѣ такой подстановки значеніе трехчлена окажется имѣющимъ тотъ же знакъ, какой имѣетъ коэффиціентъ a, то подставленное число должно быть или больше большаго или меньше меньшаго корня трехчлена. Но такъ какъ

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > -\frac{b}{2a} > \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

то, разъ установлено, что подставляемое число не заключается между корнями, оно, будучи больше полусуммы корней $-\frac{b}{2a}$, будетъ и больше $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, и, будучи меньше $-\frac{b}{2a}$, будетъ и меньше $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Потому достаточно убѣдиться, будетъ ли такое число больше или меньше полусуммы корней трехчлена, чтобы знать, что оно въ первомъ случаѣ и больше большаго корня, и что оно во второмъ случаѣ также меньше меньшаго корня.

§ 519. **Примѣры примѣненія послѣднихъ 2 теоремъ.**

1) Трехчленъ $9x^2-10x+30$ при всякомъ вещественномъ значеніи x будетъ положительнымъ, такъ какъ корни его мнимые, что, конечно, узнается по знаку дискриминанта.

2) Трехчленъ $-25x^2+20x-229$ при всякомъ вещественномъ значеніи x будетъ отрицательнымъ, такъ какъ и его корни мнимые.

3) Трехчленъ $-49x^2+28x-4$ при всякомъ вещественномъ значеніи x будетъ отрицательнымъ, такъ какъ

$$28^2-4\,.\,(-49)\,.\,(-4)=0,$$

слѣдовательно, корни его равны.

4) При $x=3$ трехчленъ $2x^2-13x+20$ равенъ -1, слѣдовательно, 3 заключается между корнями этого трехчлена.

При $x=1$ онъ равенъ 9, а такъ какъ $1<\frac{13}{4}$ то 1 меньше меньшаго корня трехчлена.

§ 520. **Отысканіе заданнаго значенія трехчлена 2-ой степени.** Чтобы рѣшить вопросъ, при какомъ значеніи x трехчленъ ax^2+bx+c будетъ равенъ нѣкоторому данному числу P, нужно рѣшить относительно x уравненіе

$$P=ax^2+bx+c.$$

Искомое значеніе x, по теоремѣ **183**, выражается формулою

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+4aP}}{2a}.$$

Изъ нея видно, что всегда получается 2 рѣшенія задачи и въ одномъ только случаѣ одно, а именно, когда

$$b^2-4ac+4aP=0.$$

§ 521. **Отысканіе наибольшаго или наименьшаго значенія трехчлена 2-ой степени.** Разсматривая только вещественныя значенія коэффиціентовъ a, b и c, мы изъ выведенной въ предыдущемъ параграфѣ формулы

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+4aP}}{2a}$$

видимъ, что и x будетъ вещественнымъ числомъ только до тѣхъ поръ, пока подкоренная величина

$$b^2-4ac+4aP>0$$

или въ крайнемъ случаѣ, если еще

$$b^2-4ac+4aP=0.$$

При *положительномъ* a подкоренная величина будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше будетъ P, и можетъ вмѣстѣ съ P возрасти до $+\infty$; а при уменьшеніи P и она будетъ уменьшаться. Наименьшее же значеніе P, возможное при вещественномъ x, есть то, при которомъ

$$b^2-4ac+4aP=0,$$

слѣдовательно,

$$P=\frac{4ac-b^2}{4a},$$

такъ какъ при еще меньшихъ значеніяхъ P вещественнымъ числомъ x уже не могло бы быть. При названномъ наименьшемъ значеніи P

$$x=-\frac{b}{2a};$$

и наоборотъ, когда $x=-\frac{b}{2a}$, значеніе P должно быть наименьшимъ.

При ***отрицательномъ*** a подкоренная величина $b^2-4ac+4aP$ будетъ тѣмъ меньше чѣмъ больше P. Н , при вещественныхъ значеніяхъ x, P не можетъ быть больше значенія $\frac{4ac-b^2}{4a}$, при которомъ подкоренная величина дѣлается равною 0, такъ какъ въ противномъ случаѣ x было бы уже не вещественное число. Уменьшаться же P можетъ до $-\infty$.

При названномъ наибольшемъ возможномъ значеніи P

$$x=-\frac{b}{2a};$$

и на оборотъ, когда $x=-\frac{b}{2a}$, значеніе P должно быть наибольшимъ.

Путемъ повторенія тѣхъ же разсужденій, съ которыми мы познакомились въ этомъ параграфѣ, можно отыскать наибольшее или наименьшее значеніе трехчлена 2-ой степени для каждаго частнаго случая коэффиціентовъ a, b и c. Но повтореніе всего изложеннаго станетъ излишнимъ, если мы разъ навсегда запомнимъ результатъ, къ которому мы пришли, разсмотрѣвъ трехчленъ 2-ой степени въ общемъ видѣ. Этотъ результатъ можетъ быть резюмированъ слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Трехчленъ ax^2+bx+c при положительномъ a никогда не можетъ стать меньше $\frac{4ac-b^2}{4a}$, а при отрицательномъ a не можетъ стать больше $\frac{4ac-b^2}{4a}$, причемъ какъ это наименьшее, такъ и это наибольшее значеніе его, получаются при $x=-\frac{b}{2a}$.

Доказана могла бы быть эта теорема также слѣдующимъ болѣе простымъ способомъ.

Трехчленъ P можно преобразовать такъ:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Такъ какъ наименьшее значеніе квадрата вещественнаго числа есть 0, то, при $a>0$, $\frac{4ac-b^2}{4a}$ будетъ *наименьшее* значеніе выраженія $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

прибавлено въ томъ случаѣ, когда $x=-\frac{b}{2a}$, а при $a<0$ будетъ въ томъ же случаѣ *наименьшее* абсолютное значеніе этого выраженія отъ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ *отнято*. А изъ этого и слѣдуетъ справедливость истины, утверждаемой теоремою.

§ 522. **Примѣры къ послѣднимъ двумъ параграфамъ.**

З а д а ч а 1.

При какомъ значеніи x трехчленъ $5x^2-7x+3$ будетъ равенъ 9?

Р ѣ ш е н і е.

Изъ уравненія

$$9=5x^2-7x+3$$

мы получаемъ

$$x_1=2$$
$$x_2=-\frac{3}{5}.$$

Такъ оказывается, что данный трехчленъ равенъ 9 при $x=2$ и при $x=-\frac{3}{5}$.

З а д а ч а 2.

Найти наибольшее значеніе трехчлена $5+16x-8x^2$.

Р ѣ ш е н і е.

По теоремѣ, доказанной въ послѣднемъ параграфѣ, наибольшее значеніе даннаго трехчлена должно получиться при

$$x=-\frac{16}{2\cdot(-8)}=+1.$$

и равно 13, то есть, ни при какомъ вещественномъ значеніи x трехчленъ больше 13 стать не можетъ, уменьшаться же можетъ до $-\infty$.

З а д а ч а 3.

Найти наименьшее значеніе трехчлена $15x^2-11x+5\frac{1}{60}$.

Рѣшеніе.

По теоремѣ, доказанной въ послѣднемъ параграфѣ, наименьшее значеніе даннаго трехчлена должно получиться при

$$x = -\frac{-11}{2\cdot15} = \frac{11}{30}$$

и равно 3, увеличиваться же этотъ трехчленъ можетъ до $+\infty$.

Задача 4.

На какія двѣ части нужно разложить данное число, чтобы произведеніе этихъ частей было наибольшее.

Рѣшеніе.

Если данное число назовемъ a и одну изъ искомыхъ частей x, то другая часть будетъ $a-x$. Произведеніе этихъ частей

$$y = x(a-x)$$

мы можемъ представить въ видѣ:

$$y = -x^2 + ax.$$

По примѣняемой въ этихъ задачахъ теоремѣ наибольшее значеніе этого выраженія получается при

$$x = -\frac{a}{-2} = \frac{a}{2}.$$

Если же одна изъ искомыхъ частей даннаго числа есть $\frac{a}{2}$, то и другая должна быть $\frac{a}{2}$, т. е., данное число нужно разложить на *равныя части*, чтобы произведеніе ихъ было наибольшее возможное.

ГЛАВА XV.

Приведеніе уравненій къ уравненіямъ болѣе низкихъ степеней.

§ 523. **Способъ введенія новаго неизвѣстнаго.** Если данное уравненіе можетъ быть приведено къ виду:

$$mA^2 + nA + p = 0$$

гдѣ m, n и p означаютъ числа или выраженія, не содержащія неизвѣстнаго, A же какое-либо алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстное, то

рѣшивъ уравненіе относительно A, мы получимъ для A два значенія A_1 и A_2. Такимъ образомъ данное уравненіе распадается на два:

$$A=A_1 \quad \text{и} \quad A=A_2,$$

которыхъ степень вдвое ниже степени даннаго уравненія и изъ котораго потому легче найти значенія неизвѣстнаго.

Примѣры.

1) $x^4+ax^2+b=0$ *).

Если мы въ этомъ уравненіи x^2 обозначимъ буквою y, то оно приметъ видъ:

$$y^2+ay+b=0$$

Отсюда же мы получаемъ:

$$y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Слѣдовательно, мы искомое неизвѣстное находимъ изъ уравненій:

$$x^2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \quad \Big| \quad x^2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

и получаемъ изъ нихъ:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}} \quad \Big| \quad x_3=+\sqrt{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}}$$

$$x_2=-\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}} \quad \Big| \quad x_4=-\sqrt{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}}$$

2) $x^8-97x^4+1296=0$

Обозначивъ въ этомъ уравненіи x^4 буквою y, мы получаемъ:

$$y^2-97y+1296=0.$$

откуда

$$y_1=81 \qquad y_2=16$$

Слѣдовательно, искомое неизвѣстное получается изъ уравненій:

$$x^4=81 \quad \Big| \quad x^4=16$$

*) См. подстрочное примѣчаніе въ § 355.

Если мы изъ этихъ уравненій извлечемъ квадратный корень, то каждое изъ нихъ распадается на два уравненія:

$$x^2 = +9 \quad \Big| \quad x^2 = -9 \quad \Big| \quad x^2 = +4 \quad \Big| \quad x^2 = -4$$

изъ которыхъ мы находимъ.

$$x_1 = +3 \quad \Big| \quad x_3 = +3i \quad \Big| \quad x_5 = +2 \quad \Big| \quad x_7 = +2i$$
$$x_2 = -3 \quad \Big| \quad x_4 = -3i \quad \Big| \quad x_6 = -2 \quad \Big| \quad x_8 = -2i.$$

3) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x - 60 = 0$.

Если мы это уравненіе преобразуемъ такъ:

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 9x^2 + 5x^2 + 12x - 60 = 0,$$

то первые 3 члена составятъ полный квадратъ бинома $x^2 - 3x$. Сдѣлавъ приведеніе 4-го и 5-го членовъ, мы получаемъ

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x^2 + 12x - 60 = 0$$

или

$$(x^2 - 3x)^2 - 4(x^2 - 3x) - 60 = 0.$$

Обозначивъ $x^2 - 3x$ буквою y, мы имѣемъ:

$$y^2 - 4y - 60 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$y = 2 \pm \sqrt{64}$$
$$y_1 = 10; \qquad y_2 = -6,$$

такъ что данное уравненіе распадается на слѣдующія:

$$x^2 - 3x = 10$$

или

$$x^2 - 3x - 10 = 0,$$

откуда мы находимъ:

$$x_1 = 5 \ ; \ x_2 = -2$$

$$x^2 - 3x = -6$$

или

$$x^2 - 3x + 6 = 0,$$

откуда мы находимъ:

$$x_3 = \frac{3 + i\sqrt{15}}{2} \ ; \ x_4 = \frac{3 - i\sqrt{15}}{2}.$$

4) $\dfrac{x^2 + 2}{3x - 6} = 2 - \dfrac{9x - 18}{x^2 + 2}$.

Вынеся за скобки въ дѣлителѣ лѣвой части 3, а въ дѣлимомъ второго члена правой части 9, и обозначивъ $\dfrac{x^2 + 2}{x - 2}$ буквою y, мы превращаемъ

данное уравненіе въ слѣдующее:

$$\frac{1}{3}y=2+\frac{9}{y}.$$

Приведя послѣднее къ ординарному виду, мы получаемъ:

$$y^2-6y-27=0,$$

откуда

$$y_1=9 \quad , \quad y_2=-3,$$

и, слѣдовательно, для опредѣленія корней даннаго уравненія слѣдующія два рѣшаемыя ниже уравненія:

$\frac{x^2+2}{x-2}=9$	$\frac{x^2+2}{x-2}=-3$
$x^2-9x+20=0$	$x^2+3x-4=0$
$x_1=5$; $x_2=4$	$x_3=1$, $x_4=-4$.

§ 524. **Способъ разложенія на сомножителей.** Если, послѣ перенесенія всѣхъ членовъ уравненія въ одну часть, его удастся представить въ видѣ:

$$A\,.\,B\,.\,C\,.\,\ldots\,.\,N=0,$$

гдѣ A, B, C,..., N означають выраженія, содержащія неизвѣстное, то уравненіе распадается, на основаніи теоремы **45ª**, на уравненія:

$$A=0;\ B=0;\ C=0;\ \ldots\ N=0,$$

которыхъ степени ниже степени даннаго уравненія.

Этотъ способъ по существу не отличается отъ того, которымъ рѣшено было уравненіе въ § 372.

Примѣръ.

Уравненіе

$$x^4=2x^3-5x^2-6x$$

можетъ быть рѣшено слѣдующимъ образомъ:

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть, разложивъ второй членъ на два члена и вынеся x за скобки, мы получаемъ:

$$x[x^3-x^2-x^2-5x+6]=0,$$

а отсюда

$$x[x^2(x-1)-(x^2-x+6x-6)]=0$$
$$x\{x^2(x-1)-[x(x-1)+6(x-1)]\}=0$$
$$x\{x^2(x-1)-(x-1)(x+6)\}=0$$
$$x(x-1)(x^2-x-6)=0$$
$$x(x-1)(x^2-3x+2x-6)=0$$
$$x(x-1)[x(x-3)+2(x-3)]=0$$
$$x(x-1)(x-3)(x+2)=0$$

Послѣднее уравненіе, значитъ и данное, будетъ удовлетворено, если

	или	или	или
$x=0$	$x-1=0$	$x-3=0$	$x+2=0$,

откуда мы видимъ, что корни уравненія суть:

$$x_1=0 \quad \Big| \quad x_2=1 \quad \Big| \quad x_3=3 \quad \Big| \quad x_4=-2.$$

§ 525. **Случай, когда одинъ или нѣсколько корней уравненія извѣстны.** Послѣдній способъ приведенія уравненія къ уравненіямъ болѣе низкихъ степеней примѣнимъ въ случаѣ, названномъ въ заголовкѣ этого параграфа.

Если уравненіе приведено къ ординарному виду

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+lx+m=0,$$

и извѣстно, что α — корень его, то многочленъ въ лѣвой части уравненія при подстановкѣ α вмѣсто x долженъ превратиться въ 0. Слѣдовательно, онъ, по теоремѣ, приведенной въ § 87 какъ слѣдствіе, дѣлится безъ остатка на $x-\alpha$, а потому уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ

$$(x-\alpha)Q=0,$$

гдѣ Q означаетъ частное отъ дѣленія названнаго многочлена на $x-\alpha$.

Такимъ образомъ данное уравненіе распадается на два:

$$x-\alpha=0 \quad \text{и} \quad Q=0,$$

изъ которыхъ въ послѣднемъ показатель высшей степени неизвѣстнаго на 1 меньше, чѣмъ въ данномъ.

Если окажется еще одинъ извѣстный корень β, то многочленъ Q будетъ дѣлиться безъ остатка на $x-\beta$, а многочленъ, составляющій лѣвую часть

даннаго уравненія на $(x-\alpha)(x-\beta)$, вслѣдствіе чего данное уравненіе распадается на 3 уравненія, а именно на уравненія

$$x-\alpha=0\ ,\ x-\beta=0;$$

и на нѣкоторое уравненіе $(n-2)$-ой степени.

Такимъ же образомъ и дальше съ каждымъ новымъ извѣстнымъ корнемъ продолжаетъ понижаться степень уравненія, къ рѣшенію котораго сводится рѣшеніе даннаго.

Примѣръ.

Замѣтивъ, что въ уравненіи

$$x^3-8x^2+19x-12=0,$$

сумма всѣхъ четырехъ коэффиціентовъ равна 0, мы убѣждаемся, что оно удовлетворяется корнемъ

$$x=1$$

Раздѣливъ лѣвую часть его на $x-1$, мы можемъ его представить въ видѣ:

$$(x-1)(x^2-7x+12)=0.$$

Слѣдовательно, корни его получаются изъ слѣдующихъ уравненій:

$$x-1=0, \quad | \quad x^2-7x+12=0.$$

откуда | откуда

$$x_1=1 \qquad x_2=4\ ;\ x_3=3.$$

Но раздѣливъ данное уравненіе на $x-1$, мы могли бы продолжать рѣшеніе его такъ, какъ это указано было въ § 372.

ГЛАВА XVI.

Возвратныя уравненія.

§ 526. **Предварительныя разъясненія.** Если въ уравненіи, приведенномъ къ ординарному виду, коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ высшей степени равенъ свободному члену и равны также коэффиціенты членовъ второго и предпослѣдняго, третьяго и третьяго отъ конца и т. д., вообще, значитъ, членовъ одинаковыхъ по счету отъ начала и отъ конца многочлена въ лѣвой части уравненія, то оно называется симметричнымъ. Симметричными же называются въ немъ и эти члены съ равными коэффиціентами.

Если мы въ симметричномъ уравненіи неизвѣстное замѣнимъ его обратною величиною, напримѣръ, x величиною $\frac{1}{x}$, то послѣ уничтоженія знаменателей получается первоначальное уравненіе. Но есть и другія уравненія, отличающіяся тѣмъ же свойствомъ. А вообще *всѣ уравненія, не измѣняющіяся отъ замѣны въ нихъ неизвѣстнаго его обратною величиною, называются возвратными* *).

Ясно, что всякое такое уравненіе должно удовлетворяться значеніемъ $\frac{1}{\alpha}$, если оно удовлетворяется значеніемъ α; другими словами: кромѣ каждаго найденнаго корня такое уравненіе должно имѣть еще корнемъ обратную величину его.

Чрезъ дѣленіе на коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ высшей степени каждое симметричное уравненіе приводится къ виду, въ которомъ коэффиціентъ при этой степени неизвѣстнаго равенъ 1, а свободный членъ равенъ $+1$ или -1.

Въ такомъ видѣ мы потому ниже и будемъ изображать эти уравненія.

§ 527. **Симметричное уравненіе 3-ей степени.** Симметричное уравненіе

$$x^3+ax^2+ax+1=0$$

мы можемъ, преобразовывая лѣвую часть его, представить въ такомъ видѣ:

$$x^3+1+ax(x+1)=0,$$

а послѣ этого въ такомъ:

$$(x+1)(x^2-x+1)+ax(x+1)=0.$$

Раздѣливъ послѣднее уравненіе на $x+1$ и найдя такимъ образомъ корень его [см. § 372], а, слѣдовательно, и даннаго уравненія,

$$x_1=-1,$$

мы получаемъ

$$x^2+(a-1)x+1=0,$$

откуда

$$x_2=\frac{1-a+\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2}$$

$$x_3=\frac{1-a-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2}$$

---

*) Словомъ «возвратный» русскими математиками переведено слово reciprok (по-англійски reciprocal), означающее въ сущности «взаимный», но у нѣмецкихъ и англійскихъ математиковъ «обратный» въ смыслѣ опредѣленія 81.

Умноживъ эти послѣднiе два корня другъ на друга, мы узнаемъ, какъ и слѣдовало ожидать, что

$$x_2 x_3 = 1,$$

то есть, что каждый изъ этихъ двухъ корней есть обратная величина другого.

§ 528 **Симетричное уравненiе 4-ой степени.** Рѣшенiе симметричнаго уравненiя

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

можетъ быть сведено къ рѣшенiю квадратныхъ уравненiй, если его раздѣлить на x^2. Такъ получается:

$$x^2 + ax + b + a \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

а отсюда

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \quad \ldots \text{ (A)}$$

Обозначивъ $x + \frac{1}{x}$ буквою y, мы путемъ возвышенiя равенства

$$x + \frac{1}{x} = y$$

въ квадратъ находимъ, что

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2,$$

слѣдовательно,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Замѣнивъ въ уравненiи A выраженiя $x^2 + \frac{1}{x^2}$ и $x + \frac{1}{x}$ выраженiемъ $y^2 - 2$ и буквою y, мы получаемъ

$$y^2 - 2 + ay + b = 0$$

или

$$y^2 + ay + b - 2 = 0.$$

Послѣднее уравненiе имѣетъ 2 корня y_1 и y_2, такъ что данное уравненiе распадается на уравненiя:

$x + \frac{1}{x} = y_1$	$x + \frac{1}{x} = y_2$
или	или
$x^2 - y_1 x + 1 = 0$	$x^2 - y_2 x + 1 = 0$

Рѣшивъ ихъ, мы получимъ изъ каждаго изъ нихъ по два корня и такимъ образомъ всѣ 4 корня даннаго уравненія.

Здѣсь изъ свободнаго члена 1 послѣднихъ двухъ уравненій видно, что первые 2 корня и послѣдніе 2 корня суть величины обратныя другъ другу.

§ 529. **Симметричное и возвратное, но несимметричное, уравненія 5-ой степени.** Симметричное уравненіе

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

можетъ быть приведено къ виду

$$(x^5 + 1) + ax(x^3 + 1) + bx^2(x + 1) = 0,$$

а послѣ этого еще преобразовано такъ:

$$(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + ax(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx^2(x + 1) = 0.$$

Теперь видно, что оно дѣлится на $x + 1$ *), что, слѣдовательно, одинъ изъ корней его есть -1. Послѣ же дѣленія мы получаемъ:

$$x^4 + (a - 1)x^3 + (b - a + 1)x^2 + (a - 1)x + 1 = 0,$$

то есть симметричное уравненіе 4-й степени, рѣшеніе каковаго уже объяснено было въ предыдущемъ параграфѣ.

Такимъ же образомъ возвратное уравненіе

$$x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - ax - 1 = 0$$

сводится къ рѣшенію симметричнаго уравненія 4-й степени послѣ дѣленія на $x - 1$.

§ 530. **Возвратное уравненіе 6-ой степени.** Къ рѣшенію квадратныхъ уравненій можетъ быть также сведено рѣшеніе возвратнаго уравненія 6-й степени

$$x^6 + ax^5 + bx^4 - bx^2 - ax - 1 = 0.$$

Преобразовавъ его слѣдующимъ образомъ:

$$(x^6 - 1) + ax(x^4 - 1) + bx^2(x^2 - 1) = 0$$
$$(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) + ax(x^2 - 1)(x^2 + 1) + bx^2(x^2 - 1) = 0,$$

---

*) Разсмотрѣнныхъ примѣровъ достаточно, чтобы убѣдиться, что вообще всякое симметричное уравненіе нечетной степени дѣлится на $x + 1$.

мы видимъ, что оно дѣлится на x^2-1, и что, слѣдовательно, корни уравненія

$$x^2-1=0,$$

то есть

$$x_1=+1$$

и

$$x_2=-1,$$

суть и его корни.

Послѣ дѣленія мы получаемъ:

$$x^4+ax^3+(b+1)x^2+ax+1=0,$$

то есть симметричное уравненіе, которое должно рѣшать, какъ указано въ § 528, и которое даетъ еще 4 корня даннаго уравненія.

§ 531. **Уравненіе, рѣшаемое по способу симметричныхъ.** Уравненіе

$$x^4+ax^3+bx^2-ax+1=0$$

имѣетъ сходство съ разсмотрѣнными возвратными уравненіями и по виду, и въ томъ отношеніи, что не измѣняется отъ замѣны въ немъ неизвѣстнаго x величиною обратною и противоположною $-\frac{1}{x}$. И рѣшено оно можетъ быть по тому же способу, какъ и симметричное уравненіе 4-й степени [§ 528].

Раздѣливъ разсматриваемое нами здѣсь уравненіе на x^2, мы получаемъ

$$x^2+\frac{1}{x^2}+a\left(x-\frac{1}{x}\right)+b=0;$$

а если мы затѣмъ подставимъ y вмѣсто $x-\frac{1}{x}$, то будетъ

$$x^2-2+\frac{1}{x^2}=y^2$$

слѣдовательно,

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2,$$

а данное уравненіе замѣняется уравненіемъ

$$y^2+2+ay+b=0$$

или

$$y^2+ay+b+2=0.$$

Если корни этого уравненія назовемъ y_1 и y_2, то данное уравненіе оказывается распадающимся на уравненія:

$x-\frac{1}{x}=y_1$	$x-\frac{1}{x}=y_2$
или	или
$x^2-y_1x-1=0$	$x^2-y_2x-1=0$

Корни этихъ уравненій и будутъ 4 корня разсматриваемаго уравненія.

Изъ свободнаго же члена -1 послѣднихъ двухъ уравненій видно, что какъ первые 2 корня, такъ и послѣдніе 2, суть числа обратныя по абсолютной величинѣ и противоположныя по знаку. Но это свойство корней слѣдовало уже изъ упомянутой въ началѣ параграфа особенности уравненія, что оно не измѣняется отъ замѣны неизвѣстнаго величиною обратною и противоположною

ГЛАВА XVII.

Двучленныя уравненія.

§ 532. **Опредѣленіе двучленнаго уравненія и число корней его.** Требованіе найти число, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, дастъ число a, выражается [опредѣл. 96] символомъ $\sqrt[n]{a}$. Но въ § 303 было разъяснено и доказано, что есть n чиселъ, удовлетворяющихъ этому требованію, а въ § 305 указано, что условно вся совокупность этихъ чиселъ выражается особымъ символомъ $\sqrt[n]{}*a$, называемымъ *общимъ корнемъ n-ой степени изъ a*, который такимъ образомъ имѣетъ n различныхъ значеній, тогда какъ символъ $\sqrt[n]{a}$ означаетъ одно изъ нихъ, обыкновенно то, которое называется главнымъ [§ 305], то есть положительное вещественное значеніе корня изъ положительнаго числа и единственное вещественное значеніе корня нечетной степени изъ отрицательнаго числа.

Названное выше требованіе можетъ быть выражено также уравненіемъ

$$x^n=a,$$

въ которомъ x обозначаетъ искомое число, и которое въ силу того, на что только-что указано было, должно имѣть n корней.

Перенеся въ этомъ уравненіи a въ лѣвую часть, мы получаемъ:

$$x^n-a=0.$$

Такого вида уравненія или очень просто приводящіяся къ нему уравненія болѣе общаго вида

$$ax^n-b=0$$

называются двучленными. Ихъ рѣшеніе состоитъ въ опредѣленіи всѣхъ n значеній $\sqrt[n]{\pm a}$ или соотвѣтственно $\sqrt[n]{\pm \frac{b}{a}}$, которое во всѣхъ случаяхъ и въ общемъ видѣ возможно только при помощи тригонометріи [§§ 303—306].

Алгебраически же рѣшаются только нѣкоторые частные случаи двучленнаго уравненія, которые мы и разсмотримъ въ этой главѣ.

§ 533. **Простѣйшій видъ двучленнаго уравненія.** Прежде, однако, чѣмъ приступить къ разсмотрѣнію названныхъ частныхъ случаевъ, замѣтимъ, что если мы введемъ въ уравненіе

$$x^n \pm a = 0$$

новое неизвѣстное z, подставляя $z\sqrt[n]{a}$ вмѣсто x, то мы получимъ уравненіе

$$az^n \pm a = 0,$$

которое послѣ дѣленія на a превращается въ равносильное

$$z^n \pm 1 = 0,$$

имѣющее рѣшеніемъ

$$z = \sqrt[n]{\mp 1}.$$

Такимъ способомъ къ послѣднему виду можетъ быть приведено всякое двучленное уравненіе. А вмѣстѣ съ тѣмъ отысканіе всѣхъ значеній $\sqrt[n]{\pm a}$ сводится къ нахожденію всѣхъ значеній $\sqrt[n]{\pm 1}$, такъ какъ $x = z\sqrt[n]{a}$ [ср. правило **120** въ § 306].

Поэтому мы, разсматривая ниже алгебраическіе способы рѣшенія двучленныхъ уравненій, будемъ изображать ихъ только въ простѣйшемъ ихъ видѣ.

При этомъ мы начнемъ изученіе этихъ способовъ съ рѣшенія двучленныхъ уравненій 3-й степени, такъ какъ двучленныя уравненія 1-й и 2-й степени не представляютъ чего-либо новаго.

§ 534. **Двучленное уравненіе 3-ьей степени.** Чтобы рѣшить уравненіе

$$x^3 - 1 = 0,$$

раздѣлимъ его на $x-1$, при чемъ опредѣляется одинъ корень его [§ 372]

$$x_1 = +1$$

и получается:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

А изъ послѣдняго уравненія мы находимъ еще:

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

вмѣсто чего мы можемъ писать также, примѣняя гауссову единицу:

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Такъ какъ къ этимъ корнямъ намъ еще придется нерѣдко возвращаться, и вообще они встрѣчаются часто, то обозначимъ ихъ особыми знаками: назовемъ ихъ I_1, I_2 и I_3, такъ что всегда впредь эта буква съ приписанными къ ней внизу справа указателями будетъ означать слѣдующее:

$$I_1 = +1$$
$$I_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
$$I_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Изъ разъясненій предыдущаго параграфа и по правилу **120** слѣдуетъ, что если найденъ одинъ корень уравненія

$$x^3 - a = 0,$$

и мы его назовемъ α, то всѣ корни этого уравненія будутъ

$$x_1 = \alpha I_1$$
$$x_2 = \alpha I_2$$
$$x_3 = \alpha I_3,$$

при чемъ, конечно, обыкновенно легче всего будетъ найти и потому будетъ первымъ извѣстенъ корень, представляющій главное значеніе $\sqrt[3]{*a}$.

Примѣры.

1) Изъ корней уравненія

$$x^3 = 125$$

одинъ есть ариѳметическое значеніе $\sqrt[3]{*125}$, то есть 5. Слѣдовательно, это уравненіе имѣетъ корни.

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 5I_2 = 5 \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = 5I_3 = 5 \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

2) Изъ корней уравненія

$$27x^3 + 64 = 0$$

очень легко опредѣляется тотъ, который есть главное значеніе $\sqrt[3]{* \frac{-64}{27}}$, то есть $-\frac{4}{3}$. Слѣдовательно, оба остальные корня должны быть $-\frac{4}{3} \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{4}{3} \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Упростивъ послѣднія 2 выраженія, мы потому вообще имѣемъ:

$$x_1 = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}(1 - i\sqrt{3})$$

$$x_3 = \frac{2}{3}(1 + i\sqrt{3}).$$

§ 535 **Двучленное уравненіе 4-ой степени.** Уравненіе

$$x^4 - 1 = 0$$

можетъ быть чрезъ разложеніе его лѣвой части на сомножителей приведено къ виду

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

или

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0,$$

а потому оно распадается на слѣдующія уравненія, совокупность корней которыхъ составляетъ всѣ корни разсматриваемаго уравненія:

$x - 1 = 0$,	$x + 1 = 0$,	$x^2 + 1 = 0$,
откуда	откуда	откуда
$x_1 = +1$	$x_2 = -1$	$x^2 = -1$
		$x = \pm\sqrt{-1}$,
		слѣдовательно,
		$x_3 = +i$, $x_4 = -i$.

Эти корни суть всѣ четыре значенія общаго корня 4-й степени изъ положительной единицы.

Изъ полученнаго рѣшенія мы на основаніи того, что изложено было въ § 532, и по правилу **120** заключаемъ, что если найденъ одинъ изъ корней уравненія

$$x^4 - a = 0$$

и мы его назовемъ β, то всѣ корни этого уравненія должны быть:

$$x_1 = \beta$$
$$x_2 = -\beta$$
$$x_3 = \beta i$$
$$x_4 = -\beta i$$

Для поясненія же сказаннаго примѣромъ, рѣшимъ уравненіе

$$x^4 + 1 = 0.$$

Одинъ изъ корней его мы можемъ легко найти, если перенесемъ 1 въ правую часть и затѣмъ извлечемъ изъ уравненія квадратный корень и еще разъ квадратный корень, избирая при этомъ оба раза только одно изъ обоихъ возможныхъ значеній правой части, такъ какъ намъ достаточно знать одинъ корень разсматриваемаго уравненія, чтобы чрезъ умноженіе его на -1, i и $-i$ получить и остальные. Указаннымъ способомъ мы находимъ:

$$x^2 = i$$
$$x = \sqrt{i}.$$

слѣдовательно,

$$x_1 = \sqrt{i},$$

а отсюда

$$x_2 = -\sqrt{i}$$
$$x_3 = i\sqrt{i}$$
$$x_4 = -i\sqrt{i}.$$

Но такъ какъ при этомъ способѣ рѣшенія корни получились не въ комплексной формѣ [см. § 281], то рѣшимъ уравненіе

$$x^4 + 1 = 0$$

еще иначе.

Раздѣлимъ его на x^2 и введемъ новое неизвѣстное, полагая

$$x + \frac{1}{x} = y;$$

въ такомъ случаѣ будетъ

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2,$$

слѣдовательно,

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Такъ получается:

$$y^2-2=0,$$

откуда

$$y_1=\sqrt{2};\quad y_2=-\sqrt{2},$$

такъ что разсматриваемое уравненіе распадается на слѣдующія два, которыя мы и рѣшаемъ:

$$\begin{aligned}
&x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}\\
&x^2-\sqrt{2}\,.\,x+1=0\\
&x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\\
&x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,.\,i\\
&x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,.\,i
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
&x+\frac{1}{x}=-\sqrt{2}\\
&x^2+\sqrt{2}\,.\,x+1=0\\
&x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}\\
&x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,.\,i\\
&x_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,.\,i
\end{aligned}$$

Получивъ теперь рѣшенія уравненія въ комплексной формѣ, мы видимъ, что 1-й и 2-й корень суть сопряженныя комплексныя числа, равно какъ и 3-й и 4-й корни.

Эти 4 корня суть 4 значенія $\sqrt[4]{-1}$.

§ 536. **Двучленное уравненіе 5-ой степени.** Уравненіе

$$x^5-1=0$$

можно раздѣлить на $x-1$, при чемъ опредѣляется корень его

$$x_1=+1.$$

Послѣ же дѣленія получается симметричное уравненіе

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

которое можетъ быть рѣшено способомъ, изложеннымъ въ § 528.

Раздѣливъ его на x^2 и подставивъ y вмѣсто $x+\frac{1}{x}$, мы находимъ путемъ пріемовъ, указанныхъ въ названномъ параграфѣ.

$$y^2+y-1=0,$$

откуда

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},$$

такъ что симметричное уравненіе распадается на слѣдующія два, изъ которыхъ мы и получаемъ недостающіе еще корни разсматриваемаго двучленнаго уравненія:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad x+\frac{1}{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,x+1=0 \qquad\qquad x^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,x+1=0$$

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-1} \qquad x=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2-1}$$

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad x=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad x_4=\frac{-(1+\sqrt{5})+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x_3=\frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad x_5=\frac{-(1+\sqrt{5})-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Эти 5 корней суть всѣ значенія $\sqrt[5]{+1}$.

Если мы обозначимъ ихъ K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 то, найдя одинъ изъ корней уравненія

$$x^5-a=0,$$

который назовемъ γ, мы сейчасъ же слѣдующимъ образомъ получаемъ и всѣ:

$$x_1=\gamma K_1$$
$$x_2=\gamma K_2$$
$$x_3=\gamma K_3$$
$$x_4=\gamma K_4$$
$$x_5=\gamma K_5$$

[см. §§ 532, 533 и правило **120**].

§ 537. **Двучленное уравненіе 6-ой степени.** Уравненіе

$$x^6-1=0$$

послѣ разложенія лѣвой части на сомножителей принимаетъ видъ

$$(x^3+1)(x^3-1)=0,$$

и потому распадается на два уравненія:

$$x^3-1=0$$

и

$$x^3+1=0,$$

способъ рѣшенія которыхъ уже указанъ былъ въ § 534.

§ 538. **Двучленныя уравненія болѣе высокихъ степеней.** Двучленное уравненіе 7-й степени еще можетъ быть рѣшено безъ помощи тригонометріи, но для этого требуется уже умѣнье рѣшать уравненія 3-й степени.

Уравненія

$$x^8-1=0$$

и

$$x^{10}-1=0$$

послѣ преобразованія ихъ въ виды:

$$(x^4-1)(x^4+1)=0$$

и

$$(x^5-1)(x^5+1)=0$$

распадаются первое на два двучленныя уравненія 4-й степени, а второе на два двучленныя уравненія 5-й степени, способы рѣшенія которыхъ нами уже разсмотрѣны.

Уравненіе

$$x^9-1=0$$

можетъ быть рѣшено чрезъ введеніе новаго неизвѣстнаго

$$y=x^3,$$

при посредствѣ котораго оно превращается въ уравненіе

$$y^3-1=0,$$

рѣшенное уже нами. Каждый изъ корней его, будучи подставленъ въ уравненіе $y=x^3$, дастъ по двучленному уравненію 3-й степени, изъ которыхъ и получатся всѣ 9 корней уравненія

$$x^9-1=0.$$

При помощи такихъ же пріемовъ могутъ быть рѣшены нѣкоторыя двучленныя уравненія и еще болѣе высокихъ степеней.

§ 539. **Трехчленное уравненіе.** Такъ называютъ уравненіе вида

$$ax^{2p}+bx^p+c=0$$

Оно квадратное относительно x^p. Обозначивъ x^p буквою y, и назвавъ y_1 и y_2 корни упомянутаго квадратнаго уравненія, т. е. уравненія

$$ay^2+by+c=0$$

мы найдемъ всѣ корни трехчленнаго уравненія, рѣшивъ двучленныя уравненія

$$x^p=y_1 \qquad x^p=y_2$$

Примѣръ.

Чтобы рѣшить уравненіе

$$64x^6-784x^3-3375=0,$$

обозначимъ x^3 буквою y и раздѣлимъ уравненіе на 64. Такъ мы получаемъ:

$$y^2-\frac{49}{4}y-\frac{3375}{64}=0,$$

откуда

$$y_1=\frac{125}{8};\quad y_2=-\frac{27}{8};$$

и продолжаемъ рѣшеніе такъ:

$$x^3=\frac{125}{8} \qquad\qquad x^3=-\frac{27}{8}$$

$$x_1=\frac{5}{2} \qquad\qquad x_4=-\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}x_2&=\frac{5}{2}I_2\\ x_3&=\frac{5}{2}I_3\end{aligned}\right\}\text{См. § 534.} \qquad \left.\begin{aligned}x_5&=-\frac{3}{2}I_2\\ x_6&=-\frac{3}{2}I_3\end{aligned}\right\}\text{См. § 534.}$$

то есть, то есть,

$$x_1=\frac{5}{2} \qquad\qquad x_4=-\frac{3}{2}$$

$$x_2=\frac{5}{2}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{5}{4}(1-i\sqrt{3}) \qquad x_5=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}(1-i\sqrt{3})$$

$$x_3=\frac{5}{2}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{5}{4}(1+i\sqrt{3}) \qquad x_6=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}(1+i\sqrt{3})$$

ГЛАВА XVIII.

Ирраціональныя уравненія.

§ 540. **Объясненіе названія.** На подобіе того, какъ буквенное частное иногда называютъ алгебраическою дробью, такъ неизвлекающійся корень какой-либо степени изъ алгебраическаго выраженія называется ирраціональнымъ алгебраическимъ выраженіемъ Потому и уравненія, въ которыхъ неизвѣстное или неизвѣстныя встрѣчаются подъ знакомъ корня, называютъ ирраціональными.

§ 541 **Поясненіе примѣрами особенности рѣшеній ирраціональныхъ уравненій** Если послѣ обычныхъ преобразованій данное ирраціональное уравненіе приводится къ виду

$$\sqrt[n]{x}=a,$$

то значеніе неизвѣстнаго получается или на основаніи опредѣленія корня, какъ это указано въ § 357, или путемъ возвышенія уравненія въ n-ую степень, при чемъ оказывается

$$x=a^n.$$

Но при этомъ должно принимать въ соображеніе, что всегда есть n различныхъ чиселъ, которыя, будучи возвышены въ n-ую степень, даютъ одно и то же число. Такъ, напр.,

и $\quad (+5)^4=+625,$
и $\quad (-5)^4=+625,$
и $\quad (+5i)^4=+625,$
и $\quad (-5i)^4=+625.$

Поэтому каждое рѣшеніе ирраціональнаго уравненія должно быть отвариваемо такъ, какъ мы это покажемъ сначала въ частныхъ случаяхъ на нижеслѣдующихъ примѣрахъ:

Задача 1.

$$\sqrt{x}=-5.$$

Рѣшеніе

Чтобы рѣшить это уравненіе, нужно его возвысить въ квадратъ. Такъ мы получаемъ

$$x=(-5)^2=25.$$

Но ясно, что, подставляя въ данное уравненіе 25 вмѣсто x, мы должны не упускать изъ виду, что въ данномъ случаѣ допустимо для $\sqrt{25}$ только значеніе $+5$. Въ рѣшеніи это можно оговорить или такъ:

$x = 25$, при чемъ должно считать $\sqrt{x} = +5$.

или же въ такомъ видѣ:

$$x = 25 = (+5)^2.$$

Задача 2.

$$\frac{2\sqrt{x}+1}{3} = 1 + \frac{\sqrt{x}-8}{2} + 3.$$

Рѣшеніе

Упростивъ при помощи обычныхъ пріемовъ это уравненіе, мы получаемъ:

$$\sqrt{x} = -2,$$

откуда

$$x = 4 = (-2)^2.$$

что означаетъ, что данное уравненіе удовлетворяется значеніемъ $x = 4$, но только при условіи, что $\sqrt{4}$ будетъ считаться равнымъ -2.

Задача 3.

$$\frac{5}{2+\sqrt{x}} = \frac{4}{1+\sqrt{x}}.$$

Рѣшеніе.

Освободивъ это уравненіе отъ знаменателей и перенеся члены, содержащіе неизвѣстное, въ лѣвую часть, а остальные въ правую, мы находимъ:

$$\sqrt{x} = +3,$$

откуда

$$x = 9 = (+3)^2.$$

То есть, данное уравненіе удовлетворяется значеніемъ $x = 9$, но при повѣркѣ рѣшенія чрезъ подстановку $\sqrt{9}$ слѣдуетъ считать только равнымъ $+3$.

По теоремѣ **148-й** данное уравненіе имѣетъ еще особый корень

$$x = \infty$$

такъ какъ по уничтоженіи знаменателей получается уравненіе 1-й степени относительно $\sqrt{x}$, общій же знаменатель, на котораго для этого умножалось данное уравненіе, относительно $\sqrt{x}$ 2-й степени.

Задача 4.

$$\frac{3\sqrt{x}}{5} + \frac{7}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{1}.$$

Рѣшеніе

Освободивъ это уравненіе отъ знаменателей и приведя его въ порядокъ, мы получаемъ:

$$3x + 8\sqrt{x} - 35 = 0,$$

вмѣсто чего можно также написать:

$$3(\sqrt{x})^2 + 8\sqrt{x} - 35 = 0.$$

Послѣднее уравненіе квадратное относительно $\sqrt{x}$. Потому мы по теоремѣ **183**, находимъ:

$$\sqrt{x_1} = +\frac{7}{3}; \sqrt{x_2} = -5,$$

откуда

$$x_1 = \frac{49}{9} = \left(+\frac{7}{3}\right)^2; \; x_2 = 25 = (-5)^2.$$

То есть, данное уравненіе удовлетворяется значеніями $\frac{49}{9}$ и 25, но $\sqrt{\frac{49}{9}}$ должно считать только равнымъ $+\frac{7}{3}$, а $\sqrt{25}$ только равнымъ -5.

Задача 5.

$$4\sqrt[3]{x} - 1 = 2(\sqrt[3]{x} - 1) + \sqrt{-3}$$

Рѣшеніе.

Это уравненіе рѣшается путемъ слѣдующихъ очень простыхъ преобразованій:

$$4\sqrt[3]{x} - 1 = 2\sqrt[3]{x} - 2 + \sqrt{-3}$$

$$2\sqrt[3]{x} = -1 + \sqrt{-3}$$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2\cdot i\sqrt{3} + 3\cdot(-1)\cdot i^2\cdot(\sqrt{3})^2 + i^3\cdot(\sqrt{3})^3}{8}$$

$$= \frac{-1 + 3i\sqrt{3} + 3\cdot 3 - 3i\sqrt{3}}{8} = +1.$$

Но полученное рѣшеніе должно быть выражено слѣдующимъ образомъ:

$$x=1=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3,$$

ибо данное уравненіе удовлетворяется значеніемъ $x=1$ только при условіи, что $\sqrt[3]{1}$ будетъ считаться равнымъ $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, т. е равнымъ I_2 [см. § 534].

Задача 6.

$$\frac{5}{2\sqrt[6]{x}-1}-\frac{3}{\sqrt[6]{x}-2}=\frac{5}{\left(\sqrt[6]{x}-2\right)\left(\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Рѣшеніе.

Это уравненіе послѣ освобожденія его отъ знаменателей и дальнѣйшаго упрощенія превращается въ слѣдующее:

$$\sqrt[6]{x}=3.$$

Слѣдовательно, рѣшеніе даннаго уравненія есть

$$x=729=(\pm 3)^6$$

Но кромѣ того уравненіе имѣетъ еще особый корень

$$x=\infty.$$

Задача 7

$$a\sqrt[n]{x^2}+b\sqrt[n]{x}+c=0$$

Рѣшеніе.

Написавъ это уравненіе по преобразованіи перваго члена слѣдующимъ образомъ:

$$a\left(\sqrt[n]{x}\right)^2+b\sqrt[n]{x}+c=0,$$

мы видимъ, что оно квадратное относительно $\sqrt[n]{x}$. А потому мы, по теоремѣ **183**, имѣемъ:

$$\sqrt[n]{x}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Такимъ образомъ данное уравненіе распадается на слѣдующія два

$$\sqrt[n]{x}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{x}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

изъ которыхъ мы находимъ:

$$x_1=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^n,$$

при чемъ, однако,

$$\sqrt[n]{\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^n}$$

должно считать равнымъ именно $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, а не которому-либо изъ остальныхъ $(n-1)$ значеній этого корня n-ой степени.

$$x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^n,$$

при чемъ, однако,

$$\sqrt[n]{\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^n}$$

должно считать равнымъ именно $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, а не которому-либо изъ остальныхъ $(n-1)$ значеній этого корня n-ой степени.

§ 542. **Необходимость оговаривать особымъ образомъ рѣшенія ирраціональныхъ уравненій.** Изъ разсмотрѣнныхъ только-что примѣровъ мы убѣждаемся, что когда мы по приведеніи даннаго ирраціональнаго уравненія къ виду

$$\sqrt[n]{x}=a$$

заключаемъ, что

$$x=a^n,$$

мы должны всякій разъ добавлять, что это уравненіе удовлетворяется этимъ значеніемъ неизвѣстнаго только при условіи, что $\sqrt[n]{x}$ въ уравненіи считается равнымъ только одному опредѣленному изъ всѣхъ возможныхъ n значеній этого корня, а именно, какъ разъ тому числу a, которое составляетъ правую часть уравненія $\sqrt[n]{x}=a$.

§ 543. **Посторонія рѣшенія ирраціональныхъ уравненій.** Если мы произведемъ повѣрку рѣшеній во всѣхъ примѣрахъ въ предыдущемъ параграфѣ, то окажется, что всѣ уравненія полученными корнями удовлетворяются, и что постороннихъ рѣшеній, повидимому, ни въ одномъ случаѣ не получилось, хотя этого слѣдовало бы ожидать, такъ какъ, при возвышеніи въ степень даннаго уравненія или уравненія равносильнаго ему, должно получаться уравненіе болѣе высокой степени, чѣмъ данное. Но въ дѣйствительности, постороннія рѣшенія, въ особомъ только видѣ, во всѣхъ случаяхъ имѣлись, а, оговаривая рѣшенія, мы оставляли только годныя рѣшенія, негодныя же устраняли, только не называя ихъ. Такъ, напр., рѣшеніе

$$x=a^5$$

уравненія

$$\sqrt[5]{x}=a$$

заключаетъ въ себѣ 5 различныхъ возможностей, а именно [см. § 536]

$$\begin{aligned}
&\text{1-ую: } x_1=a^5, \text{ при чемъ } \sqrt[5]{x}=a\\
&\text{2-ую: } x_2=a^5, \text{ при чемъ } \sqrt[5]{x}=a\cdot K_2;\\
&\text{3-ью: } x_3=a^5, \text{ при чемъ } \sqrt[5]{x}=a\cdot K_3,\\
&\text{4-ую: } x_4=a^5, \text{ при чемъ } \sqrt[5]{x}=a\cdot K_4;\\
&\text{5-ую: } x_5=a^5, \text{ при чемъ } \sqrt[5]{x}=a\cdot K_5;
\end{aligned}$$

изъ которыхъ только 1-ая составляетъ рѣшеніе уравненія, а остальныя нѣтъ, почему и устраняются тѣмъ самымъ, что мы къ рѣшенію добавляемъ оговорку.

Равнымъ образомъ мы вообще, оговаривая рѣшеніе

$$x=a^n$$

уравненія

$$\sqrt[n]{x}=a$$

такъ, какъ это разъяснено и указано было въ предыдущемъ параграфѣ, оставляемъ только одно изъ n возможныхъ рѣшеній и устраняемъ остальныя $(n-1)$, какъ негодныя.

На основаніи изложеннаго здѣсь мы о постороннихъ рѣшеніяхъ не будемъ упоминать и въ тѣхъ примѣрахъ рѣшенія ирраціональныхъ уравненій, которые еще будутъ приводиться.

§ 544. **Оговорка рѣшеній въ болѣе сложныхъ ирраціональныхъ уравненіяхъ.** Если данное ирраціональное уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$\sqrt[n]{A}=a,$$

гдѣ a означаетъ какое-либо извѣстное число, а A какое-либо алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстное, то для того, чтобы рѣшить его, нужно послѣднее уравненіе возвысить въ n-вую степень. Такимъ образомъ получается уравненіе

$$A=a^n,$$

которое рѣшается затѣмъ способомъ, зависящимъ отъ того, какое именно выраженіе есть A. Въ полученномъ же результатѣ и въ этихъ случаяхъ

нужно упоминать, что при подстановкѣ въ данное уравненіе полученныхъ корней оно окажется удовлетвореннымъ только въ томъ случаѣ, если $\sqrt[n]{A}$ будетъ считаться равнымъ именно a, а не которому-либо изъ остальныхъ $(n-1)$ значеній этого корня.

Пояснимъ и это примѣрами.

Задача 1.

$$\frac{3}{5+\sqrt{5x^2+12x+8}}=1.$$

Рѣшеніе.

Данное уравненіе легко приводится къ виду:

$$\sqrt{5x^2+12x+8}=-2. \quad (\alpha)$$

По возвышеніи этого послѣдняго уравненія въ квадратъ, мы получаемъ

$$5x^2+12x+8=4,$$

откуда

$$5x^2+12x+4=0$$

$$x_1=-2;\ x_2=-\frac{2}{5}.$$

Но данное уравненіе удовлетворяется этими корнями только при условіи, что $\sqrt{5x^2+12x+8}$, равный $\sqrt{4}$, при обоихъ найденныхъ значеніяхъ неизвѣстнаго, будетъ считаться равнымъ -2, на что указаніе дается уравненіемъ (α).

Задача 2.

$$\frac{7+6\sqrt{x^2-15}}{x^2-15}=1.$$

Рѣшеніе.

Замѣтивъ, что въ дѣлителѣ лѣвой части этого уравненія стоитъ то же выраженіе, что и подъ знакомъ корня въ дѣлимомъ, обозначимъ $\sqrt{x^2-15}$ буквою y. Тогда x^2-15 будетъ y^2 и данное уравненіе превращается въ слѣдующее:

$$\frac{7+6y}{y^2}=1,$$

по приведеніи котораго къ ординарному виду, мы получаемъ:

$$y^2-6y-7=0.$$

Отсюда же мы находимъ:

$$y=3\pm\sqrt{16},$$

то есть

$$y_1=7;\quad y_2=-1.$$

Такимъ образомъ данное уравненіе распадается на слѣдующія два, которыя мы и рѣшаемъ:

$$\sqrt{x^2-15}=7$$
$$x^2-15=49$$
$$x^2=64$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1=+8 \\ x_2=-8 \end{array}\right\} \text{при чемъ должно считать } \sqrt{x^2-15}=+7$$

$$\sqrt{x^2-15}=-1$$
$$x^2-15=+1$$
$$x^2=16$$
$$\left.\begin{array}{l} x_3=+4 \\ x_4=-4 \end{array}\right\} \text{при чемъ должно считать } \sqrt{x^2-15}=-1$$

То есть, данное уравненіе имѣетъ 4 различныхъ корня, но оно удовлетворяется ими только при условіи, что при подстановкѣ ихъ въ него для $\sqrt{x^2-15}$ будутъ браться только указанныя выше значенія.

З а д а ч а 3.

$$22-x^2+\sqrt{4x^2+3x-2}=3x(x+1)$$

Р ѣ ш е н і е.

Раскрывъ въ этомъ уравненіи скобки, перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и перемѣнивъ предъ ними знаки, мы получаемъ:

$$4x^2+3x-\sqrt{4x^2+3x-2}-22=0.$$

Если мы теперь послѣ первыхъ двухъ членовъ вставимъ членъ -2, но зато прибавимъ также къ лѣвой части $+2$, то уравненіе приметъ видъ:

$$4x^2+3x-2-\sqrt{4x^2+3x-2}-20=0.$$

Обозначивъ $\sqrt{4x^2+3x-2}$ буквою y, мы первые три члена должны будемъ назвать y^2, такъ что уравненіе превратится въ слѣдующее:

$$y^2-y-20=0,$$

изъ котораго мы находимъ:

$$y_1=5;\quad y_2=-4$$

Такимъ образомъ, данное уравненіе распадается на слѣдующія два, которыя мы и рѣшаемъ:

$$\sqrt{4x^2+3x-2}=5$$
$$4x^2+3x-2=25$$
$$4x^2+3x-27=0$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{9}{4} \\ x_2=-3 \end{array}\right\}$$ при чемъ должно считать $\sqrt{4x^2+3x-2}=+5$

$$\sqrt{4x^2+3x-2}=-4$$
$$4x^2+3x-2=16$$
$$4x^2+3x-18=0$$
$$\left.\begin{array}{l} x_3=\frac{3(-1+\sqrt{33})}{8} \\ x_4=-\frac{3(1+\sqrt{33})}{8} \end{array}\right\}$$ при чемъ должно считать $\sqrt{4x^2+3x-2}=-4$

Задача 4.

$$(1-\sqrt[5]{3x^2+2x-1})^2=3-\sqrt[5]{3x^2+2x}-1.$$

Рѣшеніе.

Если мы въ данномъ уравненіи выраженіе $\sqrt[5]{3x^2+2x-1}$ замѣнимъ буквою y, то оно превратится въ слѣдующее:

$$(1-y)^2=3-y.$$

Приведя же послѣднее въ порядокъ, мы получаемъ.

$$y^2-y-2=0,$$

откуда

$$y_1=+2;\quad y_2=-1$$

Такимъ образомъ данное уравненіе распадается на слѣдующія два, которыя мы и рѣшаемъ:

$$\sqrt[5]{3x^2+2x-1}=2$$
$$3x^2+2x-1=32$$
$$3x^2+2x-33=0$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=-\frac{11}{3} \end{array}\right\}$$ при чемъ, однако. $\sqrt[5]{3x^2+2x-1}$ должно считать равнымъ 2, но не которому-либо изъ остальныхъ 4 значеній $\sqrt[5]{*32}$

$$\sqrt[5]{3x^2+2x-1}=-1$$
$$3x^2+2x-1=-1$$
$$3x^2+2x=0$$
$$x(3x+2)=0$$
$$x_3=0 \quad\Big|\quad 3x+2=0$$
$$3x=-2$$
$$x_4=-\frac{2}{3}$$

при чемъ, однако, $\sqrt[5]{3x^2+2x-1}$ должно считать равнымъ -1, а не которому-либо изъ остальныхъ 4 значеній $\sqrt[5]{*-1}$.

§ 545. **Уединеніе корня.** И въ тѣхъ случаяхъ, когда въ ирраціональномъ уравненіи неизвѣстное встрѣчается не только подъ знакомъ корня, для того, чтобы сдѣлать уравненіе раціональнымъ, бываетъ необходимо возвысить его въ ту степень, которой степени этотъ корень, но преобразовавъ предварительно уравненіе такъ, чтобы радикалъ составлялъ одну часть уравненія, ибо безъ такого пріема, въ чемъ легко убѣдиться, радикалъ при возвышеніи уравненія въ степень не исчезнетъ. Указанный пріемъ, называемый уединеніемъ корня, пояснимъ также примѣрами

Задача 1.

$$5+\sqrt{x-3}=x.$$

Рѣшеніе.

Перенеся въ данномъ уравненіи, чтобы уединить корень, 5 въ правую часть, мы получаемъ:

$$\sqrt{x-3}=x-5 \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Возвысивъ же послѣдиее уравненіе въ квадратъ, мы находимъ:

$$x-3=x^2-10x+25.$$

а по приведеніи въ порядокъ.

$$x^2-11x+28=0.$$

откуда

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}$$

Уравненіемъ (α) дается однако указаніе, что эти корни уравненія требуютъ слѣдующихъ оговорокъ:

$x_1=7$, при чемъ должно считать $\sqrt{x-3}=+2$

$x_2=4$, при чемъ должно считать $\sqrt{x-3}=-1$.

Задача 2.

$$1+\frac{3}{\sqrt[4]{x^2-19}}=0.$$

Рѣшеніе.

Освободивъ это уравненіе отъ знаменателя и уединивъ корень, мы получаемъ:

$$\sqrt[4]{x^2-19}=-3 \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

А возвысивъ послѣднее уравненіе въ 4-ю степень, мы находимъ:

$$x^2-19=81,$$

откуда

$$x^2=100,$$

слѣдовательно,

$$x=\pm10,$$

при чемъ, однако, должно считать [уравненіе (α)]

$$\sqrt[4]{x^2-19}=\sqrt[4]{81}=-3.$$

Задача 3.

$$\frac{3}{2x}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{3}{2x}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{45}{4x^2}}}-\frac{1}{a}.$$

Рѣшеніе.

Перенеся членъ $\frac{1}{a}$, чтобы уединить корень, въ лѣвую часть, мы получаемъ:

$$\frac{3}{2x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{3}{2x}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{45}{4x^2}}}\quad\ldots(\alpha)$$

Возвысивъ это уравненіе въ квадратъ и вычеркнувъ одинаковые члены, получившіеся въ обѣихъ частяхъ, мы находимъ:

$$\frac{9}{4x^2}+\frac{3}{ax}=\frac{3}{2x}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{45}{4x^2}}.$$

Это уравненіе можно раздѣлить на $\frac{3}{x}$, при чемъ, однако, уничтожается корень даннаго уравненія, удовлетворяющій уравненію

$$\frac{3}{x}=0.$$

Слѣдовательно, одно рѣшеніе даннаго уравненія есть

$$x_1=\infty$$

Послѣ дѣленія мы имѣемъ:

$$\frac{3}{4x}+\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{45}{4x^2}}\quad\ldots(\beta)$$

Возвысивъ это уравненіе въ квадратъ, мы получаемъ:

$$\frac{9}{16x^2}+\frac{3}{2ax}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{45}{16x^2},$$

откуда

$$x^2+2ax-3a^2=0,$$

слѣдовательно,

$$x_2=a;\quad x_3=-3a;$$

при чемъ и $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{45}{4x^2}}$ [какъ видно изъ уравненія (β)] и $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{3}{2x}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{45}{4x^2}}}$ [какъ видно изъ уравненія (α)] должно считать положительными.

§ 546. **Уравненія съ нѣсколькими радикалами**. Если въ уравненіи встрѣчается нѣсколько различныхъ радикаловъ, содержащихъ неизвѣстное подъ знакомъ корня, то для уничтоженія ирраціональности это уравненіе приходится возвышать соотвѣтствующимъ образомъ въ степень болѣе одного раза.

Примѣры.

Задача 1.

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=\sqrt{x-8}.$$

Рѣшеніе.

Возвысивъ данное уравненіе въ квадратъ, мы получаемъ уравненіе

$$x-2\sqrt{x(x-5)}+x-5=x-8,$$

содержащее уже только одинъ радикалъ. При уединеніи корня здѣсь удобнѣе коэффиціентъ 2 не переносить въ другую часть. Возвысивъ полученное такимъ образомъ уравненіе

$$2\sqrt{x(x-5)}=x+3\quad\ldots(\alpha)$$

въ квадратъ, мы находимъ

$$4x^2-20x=x^2+6x+9,$$

откуда

$$3x^2-26x-9=0$$

и

$$x=\frac{13\pm\sqrt{196}}{3},$$

то есть,

$$x_1=9;\quad x_2=-\frac{1}{3}.$$

При второмъ рѣшеніи будетъ

$$\sqrt{x}=\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$$

Изъ уравненія же (α) мы находимъ

$$\sqrt{x-5}=\frac{x+3}{2\sqrt{x}}.$$

Слѣдовательно, приведеннымъ выше значеніямъ $\sqrt{x}$ должны соотвѣтствовать слѣдующія значенія $\sqrt{x-5}$

$$\sqrt{x-5}=\frac{-\frac{1}{3}+3}{\pm 2\cdot\frac{i}{\sqrt{3}}}=\pm\frac{\left(\frac{8}{3}\right)}{\frac{2i}{\sqrt{3}}}$$

$$=\pm\frac{8\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2i}=\pm\frac{4i}{\sqrt{3}\cdot i^2}=\mp\frac{4i}{\sqrt{3}}.$$

Изъ даннаго же уравненія находятся значенія $\sqrt{x-8}$, соотвѣтствующія приведеннымъ значеніямъ $\sqrt{x}$ и $\sqrt{x-5}$.

Послѣ такого же изслѣдованія и относительно корня $x_1=9$, мы убѣждаемся, что данное уравненіе имѣетъ слѣдующія рѣшенія:

$x_1=9$, при чемъ при подстановкѣ всѣ радикалы въ данномъ уравненіи слѣдуетъ считать положительными (**1-е** ***рѣшеніе***) или всѣ отрицательными (**2-е** ***рѣшеніе***);

$x_2 = -\frac{1}{3}$, при чемъ слѣдуетъ считать:

$$\text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = +\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{x} - 5 = \quad \frac{4i}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{x} - 8 = +\frac{5i}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{(3-е рѣшенiе)}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = \quad \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{x} - 5 = +\frac{4i}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{x} \quad 8 \quad [illegible] \frac{5i}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{(4-е рѣшенiе)}$$

Примѣчанiе.

Возвысивъ въ квадратъ сначала данное уравненiе, а затѣмъ еще уравненiе (α), мы должны ожидать двукратнаго удвоенiя числа рѣшенiй, которыхъ всего должно такимъ образомъ оказаться въ 4 раза больше, чѣмъ годныхъ. Такъ какъ каждый изъ 3 радикаловъ въ уравненiи могъ бы при подстановкѣ въ него 9 или $-\frac{1}{3}$ вмѣсто x, считаться и положительнымъ и отрицательнымъ, то всѣ возможности для каждаго изъ названныхъ корней даннаго уравненiя выражаются слѣдующею табличкою:

1)	+	+	+
2)	+	+	—
3)	+	[illegible]	+
4)	[illegible]	+	+
5)	+	[illegible]	[illegible]
6)	[illegible]	+	[illegible]
7)	—	[illegible]	+
8)	[illegible]	[illegible]	[illegible],

изъ которой видно, что всѣхъ возможностей 8+8, т. е. 16. И изъ всѣхъ этихъ возможностей оказываются удовлетворяющими уравненiю только 4, т. е. четвертая часть всѣхъ, значитъ, какъ разъ столько, сколько должно остаться годныхъ рѣшенiй.

Задача 2.

$$1 + \sqrt[3]{x-3} = \sqrt{x}.$$

Рѣшеніе.

Уединивъ кубичный корень, мы получаемъ:

$$\sqrt[3]{x-3}=\sqrt{x}-1,$$

а возвысивъ послѣднее уравненіе въ 3-ю степень:

$$x-3=x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1.$$

Въ этомъ уравненіи можно было бы также уединить корень и затѣмъ освободиться отъ него чрезъ возвышеніе уравненія въ квадратъ. Но такимъ образомъ мы получили бы полное кубическое уравненіе, неудобное для насъ по той причинѣ, что рѣшеніе такихъ уравненій въ этой книгѣ не разсматривается. Потому мы продолжаемъ рѣшеніе слѣдующимъ образомъ:

Мы переносимъ всѣ члены въ лѣвую часть, а затѣмъ разлагаемъ послѣднюю на множителей путемъ такого рода преобразованій:

$$x\sqrt{x}-4x+3\sqrt{x}+2=0$$
$$x\sqrt{x}-2x-2x+4\sqrt{x}-\sqrt{x}+2=0$$
$$x(\sqrt{x}-2)-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}-2)=0$$
$$(\sqrt{x}-2)(x-2\sqrt{x}-1)=0$$

Теперь же уравненіе распадается на слѣдующія два, которыя мы и рѣшаемъ:

$\sqrt{x}-2=0$	$x-2\sqrt{x}-1=0$
$\sqrt{x}=2$	$(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}-1=0$
$x_1=4=(+2)^2$,	$\sqrt{x}=1\pm\sqrt{2}$
при чемъ должно считать	$x_2=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$,
$\sqrt[3]{x-3}=1$	при чемъ должно считать
	$\sqrt{x}=+(1+\sqrt{2})$
	и
	$\sqrt[3]{x-3}=1$,
	$x_3=(1-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{2}$,
	при чемъ должно считать
	$\sqrt{x}=-(1-\sqrt{2})$
	и также
	$\sqrt[3]{x-3}=-1$.

ГЛАВА XIX.

Показательныя и логариѳмическія уравненія

§ 547. **Опредѣленія и основная теорема.** Если въ уравненіи неизвѣстныя встрѣчаются въ показателяхъ, то оно называется *показательнымъ*, если же они встрѣчаются въ основаніяхъ логариѳмовъ или въ логариѳмируемыхъ величинахъ, то оно называется *логариѳмическимъ*. Показательныя и логариѳмическія уравненія принадлежатъ къ числу трансцендентныхъ [см § 355], но могутъ въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ быть приведены къ алгебраическимъ, при чемъ возможность перехода къ послѣднимъ основывается на слѣдующей теоремѣ, въ которой, какъ и вообще въ этой главѣ, A и B означаютъ выраженія, содержащія, одно или оба, неизвѣстное или неизвѣстныя [ср. теоремы въ §§ 362, 366, 399 и 400].

Теорема. *Если C есть извѣстная величина, ни 0, ни ±1, ни +∞, то уравненія*

$$\log_C A = \log_C B$$

и

$$A = B$$

равносильны другъ другу,

и только, если A и B содержатъ неизвѣстное и случайно окажутся существующими и такія значенія неизвѣстнаго, при которыхъ

$$A\rho_k = B = C^{\mu},$$

гдѣ μ означаетъ дробь или ирраціональное число, а ρ_k которое-либо другое изъ значеній $1^{\frac{1}{\mu}}$ ($\sqrt[\mu]{1}$ [1]), чѣмъ +1 [2]), то корни уравненія

$$\log_C A = \log_C B$$

суть также корни не только уравненія

$$A = B,$$

но и уравненія

$$A\rho_k = B;$$

и наоборотъ.

---

[1]) См. § 306

[2]) Если неизвѣстныхъ больше одного, то всегда есть значенія ихъ, удовлетворяющія этому условію, такъ какъ въ такомъ случаѣ

$$A\rho_k = B = C^{\mu}$$

представитъ опредѣленную или неопредѣленную систему уравненій.

Док. Положимъ сначала, что исключительный случай, упомянутый въ теоремѣ мелкимъ шрифтомъ (потому, что при одномъ неизвѣстномъ встрѣчается очень рѣдко, а при нѣсколькихъ выходитъ за предѣлы элементарной алгебры), не имѣетъ мѣста, т. е., что нѣтъ неравныхъ значенiй A и B, которыхъ логариѳмы были бы, однако, равны другъ другу, подобно тому, какъ это пояснено было въ § 318, и по указанной тамъ причинѣ.

Подставляя въ уравненiе

$$\log_C A = \log_C B$$

его корни, мы при всякой такой подстановкѣ, конечно, получимъ тождество, потенцируя же C на лѣвую часть каждаго такого тождества, а также на правую часть, мы, по теоремѣ VII, каждый разъ получимъ тождество вида

$$C^{\log_C A} = C^{\log_C B},$$

которое по опредѣленiю логариѳма и при предполагаемомъ пока условiи, есть то же самое, что тождество вида

$$A = B.$$

При этомъ должно, однако, замѣтить, что если $\log_C A$, слѣдовательно, и равный ему $\log_C B$ есть дробь или иррацiональное число, то равенство

$$C^{\log_C A} = C^{\log_C B}$$

выражаетъ цѣлую совокупность тождествъ вида

$$A_\rho = B_\rho,$$

гдѣ ρ есть общiй корень [§ 305] нѣкоторой рацiональной или соотвѣтственно иррацiональной степени изъ $+1$, одно значенiе котораго есть $+1$, такъ что во всякомъ случаѣ названная совокупность содержитъ и тождество

$$A = B \text{ *)}.$$

Значитъ при каждомъ упомянутомъ выше потенцированiи мы получимъ
(одно или въ числѣ другихъ) тождество вида

$$A = B,$$

---

*) Напр., равенство

$$8^{\log_8 2} = 8^{\log_8 2}$$

выражаетъ слѣдующiя 3 тождества [см. § 534]:

$$2 = 2$$
$$2I_2 = 2I_2$$
$$2I_3 = 2I_3,$$

такъ какъ $\log_8 2 = \frac{1}{3}$,

т. е., какъ тождество, то же равенство, которое бы получилось, если бы въ уравненіе

$$A=B$$

вмѣсто неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ, если ихъ больше одного) были подставлены корни уравненія

$$\log_C A=\log_C B.$$

А изъ этого слѣдуетъ, что каждое рѣшеніе послѣдняго уравненія есть также рѣшеніе уравненія

$$A=B.$$

Равнымъ образомъ, подставляя въ уравненіе

$$A=B$$

его корни, мы и при всякой такой подстановкѣ получимъ тождество. Логариѳмируя каждое такое тождество по основанію C, мы, также по теоремѣ VII, каждый разъ получимъ тождество вида

$$\log_C A=\log_C B,$$

т. е., какъ тождество, то же равенство, которое бы получилось, если бы въ уравненіе

$$\log_C A=\log_C B$$

вмѣсто неизвѣстнаго (или соотвѣтственно неизвѣстныхъ) были подставлены корни уравненія

$$A=B.$$

А это значитъ, что, и наоборотъ, каждое рѣшеніе уравненія

$$A=B$$

есть также рѣшеніе уравненія

$$\log_C A=\log_C B.$$

Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ называемыя въ теоремѣ уравненія равносильны другъ другу.

Необходимость же выдѣленія случаевъ, когда C равняется или 0, или ± 1, или $\pm\infty$, объясняется свойствами степеней этихъ величинъ [см. §§ 119 и 275].

Положимъ теперь, что существуютъ и такія значенія неизвѣстнаго, при которыхъ

$$A\rho_k=B\cdot C^{\mu},$$

гдѣ μ означаетъ какую-либо дробь или какое-либо иррациональное число, а ρ_k какое-либо другое изъ значеній $(\pm 1)^{\mu}$, чѣмъ $+1$ (если неизвѣстныхъ болѣе одного, то такія значенія ихъ могутъ быть вычислены изъ системы уравненій $A\rho_k=B\cdot C^{\mu}$); и замѣтимъ, что для этого необходимо, чтобы и A и B содержали неизвѣстное

(или неизвѣстныя), ибо иначе эти выраженія не могутъ измѣнить своихъ значеній (ср. примѣры послѣ доказательства)

На основаніи послѣдняго предположенія должно быть

$$\text{и } \log_c A\rho_k = \mu$$

$$\text{и } \log_c B = \mu$$

Слѣдовательно, теперь въ уравненіи

$$\log_c A = \log_c B$$

лѣвая и правая часть будутъ равны другъ другу не только въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$A = B,$$

но и въ тѣхъ, когда

$$A\rho_k = B.$$

Другими словами, при предполагаемыхъ теперь условіяхъ уравненіе

$$\log_c A = \log_c B$$

имѣетъ, какъ и утверждается второй частью теоремы, не только тѣ же корни, какъ и уравненіе

$$A = B,$$

но также еще корнями и всѣ корни уравненія

$$A\rho_k = B.$$

Доказательство второй части теоремы мы считаемъ полезнымъ пояснить еще примѣрами.

Такъ уравненіе

$$\log_{125} 2x = \log_{125}(-x + 2\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

удовлетворяется не только корнемъ уравненія

$$2x = -x + 2\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

т. е. значеніемъ неизвѣстнаго

$$x = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{-3},$$

но и корнемъ уравненія

$$2x \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -x + 2\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

т. е. значеніемъ неизвѣстнаго

$$x = 2\tfrac{1}{2},$$

превращающимъ $2x$ въ 5, а $(-x + 2\frac{1}{2}\sqrt{-3})$ въ $5 \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, слѣдовательно, данное уравненіе въ тождество

$$\log_{125} 5 = \log_{125} 5 \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

въ которомъ обѣ части равны $\frac{1}{3}$, такъ какъ $125^{\frac{1}{3}}$ равняется и 5 и $5\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ (ср. § 318).

Подобнымъ образомъ уравненіе

$$\log_{81}(5x+2)=\log_{81}(8-7x)$$

удовлетворяется не только корнемъ уравненія

$$5x+2=8-7x,$$

т. е. значеніемъ неизвѣстнаго

$$x=\frac{1}{2},$$

но и корнемъ уравненія

$$(5x+2)\cdot(-1)=8-7x,$$

т. е. значеніемъ неизвѣстнаго

$$x=5,$$

превращающимъ $(5x+2)$ въ 27, а $(8-7x)$ въ -27, слѣдовательно, данное уравненіе въ тождество

$$\log_{81}27=\log_{81}(-27),$$

въ которомъ обѣ части равны $\frac{3}{4}$, такъ какъ $81^{\frac{3}{4}}$ равняется, между прочимъ, и $+27$ и -27.

Интересно при этомъ замѣтить еще слѣдующее.

Преобразовавъ какъ-либо уравненіе

$$5x+2=8-7x$$

въ однозначащее алгебраическое, прибавивъ, напр., къ обѣимъ частямъ его по 4, мы получимъ равносильное ему уравненіе

$$5x+6=12-7x,$$

которому равносильно и уравненіе

$$\log_{81}(5x+6)=\log_{81}(12-7x)$$

Это послѣднее равносильно и уравненію

$$\log_{81}(5x+2)=\log_{81}(8-7x),$$

но не равносильно уже уравненію

$$\log_{81}[(5x+2)\cdot(-1)]=\log_{81}(8-7x)$$

и вообще второго рѣшенія не допускаетъ.

§ 548. **Важное заключеніе, вытекающее изъ доказанной теоремы.** Имъ приходится часто пользоваться при рѣшеніи показательныхъ уравненій, и гласитъ оно такъ:

Слѣдствіе. При логариѳмированіи уравненія

$$A=B$$

по основанію, которое не есть ни 0, ни ± 1, ни $\pm\infty$, ни выраженіе, содержащее неизвѣстное, получается равносильное уравненіе,

и только въ исключительныхъ случаяхъ могутъ быть при этомъ введены и посторонніе рѣшенія, а именно въ качествѣ таковыхъ корни уравненія

$$A\rho_k=B,$$

при условіяхъ, что A и B содержатъ неизвѣстное (или неизвѣстныя) и что логариѳмированіе будетъ произведено по такому основанію C, что окажутся существующими такое дробное или ирраціональное число и такое значеніе неизвѣстнаго*), при которыхъ будетъ

$$C^{\mu}=A\rho_k=B,$$

гдѣ ρ_k означаетъ какое-либо другое значеніе $(+1)^{\mu}$, чѣмъ $+1$.

§ 549. **Теорема, которая можетъ быть примѣняема при рѣшеніи нѣкоторыхъ показательныхъ уравненій.** Если показательное уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$m^A=m^B,$$

или, конечно, если оно уже дано въ этомъ видѣ, то рѣшеніе его можетъ быть продолжено также путемъ примѣненія слѣдующаго предложенія:

Теорема. Если m есть извѣстная величина, но ни 0, ни $+1$, ни $\pm\infty$, то уравненія

$$m^A=m^B$$

и

$$A=B$$

равносильны другъ другу.

Док. Если бы мы допустили, что возможны и такія значенія неизвѣстнаго или неизвѣстныхъ, при которыхъ было бы [см. вторую часть теоремы, доказанной въ § 547]

$$m^A\rho_k=m^B=m^{\mu},$$

то при этихъ значеніяхъ было бы также

$$\frac{m^B}{m^A}=\rho_k$$

значитъ и

$$m^{B-A}=\rho_k$$

*) Если неизвѣстныхъ больше одного, то такія значенія неизвѣстныхъ всегда есть.

Но послѣднее равенство, по правилу **120**, было бы возможно только при исключенномъ теоремою значеніи

$$m=1.$$

Слѣдовательно, по теоремѣ, приведенной какъ слѣдствіе въ предыдущемъ параграфѣ, должны быть, единственно при ограниченіяхъ, указываемыхъ доказываемою теоремою, равносильны другъ другу уравненія

$$m^A=m^B$$

и

$$\log_m(m^A)=\log_m(m^B).$$

Во второмъ же изъ нихъ, [по слѣдствію **122**^б изъ опредѣленія логариѳма] лѣвая часть равна A, а правая B. Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ названныя въ теоремѣ уравненія равносильны другъ другу.

§ 550. **Показательныя уравненія, которыя могутъ быть рѣшены и безъ логариѳмированія**. На основаніи послѣдней теоремы рѣшеніе показательнаго уравненія

$$m^A=m^B$$

сводится къ рѣшенію болѣе простого равносильнаго

$$A=B,$$

котораго корни мы сможемъ найти, если оно окажется алгебраическимъ одного изъ разсмотрѣнныхъ и рѣшенныхъ нами типовъ.

Названная теорема даетъ намъ право совершать указанный переходъ отъ показательнаго уравненія къ болѣе простому также путемъ часто практикуемаго примѣненія слѣдующаго предложенія, вытекающаго какъ **слѣдствіе** изъ понятія о степени и изъ теоремъ, приведенныхъ какъ слѣдствія къ теоремамъ 2 и 3 въ § 130 и какъ слѣдствіе въ § 273.

Если при равныхъ основаніяхъ, не равныхъ однако ни **0**, *ни* $\pm$**1**, *ни* $\pm\infty$, *степени равны, то должны быть равны и показатели ихъ.*

Или въ другой формулировкѣ:

При равныхъ основаніяхъ, не равныхъ однако ни **0**, *ни* $\pm$**1**, *ни* $\pm\infty$, *степени могутъ быть равны только, если ихъ показатели равны.*

§ 551 **Показательныя уравненія, рѣшаемыя при помощи логариѳмированія**. Если m и n означаютъ извѣстныя величины, а C выраженіе, содержащее неизвѣстное (или неизвѣстныя), но не въ показателѣ или подъ знакомъ логариѳма, то показательное уравненіе

$$m^C=n$$

на основаніи опредѣленія логариѳма приводится къ алгебраическому

$$C=\log_m n,$$

которое должно быть равносильно данному, такъ какъ выражаетъ ту же зависимость между числами C, m и n.

Но если m и n опредѣленныя вещественныя числа, то уравненіе

$$m^C=n$$

удобнѣе рѣшается чрезъ логариѳмированіе по основанію имѣющихся въ нашемъ распоряженіи таблицъ, слѣдовательно, обыкновенно по основанію 10.

Такимъ образомъ получается:

$$C\,.\log m=\log n,$$

откуда обычными пріемами опредѣляется неизвѣстное.

При помощи такого же логариѳмированія можетъ быть приведено къ алгебраическому уравненію уравненіе вида

$$a^A=b^B,$$

гдѣ a и b означаютъ положительныя извѣстныя величины, а A и B такого же рода выраженія, содержащія неизвѣстное, какъ выше C.

§ 552. **Случай недопустимости логариѳмированія уравненія.** Ясно, что и показательное уравненіе того вида, который былъ разсмотрѣнъ въ § 549 можно было бы начинать рѣшать съ логариѳмированія, упрощая затѣмъ получающееся такимъ образомъ равносильное уравненіе чрезъ дѣленіе на $\log m$.

Но если бы мы такъ же поступили съ уравненіемъ

$$D^A=D^B,$$

гдѣ D также означаетъ выраженіе, содержащее неизвѣстное (или неизвѣстныя), то при дѣленіи уравненія, послѣ логариѳмированія, на $\log D$, мы получили бы уравненіе

$$A=B,$$

которое, по теоремѣ, приведенной въ § 369 какъ слѣдствіе, было бы уже не равносильно данному.

Такъ какъ логариѳмированіе уравненія вида

$$D^A=D^B$$

по основанію D приводитъ къ тому же не однозначащему съ нимъ уравненію

$$A=B,$$

то такого логариѳмированія должно избѣгать, замѣняя его логариѳмированіемъ по извѣстному основанію.

§ 553. **Примѣры рѣшенія показательныхъ уравненій.**

Задача 1

$$9^{4x-1}=27^{1\frac{1}{6}-x}.$$

Рѣшеніе.

Такъ какъ $9=3^2$ и $27=3^3$, то данное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$3^{2(4x-1)}=3^{3\left(1\frac{1}{6}-x\right)}$$

Послѣднему же уравненію равносильно, по теоремѣ, доказанной въ § 549, уравненіе

$$2(4x-1)=3\left(1\frac{1}{6}-x\right),$$

изъ котораго находимъ

$$8x-2=\frac{7}{2}-3x$$

$$11x=5\frac{1}{2},$$

слѣдовательно,

$$x=\frac{1}{2}$$

Задача 2

$$0{,}25^{2-\sqrt{5x+1}}=4\cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$$

Рѣшеніе.

Обѣ части этого уравненія могутъ быть представлены какъ степени 2 путемъ слѣдующихъ преобразованій:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{5x+1}}=2^2\cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$$

$$4^{\sqrt{5x+1}-2}=2^{2+\sqrt{5x+1}}$$

$$2^{2(\sqrt{5x+1}-2)}=2^{2+\sqrt{5x+1}}.$$

Логариѳмируя это уравненіе по основанію 2, т. е., примѣняя теорему, приведенную въ § 548 какъ слѣдствіе, или примѣняя теорему, доказанную въ § 549, или же примѣняя предложеніе, приведенное въ концѣ § 550, мы получаемъ:

$$2(\sqrt{5x+1}-2)=2+\sqrt{5x+1},$$

откуда

$$\sqrt{5x+1}=6,$$

слѣдовательно,

$$5x+1=36,$$

и, наконецъ,

$$x=7,$$

при чемъ должно считать $\sqrt{5x+1}=+6$.

Задача 3.

$$7\sqrt[3x]{5}-10=\sqrt[1\frac{1}{2}x]{5}$$

Рѣшеніе.

Введя вспомогательную величину

$$y=\sqrt[3x]{5},$$

мы данное уравненіе превращаемъ въ слѣдующее:

$$7y-10=y^2,$$

изъ котораго находимъ:

$$y^2-7y+10=0$$
$$y_1=5;\ y_2=2;$$

такъ что данное уравненіе распадается на слѣдующія 2, которыя мы и рѣшаемъ:

$$\sqrt[3x]{5}=5 \qquad\qquad \sqrt[3x]{5}=2$$
$$5^{\frac{1}{3x}}=5 \qquad\qquad \frac{1}{3x}\cdot\log 5=\log 2$$
$$\frac{1}{3x}=1 \qquad\qquad 3x\log 2=\log 5$$
$$x_1=\frac{1}{3} \qquad\qquad x_2=\frac{\log 5}{3\log 2}=\frac{\log 5}{\log 2^3}$$
$$x_2=\frac{\log 5}{\log 8}.$$

Задача 4.

$$a^{bx+c}=m^{px+q}$$

Рѣшеніе 1.

Если мы извлечемъ изъ этого уравненія корень степени $px+q$, то получимъ:

$$a^{\frac{bx+c}{px+q}}=m.$$

Слѣдовательно, по опредѣленію логариѳма:

$$\frac{bx+c}{px+q}=\log_a m.$$

А отсюда мы находимъ:

$$x=\frac{q\log_a m-c}{p\log_a m-b}$$

Если мы въ этомъ выраженіи для x логариѳмы по основанію a замѣнимъ десятичными по правилу, изложенному въ § 349, то получимъ то же выраженіе для неизвѣстнаго, которое получается ниже при второмъ способѣ рѣшенія.

Рѣшеніе 2.

Логариѳмируя данное уравненіе по основанію 10, такъ какъ въ нашемъ распоряженіи обыкновенно бываютъ таблицы десятичныхъ логариѳмовъ, мы получаемъ:

$$(bx+c)\log a=(px+q)\log m,$$

а отсюда

$$(b\log a-p\log m)x=q\log m-c\log a$$

и

$$x=\frac{q\log m-c\log a}{b\log a-p\log m}$$

Задача 5.

$$\frac{(x^2-6x+6)^{\left(\frac{4}{9}x-1\right)x}-x^2}{1-x}=6.$$

Рѣшеніе.

Освободивъ это уравненіе отъ знаменателя и перенеся затѣмъ членъ x^2 въ правую часть, мы имѣемъ:

$$(x^2-6x+6)^{\left(\frac{4}{9}x-1\right)x}=x^2-6x+6.$$

Логариѳмируя это уравненіе по произвольному основанію k, которое однако не должно быть ни 0, ни 1, ни ∞, ни выраженіе, содержащее неизвѣстное, мы получаемъ:

$$\left(\frac{4}{9}x-1\right)x\log_k(x^2-6x+6)=\log_k(x^2-6x+6),$$

а, по перенесеніи всѣхъ членовъ въ нѣсколько преобразованную лѣвую часть, уравненіе

$$\left(\frac{4}{9}x^2-x\right)\log_k(x^2-6x+6)-\log_k(x^2-6x+6)=0,$$

лѣвая часть котораго можетъ быть разложена на сомножителей слѣдующимъ образомъ:

$$\left(\frac{4}{9}x^2-x-1\right)\log_k(x^2-6x+6)=0$$

Послѣднее же уравненіе, на основаніи теоремы 45^a распадается на слѣдующія два, которыя мы и рѣшаемъ:

$$\frac{4}{9}x^2 - x - 1 = 0 \qquad \log_k(x^2 - 6x + 6) = 0$$

$$\qquad \log_k(x^2 - 6x + 6) = \log_k 1$$

$$x_1 = +3 \qquad x^2 - 6x + 6 = 1$$ по теоремѣ, доказанной въ § 547.

$$x_2 = -\frac{3}{4} \qquad x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_3 = +5$$

$$x_4 = +1$$

§ 554. **Логариѳмическія уравненія вида $\log_A B = p$.** Всякое логариѳмическое уравненіе, которое можетъ быть приведено къ виду

$$\log_A B = p,$$

гдѣ буквы A и B означаютъ такія же выраженія, какъ и въ предыдущихъ параграфахъ, на основаніи опредѣленія логариѳма превращается въ алгебраическое

$$A^p = B$$

которое должно быть равносильно данному, такъ какъ выражаетъ ту же зависимость между числами A, B и p.

Упомянутое же приведеніе къ виду

$$\log_A B = p$$

производится при помощи теоремъ о сложеніи, вычитаніи, умноженіи и дѣленіи логариѳмовъ [**124**, **126**, **128**, **130**].

§ 555. **Логариѳмическія уравненія вида $\log_m A = \log_m B$.** При помощи названныхъ только-что теоремъ можно въ иныхъ случаяхъ логариѳмическое уравненіе привести къ виду

$$\log_m A = \log_m B.$$

и если m не будетъ равно ни 0, ни $+1$, ни $+\infty$ то, по теоремѣ, доказанной въ § 547, послѣднее уравненіе будетъ однозначащимъ съ уравненіемъ

$$A = B$$

а въ особомъ случаѣ, о которомъ говорится во второй части этой теоремы, однозначащимъ съ уравненіемъ

$$(A - B)(A\rho_k - B) = 0$$

такъ какъ и послѣднее имѣетъ рѣшеніями всѣ корни уравненія

$$A = B$$

и кромѣ того всѣ корни уравненія

$$A\rho_k = B.$$

§ 556. **Введеніе въ логариѳмическія уравненія постороннихъ рѣшеній и уничтоженіе корней такихъ уравненій чрезъ сложеніе и вычитаніе.** Важно имѣть въ виду, что при рѣшеніи логариѳмическихъ уравненій могутъ произойти измѣненія въ составѣ корней и вслѣдствіе другихъ преобразованій, чѣмъ тѣ, о которыхъ говорится въ §§ 356, 360, 361, 368 и 369.

Положимъ, что C и изъ буквъ A и B по крайней мѣрѣ одна означаетъ выраженія, содержащія неизвѣстное (или неизвѣстныя) и что мы къ обѣимъ частямъ уравненія

$$\log_m A = \log_m B$$

прибавляемъ по $\log_m C$. Въ такомъ случаѣ мы получаемъ уравненіе

$$\log_m A + \log_m C = \log_m B + \log_m C,$$

которое можетъ быть преобразовано такъ:

$$\log_m AC = \log_m BC$$

и которому потому равносильно уравненіе

$$AC = BC$$

неравносильное, по теоремѣ, приведенной въ § 369 какъ слѣдствіе, уравненію

$$A = B$$

и неравносильное, слѣдовательно, и данному.

Равнымъ образомъ и вычитая изъ обѣихъ частей логариѳмическаго уравненія одно и то же выраженіе, содержащее неизвѣстное (или неизвѣстныя), мы получаемъ уравненіе не однозначащее съ нимъ.

§ 557. **Введеніе въ логариѳмическія уравненія постороннихъ рѣшеній и уничтоженіе корней такихъ уравненій чрезъ умноженіе и дѣленіе на извѣстныя величины.** Умноживъ уравненіе

$$\log_m A = B$$

на какое-либо число n, мы получаемъ уравненіе

$$n \log_m A = nB,$$

которое можетъ быть преобразовано такъ:

$$\log_m A^n = nB$$
$$\log_m A^n = \log_m m^{nB}$$

и которому потому равносильно уравненіе

$$A^n = m^{nB},$$

неравносильное уравненію

$$A = m^B,$$

такъ какъ оно другой степени, чѣмъ послѣднее, и неравносильное, слѣдовательно, и данному, которое, по теоремѣ, доказанной въ § 547, однозначаще съ этимъ послѣднимъ.

Такъ, напр., уравненію

$$\log(x+2)=0$$

равносильно уравненіе

$$x+2=10^0=1,$$

и оно имѣетъ потому корень

$$x=-1.$$

Умноживъ же уравненіе

$$\log(x+2)=0$$

на 4, мы получаемъ уравненіе

$$4\log(x+2)=0.$$

Преобразовавъ послѣднее такъ:

$$\log(x+2)^4=0,$$

мы получаемъ уравненіе, которому равносильно алгебраическое

$$(x+2)^4=1,$$

имѣющее кромѣ корня даннаго уравненія еще 3 другихъ, которые всѣ могутъ быть найдены слѣдующимъ образомъ:

$$x+2=\begin{cases}\text{или } +1,\\ \text{или } -1,\\ \text{или } +i,\\ \text{или } -i;\end{cases}$$

$$x_1=-1$$
$$x_2=-3$$
$$x_3=-2+i$$
$$x_4=-2-i.$$

Равнымъ образомъ и послѣ дѣленія логариѳмическаго уравненія на какое-либо число можетъ получиться уравненіе не однозначащее съ нимъ.

§ 558. **Примѣры рѣшенія логариѳмическихъ уравненій.**

Задача 1.

$$\log_{(7-5x)}(x^2-x+7)=2\ ^{*)}$$

Рѣшеніе.

По опредѣленію логариѳма мы изъ этого уравненія получаемъ:

$$(7-5x)^2=x^2-x+7,$$

откуда

$$8x^2-23x+14=0$$

и

$$x_1=2;\ x_2=\frac{7}{8}.$$

Задача 2.

$$\log_{2\sqrt{3}}(x+1)-2=\log_{2\sqrt{3}}(x-3)-\log_{2\sqrt{3}}(x-1).$$

Рѣшеніе.

Перенеся всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, въ лѣвую часть, а 2 въ правую, мы на основаніи теоремъ о дѣйствіяхъ надъ логариѳмами получаемъ:

$$\log_{2\sqrt{3}}\frac{(x+1)(x-1)}{x-3}=2,$$

а отсюда по опредѣленію логариѳма:

$$(2\sqrt{3})^2=\frac{(x+1)(x-1)}{x-3}$$

или

$$12=\frac{x^2-1}{x-3}.$$

Изъ послѣдняго же уравненія мы находимъ:

$$x_1=7;\ x_2=5.$$

Задача 3.

$$\frac{5\log_{20}\sqrt{x}-\log_5 125}{2\log_{20}x-3}=\log_{20}5-\frac{1}{4}\log_{20}(x^2)+2\log_{20}2.$$

---

*) И этотъ случай наглядно показываетъ, на сколько удобнѣе бы было писать:

$$\Lambda_{7-5x}(x^2-x+7)=2$$

Рѣшенiе.

Это уравненiе можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\frac{5}{2}\log_{20}x-3}{2\log_{20}x-3}=\log_{20}5+\log_{20}(2^2)+\frac{2}{4}\log_{20}x$$

$$\frac{\frac{5}{2}\log_{20}x-3}{2\log_{20}x-3}=\log_{20}(5\cdot 4)+\frac{1}{2}\log_{20}x$$

$$\frac{5}{2}\log_{20}x-3=(2\log_{20}x-3)(1+\frac{1}{2}\log_{20}x)$$

$$\frac{5}{2}\log_{20}x-3=2\log_{20}x-3+(\log_{20}x)^2-\frac{3}{2}\log_{20}x$$

$$(\log_{20}x)^2-2\log_{20}x=0$$
$$\log_{20}x(\log_{20}x-2)=0$$

Двѣ возможности превратить произведенiе въ лѣвой части этого уравненiя въ 0, даютъ 2 уравненiя, изъ которыхъ мы и находимъ корни даннаго уравненiя.

$\log_{20}x=0$. Слѣд., по опредѣленiю логариѳма, $x_1=20^0=1$	$\log_{20}x-2=0$ $\log_{20}x=2$. Слѣд., по опредѣленiю логариѳма, $x_2=20^2=400$

Задача 4.

$$x^{\log x-3,25}=1000.$$

Рѣшенiе.

Если мы логариѳмируемъ это уравненiе, то получаемъ:

$$(\log x-3.25)\log x=3.$$

Введя вспомогательное неизвѣстное, полагая

$$\log x=y,$$

раскрывъ скобки и перенеся всѣ члены въ лѣвую часть, мы находимъ:

$$y^2-\frac{13}{4}y-3=0,$$

откуда

$$y_1 = 1;\ y_2 = -\frac{3}{4}.$$

Такимъ образомъ данное уравненіе распадается на слѣдующія 2, которыя мы и рѣшаемъ:

$\log x = 4$
Слѣд., по опредѣленію логариѳма,
$x_1 = 10^4 = 10000$

$\log x = -\frac{3}{4}$
Слѣд., по опредѣленію логариѳма,

$$x_2 = 10^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{10^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1000}}.$$

Задача 5.

$$1\frac{1}{2}\log(x-1)^2 - 3 - \frac{1}{4}\log 4096 = -3\log\left(x+\frac{14}{x-1}\right).$$

Рѣшеніе.

Перенеся члены, содержащіе неизвѣстное въ лѣвую часть, а остальные въ правую, мы получаемъ уравненіе

$$1\frac{1}{2}\log(x-1)^2 + 3\log\left(x+\frac{14}{x-1}\right) = \frac{1}{4}\log 4096 + 3,$$

которое можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$1\frac{1}{2}\cdot 2\log(x-1) + 3\log\frac{x^2-x+14}{x-1} = \log\sqrt[4]{4096} + \log 1000$$

$$3\log\frac{(x-1)(x^2-x+14)}{x-1} = \log 8 + \log 1000$$

$$\log(x^2-x+14)^3 = \log 8000.$$

Изъ послѣдняго же уравненія мы по теоремѣ, доказанной въ § 547, находимъ:

$$(x^2-x+14)^3 = 8000.$$

Изъ этого уравненія мы получаемъ одно вещественное значеніе для x^2-x+14 и два комплексныхъ. Но отъ послѣднихъ мы должны отказаться, такъ какъ не можемъ провѣрить, удовлетворяютъ ли данному уравненію

корни, получающіеся изъ уравненій, которыхъ лѣвыя части суть выраженія $x^2 - x + 14$, а правыя—названныя комплексныя значенія этого выраженія; ибо логариѳмы комплексныхъ чиселъ не изучаются въ элементарной математикѣ. Ограничиваясь же однимъ вещественнымъ значеніемъ, мы получаемъ

$$x^2 - x + 14 = 20,$$

а отсюда

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -2.$$

Задача 6.

$$\log_4(9 - x) + \log_3\sqrt{3} = \log_4(13 - 3x).$$

Рѣшеніе.

Такъ какъ

$$3^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

то

$$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2},$$

и такъ какъ

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{1}{2},$$

то $\frac{1}{2}$ можетъ быть, по опредѣленію логариѳма, замѣнена какъ выраженіемъ $\log_4 \frac{1}{2}$, такъ и выраженіемъ $\log_4 \left(-\frac{1}{2}\right)$. Потому данное уравненіе распадается на слѣдующія два:

$$\log_4(9 - x) + \log_4 \frac{1}{2} = \log_4(13 - 3x) \qquad \log_4(9 - x) + \log_4\left(-\frac{1}{2}\right) = \log_4(13 - 3x).$$

Это распаденіе соотвѣтствуетъ случаю, о которомъ говорится во второй части теоремы, доказанной въ § 547. Рѣшены же могутъ быть приведенныя уравненія при помощи слѣдующихъ преобразованій:

$\log_4\frac{9 - x}{2} = \log_4(13 - 3x)$	$\log_4\frac{x - 9}{2} = \log_4(13 - 3x)$
$\frac{9 - x}{2} = 13 - 3x$	$\frac{x - 9}{2} = 13 - 3x$
$5x = 17$	$7x = 35$
$x_1 = 3\frac{2}{5}$	$x_2 = 5.$

З а д а ч а 7.

$$\log_{81}(x^2-3x+5)=\log_{81}(2x^2-11)$$

Р ѣ ш е н і е.

По теоремѣ, доказанной въ § 547, данному уравненію удовлетворяютъ корни уравненія

$$x^2-3x+5=2x^2-11.$$

Чтобы убѣдиться, нѣтъ ли у даннаго уравненія еще такого рода корней, о которыхъ говорится во второй части названной теоремы, изслѣдуемъ, не могутъ ли быть изъ выраженій x^2-3x+5 и $2x^2-11$ одновременно одно $+3$, а другое -3 $\left(\mu=\frac{1}{4}\right)$, или одно $+9$, а другое -9 $\left(\mu=\frac{2}{4}\right)$, или одно $+27$, а другое -27 $\left(\mu=\frac{3}{4}\right)$, и т. д. *).

Рѣшивъ соотвѣтствующія этимъ вопросамъ уравненія

$$x^2-3x+5=+3$$

и

$$2x^2-11=-3,$$

мы находимъ, что при $x=+2$ выраженіе x^2-3x+5 превращается въ $+3$, а выраженіе $2x^2-11$ въ -3.

Равнымъ образомъ мы, рѣшивъ уравненія

$$x^2-3x+5=+9$$

и

$$2x^2-11=-9,$$

находимъ, что при $x=-1$ выраженіе x^2-3x+5 превращается въ $+9$, а выраженіе $2x^2-11$ въ -9.

Слѣдовательно, по названной теоремѣ, данное уравненіе имѣетъ рѣшеніями не только корни уравненія

$$x^2-3x+5=2x^2-11,$$

---

*) При изслѣдованіи этого вопроса мы должны, однако, какъ въ этомъ примѣрѣ, такъ и вообще въ подобныхъ случаяхъ отказываться отъ разсмотрѣнія его исчерпывающимъ образомъ. Все, что мы обыкновенно можемъ сдѣлать, оставаясь въ области элементарной алгебры, это попытаться найти путемъ повѣрокъ, нѣтъ ли такого рода дробныхъ значеній μ, о которыхъ говорится во второй части примѣняемой здѣсь теоремы.

но и корни уравненія

$$-(x^2-3x+5)=2x^2-11,$$

такъ какъ одно изъ значеній какъ $\sqrt[4]{+1}$ такъ и $\sqrt[2]{+1}$ есть -1

Такимъ образомъ данное уравненіе распадается на послѣднія два, которыя мы и рѣшаемъ:

$$x^2-3x+5=2x^2-11 \qquad -(x^2-3x+5)=2x^2-11$$

$$x^2+3x-16=0 \qquad 3x^2-3x-6=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+64}}{2} \qquad x^2-x-2=0$$

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{73}}{2} \qquad x_3=2$$

$$x_2=\frac{-3-\sqrt{73}}{2} \qquad x_4=-1$$

Задача 8

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x^{10}}=y^{\sqrt[3]{x}}\\ \sqrt[5]{y^6}=x^{\sqrt[3]{x}}\end{cases}$$

Рѣшеніе.

Логариѳмируя оба уравненія данной системы, мы получаемъ:

$$\begin{cases}\frac{10}{3}\log x=\sqrt[3]{x}\log y\\ \frac{6}{5}\log y=\sqrt[3]{x}\log x.\end{cases}$$

Изъ второго изъ этихъ уравненій мы находимъ:

$$\log y=\frac{5}{6}\sqrt[3]{x}\log x, \ldots(\alpha)$$

подставивъ же въ первое изъ нихъ вмѣсто $\log y$ полученное выраженіе, имѣемъ:

$$\frac{10}{3}\log x=\sqrt[3]{x}\cdot\frac{5}{6}\sqrt[3]{x}\log x.$$

Такъ какъ это послѣднее уравненіе можетъ быть раздѣлено на $\log x$, то оно распадается на слѣдующія 2, которыя мы и рѣшаемъ:

$$\log x = 0 \qquad , \qquad \frac{10}{3} = \frac{5}{6}\sqrt[3]{x^2}$$

$$x = 10^0 \qquad \sqrt[3]{x^2} = 4$$

$$x_1 = 1 \qquad x^2 = 4^3$$

$$x = \pm 2^3$$

$\left.\begin{array}{l} x_2 = +8 \\ x_3 = -8 \end{array}\right\}$ при чемъ $\sqrt[3]{x^2}$ должно считать только вещественнымъ.

Подставляя эти значенія для x въ уравненіе (α), мы находимъ:

$$\log y_1 = \frac{5}{6}\sqrt[3]{1}\log 1 = 0,$$

откуда

$$y_1 = 10^0 = 1;$$

$$\log y_2 = \frac{5}{6}\sqrt[3]{8}\log 8 = \frac{5}{3}\log 8 = \log\left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = \log 32,$$

откуда

$$y_2 = 32,$$

$$\log y_3 = \frac{5}{6}\sqrt[3]{-8}\log(-8) = -\frac{5}{3}\log(-8) = \log\left(\sqrt[3]{-8}\right)^{-5}$$

$$= \log(-2)^{-5} = \log\left(-\frac{1}{32}\right),$$

откуда

$$y_3 = -\frac{1}{32}.$$

Такъ оказывается, что данной системѣ уравненій удовлетворяютъ слѣдующія 3 системы корней:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 32; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -8, \\ y_3 = -\dfrac{1}{32}. \end{cases}$$

ГЛАВА XX.

Квадратныя системы уравненій.

§ 559. **Опредѣленная система съ 2 неизвѣстными, въ которой одно уравненіе 2-й степени, а другое 1-й.** Общій видъ приведеннаго въ порядокъ уравненія 2-й степени съ 2 неизвѣстными есть:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

Если второе уравненіе, составляющее съ нимъ опредѣленную систему, будетъ 1-й степени, напр.,

$$mx+ny=p,$$

то наиудобнѣйшимъ будетъ рѣшеніе системы, состоящее въ рѣшеніи второго уравненія относительно одного изъ неизвѣстныхъ и подстановкѣ полученной формулы вмѣсто этого неизвѣстнаго въ первое уравненіе, послѣ чего получится квадратное уравненіе съ однимъ вторымъ неизвѣстнымъ. По опредѣленіи обоихъ корней послѣдняго соотвѣтствующія значенія перваго неизвѣстнаго находятся посредствомъ подстановки этихъ корней въ вышеупомянутую формулу.

Примѣръ.

Задача.

Рѣшить систему уравненій:

$$\begin{cases} 3x^2-4xy-6y^2+x-2y-5\frac{1}{2}=0 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$$

Рѣшеніе.

Изъ второго уравненія мы находимъ:

$$y=\frac{3x-4}{2}.$$

Подставивъ эту формулу вмѣсто y въ первое уравненіе, мы получаемъ:

$$3x^2-\frac{4x(3x-4)}{2}-\frac{6(3x-4)^2}{4}+x-\frac{2(3x-4)}{2}-5\frac{1}{2}=0,$$

а по упрощеніи этого уравненія:

$$11x^2-28x+17=0.$$

Корни послѣдняго уравненія суть:

$$x_1=\frac{17}{11},\quad x_2=1.$$

Подставивъ эти значенія въ формулу для y, мы получаемъ:

$$y_1=\frac{7}{22};\quad y_2=-\frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно, данная система допускаетъ слѣдующія рѣшенія:

$$1\text{-е}: \left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{17}{11}, \\ y_1=\frac{7}{22}, \end{array}\right. \qquad 2\text{-е} \left\{\begin{array}{l} x_2=1, \\ y_2=-\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

§ 560. **Опредѣленная система 2 квадратныхъ уравненій**. Такая система по приведеніи уравненій ея въ порядокъ въ общемъ должна имѣть такой видъ:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+b_1y+f_1=0 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+b_2y+f_2=0 \end{array}\right.$$

Если бы мы стали ее рѣшать путемъ простого примѣненія къ ней способа подстановки, то это привело бы насъ къ очень неудобному ирраціональному уравненію. Она рѣшается легче, если изъ данныхъ уравненій сначала исключить квадратъ одного изъ неизвѣстныхъ, напр., y^2, для чего нужно первое уравненіе умножить на c_2, второе на c_1, и полученныя послѣ этого уравненія вычесть одно изъ другого. Въ результатѣ получается уравненіе первой степени относительно y, изъ котораго уже легко можетъ быть найдена формула, выражающая это неизвѣстное чрезъ коэффиціенты данныхъ уравненій и неизвѣстное x. Подставивъ ее вмѣсто y въ одно изъ данныхъ уравненій, мы получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x Но оно будетъ 4-й степени. Поэтому мы въ общемъ не можемъ рѣшить системы двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными

Но въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ рѣшеніе такихъ системъ можетъ быть сведено къ примѣненію пріемовъ, при помощи которыхъ рѣшаются квадратныя уравненія.

Такія системы и вообще опредѣленныя системы уравненій высшихъ степеней, которыхъ рѣшеніе можетъ быть приведено къ рѣшенію квадратныхъ уравненій, называютъ иногда к в а д р а т н ы м и.

Только такія опредѣленныя системы уравненій высшихъ степеней мы и будемъ разсматривать. Упомянутое же приведеніе рѣшенія ихъ къ рѣшенію квадратныхъ уравненій производится обыкновенно при помощи различныхъ искусственныхъ пріемовъ.

Но къ нимъ прибѣгаютъ иногда и въ тѣхъ случаяхъ, когда рѣшеніе возможно просто по способу подстановки; и эти случаи какъ болѣе простые, мы и разсмотримъ сначала.

§ 561. **Примѣненіе искусственныхъ пріемовъ къ системамъ, которыя могутъ быть рѣшены и безъ нихъ.** Къ типамъ такихъ системъ принадлежатъ слѣдующіе:

I.
$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$$

Искусственный пріемъ, примѣняемый при рѣшеніи этой системы, состоитъ въ томъ, что возвышаютъ первое уравненіе въ квадратъ, вычитаютъ затѣмъ изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія второе, умноженное предварительно на 4, и послѣ этого извлекаютъ корень, значитъ въ томъ, что производятъ слѣдующія дѣйствія и преобразованія:

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2&=s^2 \\ 4xy&=4p \\ \hline x^2-2xy+y^2&=s^2-4p \\ (x-y)^2&=s^2-4p \\ x-y&=\pm\sqrt{s^2-4p}. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, данная система распадается на слѣдующія двѣ:

$$\begin{cases} x+y=s \\ x-y=\sqrt{s^2-4p} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=s \\ x-y=-\sqrt{s^2-4p}, \end{cases}$$

которыя, однако, могутъ рѣшаться обѣ вмѣстѣ, и притомъ въ случаѣ примѣненія способа сложенія и вычитанія такъ:

$$\begin{aligned} x+y&=s \\ x-y&=\pm\sqrt{s^2-4p} \\ \hline 2x&=s\pm\sqrt{s^2-4p} \\ 2y&=s\mp\sqrt{s^2-4p}, \end{aligned}$$

откуда

$$x=\frac{s\pm\sqrt{s^2-4p}}{2}$$

$$y=\frac{s\mp\sqrt{s^2-4p}}{2},$$

что означаетъ слѣдующее:

$$\text{1-е рѣшеніе: } \begin{cases} x_1 = \dfrac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \\ y_1 = \dfrac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2} \end{cases}$$

$$\text{2-е рѣшеніе: } \begin{cases} x_2 = \dfrac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2} \\ y_2 = \dfrac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \end{cases}$$

Къ этому же типу можетъ быть приведена система

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dxy=e, \end{cases}$$

если мы второе уравненіе умножимъ на $\dfrac{ab}{d}$ и затѣмъ введемъ вспомогательныя неизвѣстныя

$$u=ax$$
$$v=by.$$

II.

$$\begin{cases} x-y=d \\ xy=p \end{cases}$$

Возвысивъ первое изъ уравненій этой системы въ квадратъ и прибавивъ къ полученному такимъ образомъ уравненію второе, умноженное предварительно на 4, мы по извлеченіи корня находимъ $x+y$, послѣ чего рѣшеніе должно быть доведено до конца, какъ въ типѣ I.

III.

$$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x+y=a \end{cases}$$

Возвысивъ второе уравненіе этой системы въ квадратъ и вычтя изъ получающагося уравненія первое, мы находимъ:

$$2xy=b^2-a.$$

Вычтя же послѣднее уравненіе изъ перваго уравненія системы, мы получаемъ:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2a - b^2$$

или

$$(x-y)^2 = 2a - b^2,$$

откуда

$$x - y = \pm\sqrt{2a - b^2}.$$

Заключающіяся здѣсь 2 уравненія вмѣстѣ съ однимъ изъ уравненій данной системы составляютъ 2 системы, на которыя распалась данная. Но обѣ эти системы и тутъ могутъ рѣшаться вмѣстѣ, и притомъ въ случаѣ примѣненія способа сложенія и вычитанія такъ

$$x + y = b$$
$$x - y = \pm\sqrt{2a - b^2}$$
$$2x = b \pm \sqrt{2a - b^2}$$
$$2y = b \mp \sqrt{2a - b^2}$$

откуда

$$x = \frac{b \pm \sqrt{2a - b^2}}{2}$$
$$y = \frac{b \mp \sqrt{2a - b^2}}{2}.$$

Слѣдовательно, данная система уравненій допускаетъ 2 рѣшенія, представляемыя слѣдующими 2 системами корней:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b + \sqrt{2a - b^2}}{2} \\ y_1 = \dfrac{b - \sqrt{2a - b^2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{b - \sqrt{2a - b^2}}{2} \\ y_2 = \dfrac{b + \sqrt{2a - b^2}}{2} \end{cases}$$

IV

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x - y = b \end{cases}$$

При помощи совершенно такихъ же пріемовъ, какъ и въ предыдущемъ типѣ, мы изъ уравненій этой системы можемъ найти $2xy$, а затѣмъ рѣшеніе ея можетъ быть продолжено, какъ тамъ.

V.

$$\begin{cases} xy = p \\ \dfrac{x}{y} = q \end{cases}$$

Умноживъ и раздѣливъ уравненія этой системы другъ на друга, мы получаемъ систему:

$$\begin{cases} x^2 = pq \\ y^2 = \dfrac{p}{q}, \end{cases}$$

а отсюда.

$$x = \pm\sqrt{pq}$$
$$y = \pm\sqrt{\dfrac{p}{q}}$$

Только при одинаковыхъ знакахъ предъ радикалами найденныя выраженія для неизвѣстныхъ удовлетворятъ уравненіямъ данной системы. Слѣдовательно, рѣшенія ея суть:

$$\begin{cases} x_1 = +\sqrt{pq} \\ y_1 = +\sqrt{\dfrac{p}{q}} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = -\sqrt{pq} \\ y_2 = -\sqrt{\dfrac{p}{q}} \end{cases}$$

VI.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$$

Способомъ сложенія и вычитанія мы изъ уравненій этой системы находимъ:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{a+b}{2} \\ y^2 = \dfrac{a-b}{2}. \end{cases}$$

откуда:

$$x = \pm\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$$
$$y = \pm\sqrt{\dfrac{a-b}{2}}.$$

Такъ какъ оба полученныя значенія для x, будучи возвышены въ квадратъ, даютъ $\frac{a+b}{2}$, а равнымъ образомъ и квадраты обоихъ значеній для y равны между собою, то каждое изъ значеній x даетъ съ каждымъ изъ значеній y по рѣшенію системы, такъ что послѣдняя имѣетъ слѣдующія 4 рѣшенія:

$$\begin{cases} x_1=+\sqrt{\frac{a+b}{2}} \\ y_1=+\sqrt{\frac{a-b}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=+\sqrt{\frac{a+b}{2}} \\ y_2=-\sqrt{\frac{a-b}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=-\sqrt{\frac{a+b}{2}} \\ y_3=+\sqrt{\frac{a-b}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4=-\sqrt{\frac{a+b}{2}} \\ y_4=-\sqrt{\frac{a-b}{2}} \end{cases}$$

VII.

$$\begin{cases} x^2+y^2=m \\ xy=n \end{cases}$$

Рѣшеніе 1.

Чрезъ подстановку въ первое уравненіе этой системы значенія

$$y=\frac{n}{x},$$

полученнаго изъ второго уравненія, мы находимъ:

$$x^2+\frac{n^2}{x^2}=m,$$

откуда

$$x^4-mx^2+n^2=0,$$

слѣд.,

$$x^2=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4n^2}}{2}$$

и

$$x=\pm\sqrt{\frac{m\pm\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}$$

или

$$x_1=+\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}$$

$$x_2=+\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}$$

$$x_3=-\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}$$

$$x_4=-\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}$$

Значенія y, соотвѣтствующія этимъ корнямъ, получаются чрезъ подстановку послѣднихъ въ равенство

$$y=\frac{n}{x},$$

при чемъ хорошо послѣ этого освободить частныя отъ радикаловъ въ дѣлителяхъ. Такъ получается:

$$y_1=\frac{n}{\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}}=\frac{n\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}}{\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}\right)}=\frac{2n\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}}{m+\sqrt{m^2-4n^2}}=$$

$$\frac{2n(m-\sqrt{m^2-4n^2})\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}}{(m+\sqrt{m^2-4n^2})(m-\sqrt{m^2-4n^2})}=$$

$$\frac{2n\sqrt{(m-\sqrt{m^2-4n^2})^2}\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}}{m^2-(m^2-4n^2)}=$$

$$\frac{2n\sqrt{2m^2-4n^2-2m\sqrt{m^2-4n^2}}\,.\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}}{4n^2}=$$

$$\frac{\sqrt{2n^2(m-\sqrt{m^2-4n^2})}}{2n}=\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}.$$

Такимъ же образомъ мы находимъ:

$$y_2=\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}$$

$$y_3=-\sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}$$

$$y_4=-\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-4n^2}}{2}}.$$

Слѣдовательно, получается 4 системы корней, удовлетворяющихъ данной системѣ уравненій, при чемъ оказываются

$$y_1=x_2;\quad y_2=x_1;\quad y_3=x_4;\quad y_4=x_3;$$

чего можно было ожидать и до рѣшенія системы, такъ какъ уравненія ея не измѣняются отъ замѣны въ нихъ одного неизвѣстнаго другимъ.

Рѣшеніе 2

Если второе уравненіе системы, умноженное на 2, сложимъ съ первымъ и вычтемъ изъ него, то получимъ квадраты суммы и разности неизвѣстныхъ, слѣдовательно, наконецъ,

$$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{m+2n} \\ x-y=\pm\sqrt{m-2n} \end{cases}$$

Такъ какъ въ каждомъ изъ этихъ уравненій можно взять любой изъ знаковъ передъ радикаломъ, то они представляютъ собою 4 системы, изъ которыхъ получаются рѣшенія системы въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{m+2n}+\sqrt{m-2n} \\ y_1=\sqrt{m+2n}-\sqrt{m-2n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=\sqrt{m+2n}-\sqrt{m-2n} \\ y_2=\sqrt{m+2n}+\sqrt{m-2n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=-(\sqrt{m+2n}+\sqrt{m-2n}) \\ y_3=-(\sqrt{m+2n}-\sqrt{m-2n}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4=-(\sqrt{m+2n}-\sqrt{m-2n}) \\ y_4=-(\sqrt{m+2n}+\sqrt{m-2n}). \end{cases}$$

Выраженія, полученныя здѣсь для неизвѣстныхъ, тождественны съ тѣми, которыя были получены при первомъ способѣ рѣшенія, какъ это разъяснено было въ §§ 259 и 260.

VIII Системы

$$\begin{cases} x^3+y^3=a \\ x+y=b \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^3-y^3=c \\ x-y=d \end{cases}$$

проще всего рѣшаются способомъ подстановки. Но онѣ могутъ быть также приведены къ типамъ I и II чрезъ дѣленіе перваго уравненія системы на второе или чрезъ вычитаніе возвышеннаго въ кубъ второго уравненія изъ перваго.

Замѣчаніе, относящееся къ рѣшеннымъ типамъ.

Примѣняя при рѣшеніи разсмотрѣнныхъ системъ искусственные пріемы, мы въ нѣкоторыхъ случаяхъ возвышали уравненія въ квадратъ, вслѣдствіе чего должно было ожидать введенія постороннихъ рѣшеній. Посредствомъ же повѣрки мы могли убѣдиться, что ни въ одномъ случаѣ этого не произошло; и необходимо указать, почему. Объясняется это просто тѣмъ, что мы, не упоминая этого, введенныя постороннія рѣшенія оставляли въ сторонѣ. Такъ, напр., возвысивъ при рѣшеніи типа I первое уравненіе въ квадратъ, мы ввели постороннія рѣшенія, соотвѣтствующія уравненію

$$x+y=-s,$$

которымъ мы при продолженіи рѣшенія вовсе не воспользовались, чѣмъ и избѣгли системъ корней, не удовлетворяющихъ данной системѣ уравненій.

§ 562. Системы, къ рѣшенію которыхъ необходимо примѣненіе искусственныхъ пріемовъ. Разсмотримъ теперь нѣсколько примѣровъ квадратныхъ системъ, рѣшеніе которыхъ способомъ подстановки приводитъ къ уравненіямъ болѣе высокихъ степеней, чѣмъ 2-й. Для рѣшенія такихъ системъ необходимо прибѣгать къ искусственнымъ пріемамъ.

IX.

$$\begin{cases} x^4+y^4=a \\ x+y=b \end{cases}$$

Чтобы рѣшить эту систему, можно сначала второе уравненіе возвысить въ 4-ю степень и изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія вычесть первое, что должно писать такъ:

$$\begin{array}{r} x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=b^4 \\ x^4\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+y^4=a \\ \hline 4x^3y+6x^2y^2+4xy^3=b^4-a \end{array}$$

Послѣднее уравненіе мы можемъ преобразовать такъ:

$$4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2=b^4-a,$$

а затѣмъ подставимъ въ него вмѣсто x^2+y^2 выраженіе, которое мы получимъ для этой суммы квадратовъ, если второе уравненіе возвысимъ въ квадратъ и послѣ этого перенесемъ $2xy$ въ правую часть, т. е выраженіе b^2-2xy. Такъ получается уравненіе

$$4xy(b^2-2xy)+6x^2y^2=b^4-a,$$

квадратное относительно xy, рѣшивъ которое, мы найдемъ 2 значенія для xy

Послѣ этого данная система окажется распавшеюся на двѣ типа I, изъ которыхъ и могутъ быть найдены 4 рѣшенія ея.

X.

$$\begin{cases} x^4+y^4=k \\ x-y=l \end{cases}$$

Эта система приводится при помощи тѣхъ же пріемовъ, какъ и предыдущая, къ типу II.

XI.

$$\begin{cases} x^5+y^5=m \\ x+y=n \end{cases}$$

Раздѣливъ первое уравненіе этой системы на второе и вычтя получившееся послѣ этого уравненіе изъ возвышеннаго въ 4-ю степень второго, мы при помощи тѣхъ же пріемовъ, которые примѣнены были при рѣшеніи типа IX, получимъ уравненіе, квадратное относительно xy, послѣ чего данная система окажется приведенною къ 2 системамъ типа I.

XII.

$$\begin{cases} x^5-y^5=p \\ x-y=q \end{cases}$$

Эта система приводится такъ же къ типу II, какъ предыдущая къ типу I.

XIII.

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ lx^2+mxy+ny^2=0 \end{cases}$$

Раздѣливъ второе уравненіе этой системы на x^2, мы получаемъ:

$$n\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2+m\cdot\frac{y}{x}+l=0,$$

т. е. уравненіе квадратное относительно $\frac{y}{x}$. Каждый изъ корней его вмѣстѣ съ первымъ уравненіемъ составляютъ по системѣ, легко рѣшающейся способомъ подстановки.

XIV.

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1=0 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2=0 \end{cases}$$

Вычтя второе уравненіе этой системы, умноженное предварительно на d_1, изъ перваго, умноженнаго на d_2, мы получаемъ:

$$(a_1d_2-a_2d_1)x^2+(b_1d_2-b_2d_1)xy+(c_1d_2-c_2d_1)y^2=0.$$

Раздѣливъ это уравненіе на квадратъ одного изъ неизвѣстныхъ, мы найдемъ уравненіе квадратное относительно отношенія неизвѣстныхъ. Послѣ рѣшенія послѣдняго данная система распадается на двѣ, легко рѣшающіяся по способу подстановки.

Замѣчанія, относящіяся къ системамъ типовъ XIII и XIV.

Отысканіе отношенія неизвѣстныхъ, оказавшееся полезнымъ средствомъ для упрощенія системъ, можетъ часто быть произведено при помощи теоремъ **174—178**.

Такъ, напр., изъ уравненія

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b}$$

слѣдуетъ по теоремѣ **177**:

$$\frac{2x}{2y}=\frac{a+b}{a-b}$$

или

$$\frac{x}{y}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Изъ уравненія

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{m}{n}$$

получается по той же теоремѣ:

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{m+n}{m-n}.$$

а отсюда

$$\frac{x}{y}=\pm\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$$

Изъ подобнаго уравненія обобщеннаго вида

$$\frac{x^n+y^n}{x^n-y^n}=\frac{p}{q}$$

мы такъ же находимъ:

$$\frac{x^n}{y^n}=\frac{p+q}{p-q},$$

откуда

$$\frac{x}{y}=\sqrt[n]{\frac{p+q}{p-q}}$$

(n значеній).

Изъ уравненія

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{a}{b}$$

можетъ отношеніе неизвѣстныхъ быть найдено посредствомъ слѣдующихъ преобразованій:

$$\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{a}{2b}$$

$$\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2-2xy}=\frac{a+2b}{a-2b}$$

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}=\frac{a+2b}{a-2b}$$

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=\frac{a+2b}{a-2b}$$

$$\frac{x+y}{x-y}=\pm\sqrt{\frac{a+2b}{a-2b}}.$$

А отсюда можетъ быть опредѣлено $\frac{x}{y}$ по указанному уже выше способу.

§ 563. **О степеняхъ уравненій, получающихся послѣ исключенія неизвѣстныхъ.** Если мы изъ уравненій системы

$$\begin{cases} ay^n=b \\ y=cx^m \end{cases}$$

исключимъ неизвѣстное y, подставивъ въ первое изъ нихъ вмѣсто y выраженіе изъ второго, то получимъ:

$$a(cx^m)^n = b$$

или

$$ac^n x^{mn} = b,$$

т. е. уравненіе mn-вой степени *). На основаніи этого примѣра легко заключить, что при исключеніи неизвѣстныхъ изъ системы не линейныхъ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными степени получающихся уравненій будутъ становиться тѣмъ выше, чѣмъ больше будетъ исключено неизвѣстныхъ. Потому рѣшеніе системъ съ нѣсколькими неизвѣстными тѣмъ труднѣе приводится къ рѣшенію квадратныхъ уравненій, чѣмъ больше въ нихъ неизвѣстныхъ.

§ 564. **Примѣръ рѣшенія квадратной системы съ тремя неизвѣстными.** Систему

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \\ x^3+y^3+z^3=c \end{cases}$$

можно рѣшить слѣдующимъ образомъ:

Можно перенести въ первомъ уравненіи z, а во второмъ z^2 въ правую часть, возвысить затѣмъ преобразованное первое въ квадратъ и вычесть изъ получившагося послѣ этого уравненія преобразованное второе, т. е. вычесть другъ изъ друга слѣдующія уравненія:

$$\begin{array}{l} x^2+2xy+y^2=a^2-2az+z^2 \\ x^2 \qquad\;\; +y^2=b \qquad\quad -z^2 \\ \hline \qquad\;\; 2xy=a^2-b-2az, \end{array}$$

послѣ чего получается:

откуда

$$xy=\frac{a^2-b}{2}-az \quad \ldots(1)$$

Если мы на упомянутое уже уравненіе

$$x+y=a-z \qquad \ldots(2)$$

*) Въ высшей алгебрѣ доказывается, что вообще по исключеніи одного изъ 2 неизвѣстныхъ изъ опредѣленной системы, въ которой одно уравненіе полное m-вой степени, а другое полное n-вой степени, получающееся уравненіе (выводное) будетъ mn-вой степени, и что только въ особыхъ случаяхъ и если данныя уравненія неполныя, степень такого выводного уравненія можетъ быть и ниже mn-вой.

раздѣлимъ третье уравненіе данной системы, перенеся въ немъ предварительно z^3 въ правую часть, то получаемъ:

$$x^2-xy+y^2=\frac{c-z^3}{a-z},$$

а сложивъ съ послѣднимъ утроенное уравненіе (1):

$$(x+y)^2=\frac{c-z^3}{a-z}+\frac{3(a^2-b)}{2}-3az$$

Лѣвыя части этого уравненія и возвышеннаго въ квадратъ уравненія (2) представляютъ собою одно и то же выраженіе, слѣдовательно, и правыя части этихъ уравненій равны, т. е.

$$(a-z)^2=\frac{c-z^3}{a-z}+\frac{3(a^2-b)}{2}-3az.$$

А отсюда слѣдуетъ, что

$$(a-z)^3=c-z^3+\frac{3(a^2-b)(a-z)}{2}-3az(a-z)$$

$$a^3-3a^2z+3az^2-z^3=c-z^3+\frac{3(a^2-b)(a-z)}{2}-3az(a-z).$$

Послѣднее же уравненіе послѣ упрощенія превращается въ слѣдующее:

$$3(a^2-b)z=3a(a^2-b)+2c,$$

откуда мы находимъ

$$z=a+\frac{2c}{3(a^2-b)}$$

Подставивъ это выраженіе вмѣсто z въ первое и второе уравненія данной системы, мы для опредѣленія неизвѣстныхъ x и y получимъ систему типа III [§ 561].

§ 565. **Поясненіе правила 160 на примѣрѣ рѣшенія квадратной системы съ 4 неизвѣстными.** Въ § 433 пояснено было на примѣрѣ линейной системы, что уравненія, составляемыя для рѣшенія задачи, должны быть независимы другъ отъ друга. Теперь мы можемъ подтвердить необходимость соблюденія этого важнаго правила и примѣромъ рѣшенія квадратной системы, избравъ задачу, на которой мы можемъ показать въ то же время рѣшеніе такой системы въ случаѣ, если въ ней неизвѣстныхъ болѣе трехъ.

Кстати упомянемъ, что чаще всего случается при рѣшеніи геометрическихъ задачъ, что составленныя уравненія оказываются не независимыми другъ отъ друга.

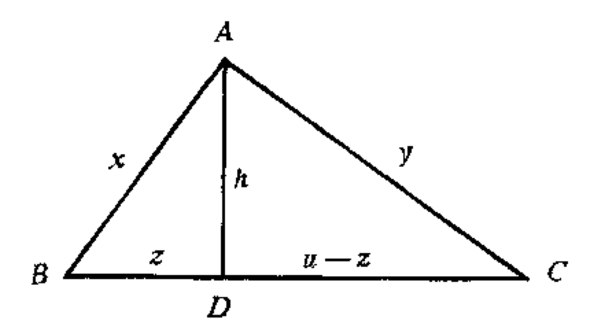
З а д а ч а

Даны площадь прямоугольнаго треугольника и перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу. Найти катеты этого треугольника.

Р ѣ ш е н і е.

Составленіе уравненій.

Положимъ, что выраженныя въ одной и той же линейной мѣрѣ длины названнаго въ задачѣ перпендикуляра AD, катетовъ AB и AC, гипоте-



нузы BC и отрѣзка BD суть соотвѣтственно h, x, y, u и z, и что площадь треугольника ABC содержитъ Δ квадратовъ, построенныхъ на той же линейной мѣрѣ. Въ такомъ случаѣ мы для искомыхъ величинъ имѣемъ, по теоремѣ Пиѳагора, уравненіе:

$$x^2+y^2=u^2 \tag{I}$$

Написавъ формулу

$$\Delta=\frac{1}{2}uh, \tag{II}$$

выражающую площадь треугольника, мы получаемъ уравненіе, содержащее и данныя величины. Но уравненія I и II еще не составляютъ опредѣленной системы, такъ какъ въ нихъ встрѣчается 4 неизвѣстныхъ. Потому мы на основаніи извѣстной геометрической теоремы составляемъ еще уравненія:

$$x^2=uz \tag{III}$$
$$y^2=u(u-z). \tag{IV}$$

Но если мы станемъ рѣшать опредѣленную, повидимому систему, состоящую изъ уравненій I, II, III и IV и содержащую только 4 неизвѣстныхъ, и подставимъ, напр., въ первое уравненіе вмѣсто x^2 и y^2 выраженія изъ уравненій III и IV, то получимъ послѣ надлежащихъ упрощеній тождество

$$[illegible]^2 \quad a^2$$

Это происходитъ оттого, что уравненія I, III и IV не независимы другъ отъ друга [см. § 424], зависимость же ихъ объясняется тѣмъ, что теорема Пиѳагора вытекаетъ какъ слѣдствіе изъ теоремы, примѣненной нами для составленія уравненій III и IV: сложеніе этихъ уравненій составляетъ одно изъ доказательствъ пиѳагоровой теоремы.

Если же мы уравненіе IV замѣнимъ уравненіемъ

$$h^2 \quad z(u \quad z), \tag{IV^a}$$

которое мы можемъ составить на основаніи извѣстной геометрической теоремы о высотѣ въ прямоугольномъ треугольникѣ, то при рѣшеніи системы, состоящей изъ уравненій I, II, III и IV^a, мы уже не встрѣтимъ признаковъ зависимости этихъ уравненій другъ отъ друга.

Рѣшеніе системы.

Получивъ изъ уравненія III

$$z = \frac{x^2}{u}$$

и подставивъ это выраженіе вмѣсто z въ уравненіе IV^a, мы находимъ:

$$h^2 = \frac{x^2}{u}\left(u \quad \frac{x^2}{u}\right).$$

По приведеніи въ порядокъ послѣднее уравненіе принимаетъ видъ:

$$x^4 \quad u^2x^2 + h^2u^2 = 0.$$

Отсюда же мы получаемъ:

$$x^2 = \frac{u^2 \pm \sqrt{u^4 - 4h^2u^2}}{2}$$

$$= \frac{u^2 \pm u\sqrt{u^2 - 4h^2}}{2}.$$

А подставивъ это выраженіе вмѣсто x^2 въ уравненіе I, мы послѣ упрощенія находимъ:

$$y^2=\frac{u^2\mp u\sqrt{u^2-4h^2}}{2}.$$

Въ выраженіяхъ для x^2 и y^2 осталась еще неизвѣстная величина u, для которой мы изъ уравненія II имѣемъ:

$$u=\frac{2\Delta}{h}.$$

Замѣнивъ ее въ названныхъ выраженіяхъ послѣднею формулою, мы послѣ обычныхъ упрощеній получаемъ

$$x^2=\frac{2\Delta(\Delta\pm\sqrt{\Delta^2-h^4})}{h^2},$$

$$y^2=\frac{2\Delta(\Delta\mp\sqrt{\Delta^2-h^4})}{h^2},$$

а отсюда и формулы для x и y.

Изслѣдованіе корней.

Первое изъ выраженій для x^2 равно второму выраженію для y^2, второе же выраженіе для x^2 первому для y^2. Слѣдовательно, оба эти алгебраическихъ рѣшенія представляютъ геометрически только одно рѣшеніе, и потому достаточно въ выраженіяхъ для x^2 и y^2 взять или только верхній знакъ предъ радикаломъ или только нижній. А такъ какъ по смыслу задачи требуются только абсолютныя значенія катетовъ, то мы искомыя значенія неизвѣстныхъ можемъ выразить формулами:

$$x=\frac{\sqrt{2\Delta(\Delta+\sqrt{\Delta^2-h^4})}}{h},$$

$$y=\frac{\sqrt{2\Delta(\Delta-\sqrt{\Delta^2-h^4})}}{h}.$$

Отвѣтъ.

Длина одного катета должна вычисляться по формулѣ

$\frac{\sqrt{2\Delta(\Delta+\sqrt{\Delta^2-h^4})}}{h}$, длина другого по формулѣ $\frac{\sqrt{2\Delta(\Delta-\sqrt{\Delta^2-h^4})}}{h}$.

Примѣчаніе.

Преслѣдуя особую цѣль, мы избрали для рѣшенія задачи не простѣйшую систему уравненій. Возможна система 3 уравненій, изъ которой бы выраженія для x и y получились въ формѣ, въ которую можно преобразовать найденныя нами выраженія при помощи формулъ въ § 260, а именно въ формѣ:

$$x = \frac{\sqrt{\Delta}\left(\sqrt{\Delta + h^2} + \sqrt{\Delta - h^2}\right)}{h},$$

$$y = \frac{\sqrt{\Delta}\left(\sqrt{\Delta + h^2} - \sqrt{\Delta - h^2}\right)}{h}.$$

ГЛАВА XXI.

О неравенствахъ вообще

§ 566. **Разъясненіе основныхъ понятій** Согласно данному въ первой главѣ этой книги опредѣленію неравенства, каждыя два алгебраическія выраженія или какія угодно двѣ величины, соединенныя между собою знакомъ $>$ или $<$, должны составлять неравенство.

При этомъ важно замѣтить, что понятія «больше» и «меньше» примѣняются только къ вещественнымъ числамъ, какъ объ этомъ уже упоминалось въ § 283.

Какъ равенства бываютъ двухъ родовъ — тождества и уравненія [см. § 352], такъ и неравенства могутъ быть или справедливыя безусловно и всегда, или же справедливыя не всегда, т. е. не при всѣхъ значеніяхъ встрѣчающихся въ нихъ буквъ.

Перваго рода неравенства выражаютъ безусловныя истины, какъ, напр.,

$$5 > 3$$
$$-1 < +2$$
$$a^2 + 1 > a.$$

Второго рода неравенства выражаютъ требованія, чтобы изъ двухъ величинъ одна была больше или меньше другой, или же также условія и условныя утвержденія въ родѣ тѣхъ, съ какими мы уже встрѣчались въ предыдущихъ главахъ этой части книги и къ первой части ея. Такія неравенства суть, напр.,

$$2x + 3 > 8$$
$$a^2 + 10b^2 < 7ab.$$

(ибо сама по себѣ сумма $2x+3$ могла бы быть и больше 8 и меньше 8, а сумма a^2+10b^2 и больше $7ab$ и меньше $7ab$), и всѣ 3 неравенства въ теоремѣ: «если

$$a>b$$
$$b>c,$$

то

$$a>c.»$$

Указанныя два рода неравенствъ мы будемъ обозначать слѣдующими отличительными наименованіями.

Опредѣленіе Всякое неравенство, которое выражаетъ само по себѣ нѣкоторую истину, мы будемъ называть *безусловнымъ*, всякое же другое — *условнымъ* **188**

§ 567 **Знаки, выражающіе «не больше» и «не меньше»** Иногда приходится выражать условіе, что нѣкоторая величина A можетъ или должна быть больше B, но можетъ еще и равняться B Въ такихъ случаяхъ пишутъ.

$$A\geqq B,$$

что удобно читать:

«A не меньше B».

Такъ же

$$A\leqq B$$

удобно читать: «A не больше B».

§ 568. **Понятіе о равносильныхъ неравенствахъ**. Пояснимъ это понятіе сначала на слѣдующемъ примѣрѣ. Если дано, какъ выраженіе требованія или какъ условіе, неравенство

$$\frac{1-a}{2}>2-a,$$

то, умноживъ обѣ части его на 2, мы, по теоремѣ 1 въ § 63, убѣждаемся, что въ этомъ случаѣ должно быть также

$$1-a>4-2a.$$

Прибавивъ же къ обѣимъ частямъ послѣдняго неравенства по $2a-1$ мы, по теоремѣ 1 въ § 49, заключаемъ, что при данномъ условіи должно быть также

$$a>3.$$

Если мы теперь пойдемъ обратнымъ путемъ и отъ обѣихъ частей последняго неравенства отнимемъ по $2a-1$, то, по теоремѣ 1 въ § 50, должны заключить, что при этомъ послѣднемъ условіи должно быть также

$$1-a>4-2a.$$

а раздѣливъ это неравенство на 2, мы, по теоремѣ 1 въ § 79, убѣждаемся, что при этомъ условіи должно быть также

$$\frac{1-a}{2}>2-a.$$

Это значитъ, что подставляя въ данное неравенство вмѣсто a любое число большее, чѣмъ 3, мы послѣ всякой такой подстановки получимъ *безусловное неравенство*, другими словами, что всякое значеніе a, удовлетворяющее неравенству

$$a>3,$$

удовлетворяетъ также данному неравенству

$$\frac{1-a}{2}>2-a.$$

Такъ мы видимъ, что вообще всякое значеніе буквы, встрѣчающейся въ этихъ 2 неравенствахъ, удовлетворяющее одному изъ нихъ, удовлетворяетъ и другому.

И подобно тому, какъ уравненія, удовлетворяемыя одними и тѣми же значеніями встрѣчающихся въ нихъ неизвѣстныхъ, называются равносильными или однозначащими, такъ мы и къ неравенствамъ, обладающимъ только-что разсмотрѣннымъ свойствомъ, будемъ примѣнять эти названія.

189 **Опредѣленіе**. Два неравенства называются равносильными или однозначащими, если всякая система значеній встрѣчающихся въ нихъ буквъ, удовлетворяющая одному изъ нихъ, удовлетворяетъ и другому, и наоборотъ.

§ 569 **Понятіе о рѣшеніи неравенства**. Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что данное неравенство можетъ быть при помощи соотвѣтствующихъ теоремъ преобразовано въ самое простое равносильное, какое вообще только возможно. Это послѣднее называется *рѣшеніемъ* даннаго.

Вообще же подъ этимъ названіемъ должно понимать слѣдующее:

190 **Опредѣленіе**. Рѣшить неравенство относительно которой-либо изъ встрѣчающихся въ немъ буквъ значитъ преобразовать его въ такое равносильное (или въ такую равносильную совокупность неравенствъ), въ которомъ (или соотвѣтственно въ каждомъ изъ которыхъ) эта буква, называемая *неизвѣстнымъ*, составитъ одну часть неравенства, не встрѣчаясь въ другой.

Какъ рѣшеніе уравненій можетъ быть основано на теоремѣ VII, такъ рѣшеніе неравенствъ основывается на теоремахъ, доказанныхъ въ §§ 49, 50, 63, 79, 130, 273 и 330 (преимущественно 1-хъ въ каждомъ параграфѣ).

§ 570. **Посторонія рѣшенія и потерянныя рѣшенія неравенствъ** Неравенство

$$a-1>2$$

удовлетворяется только значеніями a, которыя больше 3, такъ что неравенство

$$a>3$$

выражаетъ рѣшеніе предыдущаго. Но если

$$a>3,$$

то, по теоремѣ 1 въ § 130, должно быть также

$$a^2>9.$$

Послѣднее неравенство, однако, не равносильно ни предыдущему ни данному, такъ какъ удовлетворяется также всѣми значеніями a, которыя меньше -3. Эта послѣдняя часть рѣшенія его, не удовлетворяя данному неравенству, является для него посторонней.

Если бы, наоборотъ,

$$a^2>9$$

было данное неравенство, то заключая изъ него, по теоремѣ 1 въ § 273, что при условіи, выражаемомъ имъ, должно быть также

$$a>3$$

мы уничтожили бы часть рѣшенія его

$$a<-3,$$

которой не имѣетъ также то неравенство, которое мы получимъ, если изъ обѣихъ частей неравенства

$$a>3$$

вычтемъ по 1, т. е. первоначальное неравенство

$$a-1>2.$$

Равнымъ образомъ заключая изъ неравенства

$$x^3<125,$$

по той же теоремѣ, что при условіи, выраженномъ имъ, должно быть также

$$x<5,$$

мы получаемъ, строго говоря, неравенство не однозначащее съ даннымъ, такъ какъ это послѣднее удовлетворяется не только всякимъ значеніемъ x, которое меньше 5, но также еще значеніями x вида

$$x=n.\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

при условіи, что

$$n<5 \quad [\text{ср } \S\ 534].$$

Изъ разсмотрѣнныхъ примѣровъ мы видимъ, что, какъ преобразованія уравненій, измѣняющія степень ихъ, являются причиною введенія посторонних рѣшеній и потери рѣшеній, такъ и рѣшенія неравенствъ могутъ измѣняться подобнымъ образомъ вслѣдствіе такихъ преобразованій ихъ которыя измѣняютъ ихъ степень, опредѣляемую, кстати сказать, такъ же, какъ опредѣляется и степень уравненій.

Но тогда какъ преобразованія уравненій, влекущія за собою измѣненіе степени ихъ, *всегда* влекутъ за собою и измѣненіе въ составѣ корней, т. е. или уничтоженіе части рѣшеній или внесеніе рѣшеній постороннихъ, неравенства и путемъ такихъ преобразованій, которыя измѣняютъ ихъ степень, могутъ превращаться въ однозначащія.

Такъ, напр., умноживъ неравенство

$$x>5$$

на $(x-2)^2$, мы получаемъ равносильное неравенство

$$x(x-2)^2>5(x-2)^2.$$

Необходимо, однако, еще по поводу предпослѣдняго примѣра замѣтить, что обыкновенно подъ рѣшеніемъ неравенства понимаютъ только совокупность всѣхъ *вещественныхъ* значеній неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), удовлетворяющихъ ему, чѣмъ, конечно, въ значительной степени упрощается весь вопросъ о равносильности неравенствъ.

Упомянутому же здѣсь обычаю, ограничиваться одними вещественными рѣшеніями неравенствъ, послѣдуемъ и мы.

§ 571. Основные случаи полученія равносильныхъ неравенствъ.

Теорема I. Какъ при сложеніи съ обѣими частями неравенства, такъ и при вычитаніи изъ нихъ одной и той же величины получается неравенство однозначащее съ первымъ.

Док. *Только* такія значенія неизвѣстнаго или неизвѣстныхъ, которыя дѣлаютъ

$$A>B,$$

могутъ сдѣлать и

$$A\pm C>B\pm C,$$

такъ какъ такія, которыя дѣлаютъ

$$A=B$$

сдѣлали бы, по теоремѣ VII, и

$$A\pm C=B\pm C,$$

а такія, которыя дѣлаютъ

$$A < B,$$

сдѣлали бы, по теоремѣ 1 въ § 49, и

$$A + C < B + C.$$

Слѣдовательно, всякое рѣшеніе неравенства

$$A > B$$

есть также рѣшеніе неравенства

$$A \pm C > B \pm C,$$

и наоборотъ.

А это и значитъ, что неравенства эти равносильны.

Только въ такихъ случаяхъ, когда есть значенія неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), которыя превращаютъ C въ ∞, неравенства

$$A > B$$

и

$$A \pm C > B + C$$

не всегда могутъ быть названы равносильными по причинамъ, аналогичнымъ тѣмъ, по которымъ въ такихъ случаяхъ уравненія

$$A = B$$
$$A + C = B + C$$

не равносильны другъ другу.

(см. § 368).

Теорема 2. **Какъ при умноженіи, такъ и при дѣленіи обѣихъ частей неравенства на одну и ту же *безусловно положительную* величину получается неравенство однозначащее съ первымъ.**

I.

Предп. $$A > B$$

данное неравенство, и

$$+\infty > C > 0.$$

Утв. Неравенства

$$A > B$$

и

$$AC > BC$$

равносильны другъ другу.

Док. *Только* такія значенія неизвѣстнаго или неизвѣстныхъ, которыя дѣлаютъ

$$A > B,$$

могутъ сдѣлать, по теоремѣ 1 въ § 63, и

$$AC > BC,$$

такъ какъ такія, которыя дѣлаютъ

$$A = B$$

сдѣлали бы, по теоремѣ VII, и

$$AC = BC,$$

а такія, которыя дѣлаютъ

$$A < B$$

сдѣлали бы, по названной уже теоремѣ 1 въ § 63, и

$$AC < BC.$$

Слѣдовательно, всякое рѣшеніе неравенства

$$A > B$$

есть также рѣшеніе неравенства

$$AC > BC$$

и наоборотъ.

А это и значитъ, что неравенства эти равносильны.

II.

Предп. $A > B$

данное неравенство, и

$$+\infty > D > 0.$$

Утв. Неравенства

$$A > B$$

и

$$\frac{A}{D} > \frac{B}{D}$$

равносильны другъ другу.

Док. Такъ какъ,

$$\frac{A}{D} = A \cdot \frac{1}{D}$$

и

$$\frac{B}{D} = B \cdot \frac{1}{D},$$

то достаточно $\frac{1}{D}$ обозначить буквою C, чтобы увидѣть, что вмѣстѣ съ первою частью теоремы доказана и вторая.

Слѣдствіе. Какъ при умноженіи, такъ и при дѣленіи обѣихъ частей неравенства на одну и ту же *безусловно отрицательную* величину, но съ одновременною замѣною знака неравенства обратнымъ, получается неравенство однозначащее съ первымъ.

Примѣчаніе

Необходимость въ доказанной теоремѣ и слѣдствіи изъ нея, оговорки относительно того, чтобы величина, на которую умножается или дѣлится неравенство, была *безусловно* положительною или *безусловно* отрицательною, пояснимъ примѣромъ.

Если дано неравенство

$$x>4.$$

то при условіи, выраженномъ имъ, частное $\frac{1}{x}$ должно быть положительнымъ числомъ. Умноживъ на это выраженіе данное неравенство, удовлетворяемое только значеніями неизвѣстнаго, которыя больше 4, мы получимъ неравенство

$$1>\frac{4}{x},$$

которое кромѣ того удовлетворяется еще и всякимъ отрицательнымъ значеніемъ x. Слѣдовательно, неравенства

$$x>4$$

и

$$1>\frac{4}{x}$$

неравносильны другъ другу.

Но $\frac{1}{x}$ вообще можетъ означать и положительное и отрицательное число, и только при названномъ выше условіи положительно, слѣдовательно *не безусловно* положительно.

Безусловно же положительнымъ было бы при всякомъ вещественномъ значеніи x, напр., выраженіе x^2. Умноживъ или раздѣливъ на него данное неравенство, мы получаемъ соотвѣтственно неравенства

$$x^3>4x^2$$

и

$$\frac{1}{x}>\frac{4}{x^2},$$

которыя оба равносильны данному.

§ 572 **Возвышеніе условнаго неравенства въ степень и извлеченіе изъ таковаго корня**. Въ § 570 было пояснено примѣромъ, что при возвышеніи неравенства въ квадратъ, равно какъ и при извлеченіи изъ неравенства корня, получаются неравенства не однозначащія съ первоначальнымъ. Тамъ же упомянуто было о томъ, что когда говорятъ о значеніяхъ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ неравенству, то понимаютъ обыкновенно вещественныя значенія ихъ. Доказавъ слѣдующую ниже теорему (а вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, и слѣдствіе изъ нея), мы убѣдимся въ томъ, что если не выходить изъ границъ упомянутаго соглашенія, то неравенства, получающіяся изъ даннаго чрезъ возвышеніе его въ степень или чрезъ извлеченіе изъ него корня, будутъ неравносильны ему только въ случаяхъ, называемыхъ въ этихъ предложеніяхъ.

Такъ какъ дробные показатели позволяютъ разсматривать всякое извлеченіе корня какъ возвышеніе въ степень и наоборотъ, то доказываемая ниже теорема и слѣдствіе изъ нея обнимаютъ оба дѣйствія, упоминаемыя въ заголовкѣ этого параграфа.

Теорема. Если n есть положительное вещественное число, но ни четное цѣлое, ни несократимая дробь съ четнымъ числителемъ или знаменателемъ, то неравенства

$$A>B$$

и

$$A^n>B^n$$

равносильны другъ другу.

Док. При доказательствѣ этой теоремы должно отличать и особо разсмотрѣть случаи, когда A и B положительны, когда A положительно и B отрицательно, и когда и A и B отрицательны.

Относительно же исключаемыхъ теоремою случаевъ важно предварительно установить, что упоминаемый первый видъ дробнаго показателя соотвѣтствуетъ возвышенію въ *четную* степень нѣкотораго корня нечетной степени изъ A и B (или извлеченію корня нечетной степени изъ *четной* степени A и B), а второй видъ—извлеченію *корня четной* степени изъ корня нѣкоторой нечетной степени A и B (или возвышенію въ нечетную степень *корня четной* степени изъ A и B), такъ что во всѣхъ этихъ случаяхъ оказывается то общее, что теоремою вообще исключены всякія возвышенія въ какія-либо четныя степени и вообще всякія извлеченія корней четныхъ степеней.

I случай: когда и A и B положительны.

Въ § 304 было разъяснено, что при нечетномъ n и положительномъ a двучленное уравненіе вида

$$x^n=a$$

имѣетъ только одинъ вещественный корень. Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ теперь случаѣ и при условіяхъ, называемыхъ въ доказываемой теоремѣ, вещественныхъ значеній A, при которыхъ можетъ быть

$$A^n = B^n,$$

есть столько же, сколько возможно случаевъ, что дѣлается

$$A = B$$

Тѣ же значенія неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ) которыя дѣлаютъ

$$A > B$$

дѣлаютъ, по теоремѣ 1 въ § 130, и

$$A^n > B^n,$$

но и только эти именно значенія, такъ какъ тѣ, которыя дѣлаютъ

$$A = B,$$

должны, по теоремѣ VII, сдѣлать и

$$A^n = B^n,$$

а тѣ, которыя дѣлаютъ

$$A < B,$$

должны, по той же названной теоремѣ 1 въ § 130, дѣлать и

$$A^n < B^n.$$

А это и значитъ, что значенія неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), удовлетворяющія одному изъ неравенствъ

$$A > B$$

и

$$A^n > B^n,$$

удовлетворяютъ и другому.

А что въ случаяхъ, исключенныхъ теоремою, эти неравенства не могутъ быть равносильными другъ другу, это видно изъ слѣдующаго:

Какъ доказано было въ названномъ уже § 304, при четномъ n двучленное уравненіе вида

$$x^n = a$$

имѣетъ два вещественныхъ корня. Слѣдовательно, если n цѣлое четное число или несократимая дробь съ четнымъ числителемъ, то можетъ сдѣлаться

$$A^n = B^n$$

не только при тѣхъ значеніяхъ неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), при которыхъ дѣлается

$$A=B,$$

но и при тѣхъ, при которыхъ дѣлается

$$A=-B.$$

Потому въ разсматриваемомъ случаѣ дѣлается

$$A^n > B^n$$

не только при тѣхъ значеніяхъ неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), которыя дѣлаютъ

$$A>B,$$

но и при тѣхъ, которыя дѣлаютъ

$$A<-B.$$

Если же n несократимая дробь съ четнымъ знаменателемъ, то возвышеніе въ n-вую степень есть извлеченіе корня n-вой степени изъ нѣкоторой нечетной степени, а потому при возвышеніи въ n-вую степень уравненія

$$A=B$$

можетъ число вещественныхъ корней его уменьшиться вдвое, а слѣдовательно, неравенству

$$A^n > B^n$$

можетъ оказаться удовлетворяющею только часть тѣхъ значеній, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$A>B.$$

Слѣдовательно, при названныхъ условіяхъ, и въ самомъ дѣлѣ, нельзя считать неравенства

$$A>B$$

и

$$A^n > B^n$$

равносильными одно другому.

II случай: когда $A>0$,

а

$$B<0$$

При этомъ предположеніи въ случаяхъ, не исключенныхъ теоремою, будутъ непремѣнно и

$$A^n>0$$
$$B^n<0,$$

слѣдовательно,

$$A^n > B^n;$$

и наоборотъ

$$A > 0$$

при всѣхъ значеніяхъ неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), при которыхъ

$$A^n > 0,$$

и

$$B < 0$$

при всѣхъ, при которыхъ

$$B^n < 0,$$

слѣдовательно,

$$A > B$$

всегда, когда

$$A^n > B^n.$$

Въ случаяхъ же, исключенныхъ теоремою, мы должны отличить двѣ возможности: 1) Если n цѣлое четное число или несократимая дробь съ четнымъ числителемъ, то можетъ оказаться

$$A^n < B^n,$$

хотя бы и было

$$A > 0$$
$$B < 0.$$

2) Если n несократимая дробь съ четнымъ знаменателемъ, то $\sqrt[n]{B}$ означалъ бы мнимое число.

Слѣдовательно, и при предположеніи II въ исключенныхъ теоремою случаяхъ неравенства

$$A > B$$

и

$$A^n > B^n$$

нельзя считать равносильными одно другому.

III случай: когда и А и В отрицательны.

Это условіе мы можемъ выразить болѣе явно, если напишемъ A_1 вмѣсто A и B_1 вмѣсто B. При такомъ обозначеніи разсматриваемыя неравенства примутъ видъ

$$-A_1 > -B_1$$

и

$$(\ A_1)^n > (\ B_1)^n \text{ или } \ A_1^n > \ B_1^n. \text{ [теор. 85}^a\text{]}$$

которымъ равносильны неравенства [§ 35]

$$A_1 < B_1$$

и

$$A_1^n < B_1^n.$$

А такъ какъ въ послѣднихъ двухъ неравенствахъ A_1 и B_1 означаютъ положительныя числа, то, какъ уже доказано было въ I части этого доказательства, они должны быть равносильны другъ другу, а потому однозначащими одно другому и неравенства

$$A > B$$

и

$$A^n > B^n$$

въ случаяхъ, не исключенныхъ теоремою, и неравносильны другъ другу въ случаяхъ, ею исключенныхъ.

Слѣдствіе. Если n есть отрицательное вещественное число, но ни четное цѣлое, ни несократимая дробь съ четнымъ числителемъ или знаменателемъ, то неравенства

$$A > B$$

и

$$A^n < B^n$$

равносильны другъ другу.

§ 573. **Показательныя неравенства**. Изъ свойствъ степеней чиселъ 0 и 1, разсмотрѣнныхъ въ §§ 119 и 275, слѣдуетъ, что, если m означаетъ 0 или 1, неравенства

$$m^A > m^B$$

и

$$A > B$$

или

$$A < B$$

равносильными быть не могутъ.

Равнымъ образомъ первое изъ этихъ неравенствъ не можетъ быть однозначащимъ ни со вторымъ ни съ третьимъ, если

$$m < 0,$$

такъ какъ A и B могутъ означать, между прочимъ, и дроби, въ которыхъ и послѣ сокращенія знаменатель будетъ четнымъ числомъ, а въ этихъ случаяхъ при отрицательномъ m степени m^A и m^B выражали бы мнимыя числа.

Разсматриваемыя неравенства равносильны только при условіяхъ, называемыхъ въ доказываемыхъ ниже двухъ теоремахъ.

Теорема 1. При условіи, что m извѣстное число и больше 1, неравенства

$$m^A > m^B$$

и

$$A > B$$

равносильны другъ другу.

Док. При условіяхъ, что A и B вещественны, а $m > 1$, можетъ сдѣлаться

$$m^A = m^B$$

только при такихъ значеніяхъ неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), при которыхъ дѣлается

$$A = B.$$

А по теоремѣ 2 въ § 130 можетъ оказаться

$$m^A > m^B$$

только при такихъ значеніяхъ неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), при которыхъ дѣлается

$$A > B,$$

при такихъ же, при которыхъ дѣлается

$$A < B,$$

необходимо должно быть

$$m^A < m^B.$$

А это и значитъ, что всѣ значенія неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), которыя удовлетворяютъ одному изъ неравенствъ

$$m^A > m^B$$

и

$$A > B,$$

удовлетворяютъ и другому.

Теорема 2. При условіи, что m извѣстное число и положительная правильная дробь, неравенства

$$m^A > m^B$$

и

$$A < B$$

равносильны другъ другу.

Док. И при условіяхъ, что A и B вещественны и

$$1 > m > 0,$$

можетъ сдѣлаться

$$m^A \quad m^B$$

только при такихъ значеніяхъ неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), при которыхъ дѣлается

$$A \quad B$$

А по теоремѣ 3 въ § 130 можетъ оказаться

$$m^A > m^B$$

только при такихъ значеніяхъ неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), при которыхъ дѣлается

$$A < B,$$

при такихъ же, при которыхъ дѣлается

$$A > B,$$

необходимо должно быть

$$m^A < m^B$$

А это и значитъ, что всѣ значенія неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ), которыя удовлетворяютъ одному изъ неравенствъ

$$m^A > m^B$$

и

$$A < B$$

удовлетворяютъ и другому

§ 574 **Логариѳмическія неравенства** Не трудно убѣдиться при помощи примѣровъ, что неравенства

$$A > B$$

и

$$\log_m A > \log_m B$$

неравносильны другъ другу.

Такъ, напр., неравенство

$$x > 2$$

удовлетворяется только значеніями неизвѣстнаго, которыя больше 2, а неравенство

$$\log x > \log 2$$

кромѣ этихъ значеній, также еще значеніями $-\sqrt{10}$, $-\sqrt{1000}$, $-\sqrt{100000}$ и т. д., дѣлающими лѣвую часть его равною $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ и т. д.

Но такъ какъ обыкновенно въ области элементарной алгебры ограничиваются разсмотрѣніемъ вещественныхъ логариѳмовъ положительныхъ чиселъ при положительномъ основаніи, то и считаютъ обыкновенно удовлетворяемыми одними и тѣми же значеніями неизвѣстнаго (или неизвѣстныхъ) неравенства

$$\log_m A > \log_m B$$

и

$$A > B$$

при условіи, что

$$m > 1$$

и неравенства

$$\log_m A > \log_m B$$

и

$$A < B$$

при условіи, что

$$m < 1.$$

§ 575. **Недопустимыя преобразованія неравенствъ.** Изъ свойствъ чиселъ **0** и **1** и понятія о безконечности на основаніи разсужденій, совершенно аналогичныхъ тѣмъ, при помощи которыхъ мы вывели правила въ § 373, легко убѣдиться въ недопустимости слѣдующихъ дѣйствій надъ неравенствами:

А. Нельзя ни къ частямъ неравенства прибавлять, ни изъ нихъ вычитать выраженій, означающихъ безконечность.

Б. Нельзя неравенства ни умножать, ни дѣлить на 0 или ∞.

В. Нельзя неравенства ни возвышать въ степень 0 или $\pm\infty$, ни извлекать изъ него корня степени 0 или $\pm\infty$.

Г. Нельзя 0, 1 и ∞ потенцировать на неравенство.

Д. Нельзя неравенство логариѳмировать по основаніямъ 0, 1 и ∞.

§ 576. **Главнѣйшіе пріемы, примѣняемые при преобразованіи неравенствъ.** При рѣшеніи условныхъ неравенствъ, при выводѣ изъ безусловныхъ неравенствъ другихъ такихъ же или при доказательствѣ послѣдняго рода неравенствъ [ср. § 364] примѣняются главнымъ образомъ слѣдующія правила [ср. **142**—**145**].

Теорема. Членъ одной части неравенства переносится въ другую какъ членъ, но съ обратнымъ знакомъ. **191**

Док. Если мы къ обѣимъ частямъ неравенства

$$A \pm m > B$$

прибавимъ по $\mp m$, то, по первой изъ доказанныхъ въ § 571 теоремъ, получаемъ равносильное неравенство

$$A > B \mp m.$$

Если же мы къ обѣимъ частямъ неравенства

$$C > D \pm p$$

прибавимъ по $\mp p$, то получаемъ однозначащее съ нимъ неравенство

$$C \mp p > D.$$

Изъ произведенныхъ преобразованій и видна справедливость утвержденія.

192 **Теорема** **Если въ обѣихъ частяхъ неравенства встрѣчается одинъ и тотъ же членъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, то его можно опустить.**

Док. Перенося въ неравенствѣ

$$A \pm q > B \pm q$$

членъ $\pm q$ изъ одной части въ другую, напр., изъ правой части въ лѣвую, мы по предыдущей теоремѣ получаемъ

$$A \pm q \mp q > B.$$

то есть

$$A > B.$$

изъ чего и видна справедливость утвержденія.

193 **Теорема.** **Предъ всѣми членами неравенства можно перемѣнить знаки, если при этомъ знакъ неравенства будетъ замѣненъ обратнымъ.**

Док. Справедливость этой теоремы слѣдуетъ изъ того, что перемѣна знаковъ предъ всѣми членами равносильна перенесенію всѣхъ членовъ правой части неравенства въ лѣвую и всѣхъ членовъ лѣвой части въ правую.

194 **Теорема.** **Безусловно положительный множитель одной части неравенства переносится въ другую какъ дѣлитель и, наоборотъ, безусловно положительный дѣлитель какъ множитель.**

Док. Предполагая m и n *безусловно* положительными числами, мы, раздѣливъ неравенство

$$mA>B$$

на m и неравенство

$$C>nD$$

на n, получаемъ неравенства

$$A>\frac{B}{m}$$

и

$$\frac{C}{n}>D,$$

которыя, по теоремѣ 2 въ § 571, равносильны каждое тому, изъ котораго оно получилось, изъ чего и слѣдуетъ справедливость первой части утвер жденія.

Предполагая же p и q *безусловно* положительными числами, мы, умноживъ неравенство

$$\frac{E}{p}>F$$

на p и неравенство

$$G>\frac{H}{q}$$

на q, получаемъ неравенства

$$E>pF$$

и

$$qG>H,$$

которыя, по той же теоремѣ, равносильны также каждое тому, изъ котораго оно получилось; а изъ этого слѣдуетъ справедливость второй части утвержденія.

§ 577. **Примѣръ примѣненія послѣднихъ теоремъ къ доказательству.** Въ слѣдующей главѣ мы увидимъ, какъ этими теоремами нужно пользоваться при рѣшеніи условныхъ неравенствъ, эту же закончимъ примѣромъ примѣненія ихъ къ доказательству справедливости безусловнаго неравенства.

Теорема. Ариѳметическое среднее двухъ величинъ (неравныхъ) всегда больше ихъ геометрическаго средняго. **195**

Док. Квадратъ всякаго вещественнаго числа положителенъ, а потому неравенство

$$m^2>0$$

несправедливо только при значеніи $m=0$, такъ что *всегда справедливо*, что

$$m^2 \geqq 0.$$

Такимъ же образомъ, кромѣ случая, когда $a=b$, *всегда справедливо* неравенство

$$(a-b)^2>0$$

и каждое изъ слѣдующихъ, получаемыхъ изъ него чрезъ преобразованія, состоящія въ примѣненіи послѣднихъ теоремъ и не нуждающіяся въ объясненіи:

$$a^2-2ab+b^2>0$$
$$a^2+b^2>2ab$$
$$a^2+2ab+b^2>4ab$$
$$(a+b)^2>4ab$$
$$\frac{(a+b)^2}{4}>ab$$
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>ab.$$

Такъ какъ понятіе о геометрическомъ среднемъ примѣняется только къ абсолютнымъ величинамъ, то изъ послѣдняго неравенства, по теоремѣ 1 въ § 273, слѣдуетъ:

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

Изъ послѣдняго же безусловно справедливаго неравенства и видна справедливость утвержденія.

ГЛАВА XXII.

Рѣшеніе неравенствъ

§ 578. **Вступительныя замѣчанія.** Цѣль этой книги позволяетъ намъ ограничиться разсмотрѣніемъ рѣшеній неравенствъ 1-й и 2-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Изъ разсужденій предыдущей главы и въ особенности изъ примѣра, приведеннаго въ § 571 въ примѣчаніи, видно, что способы рѣшенія неравенствъ должны зависѣть не только отъ степени ихъ, но и отъ того, встрѣчаются ли или нѣтъ неизвѣстныя въ знаменателяхъ.

§ 579. **Рѣшеніе неравенства 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ, не содержащаго неизвѣстнаго въ знаменателяхъ.** Если мы въ правилѣ, приведенномъ въ § 379, слово «уравненіе» вездѣ замѣнимъ словомъ «неравенство», то и получимъ правило, по которому должно рѣшать всякое

неравенство первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, если это неизвѣстное не встрѣчается въ знаменателяхъ дробей. По выполненіи преобразованій, названныхъ въ 4 или соотвѣтственно 5 первыхъ пунктахъ упомянутаго правила, мы получимъ неравенство вида

$$ax > b,$$

а изъ него, по теоремѣ **194**,

$$x > \frac{b}{a},$$

если коэффиціентъ a положителенъ. Если же этотъ коэффиціентъ отрицателенъ и равенъ, положимъ, $-a_1$, то изъ неравенства

$$-a_1 x > b$$

мы, по теоремѣ **193** находимъ

$$a_1 x < -b,$$

а отсюда, по теоремѣ **194**,

$$x < -\frac{b}{a_1}$$

или

$$x < \frac{b}{a}.$$

Примѣръ.

Рѣшеніе неравенства

$$\frac{x-1}{2} - x\left(\frac{1}{3}+x\right) > (1-x)\left(x+\frac{2}{3}\right) - 2$$

нужно начать съ раскрытія скобокъ:

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x - x^2 > x + \frac{2}{3} - x^2 - \frac{2}{3}x - 2.$$

Въ обѣихъ частяхъ полученнаго неравенства есть по одинаковому члену $-x^2$, который можетъ быть опущенъ, послѣ чего его можно умножить на 6, чтобы уничтожить въ немъ знаменателей. Такимъ образомъ получается:

$$3x - 3 - 2x > 6x + 4 - 4x - 12.$$

Перенеся же всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, въ лѣвую часть, а остальные въ правую, и сдѣлавъ приведеніе, мы находимъ:

$$x > 5,$$

откуда

$$x < 5.$$

Смыслъ полученнаго рѣшенія тотъ, что при всякомъ значеніи x, которое меньше 5, лѣвая часть даннаго неравенства больше правой.

§ 580. **Системы нѣсколькихъ совмѣстныхъ неравенствъ съ 1 неизвѣстнымъ** При изслѣдованіи разнаго рода вопросовъ случается, что отъ неизвѣстнаго требуется, чтобы оно удовлетворяло болѣе, чѣмъ одному условію, выраженному неравенствомъ.

Рѣшивъ эти неравенства, мы эти условія выразимъ въ наипростѣйшей формѣ. Положимъ, для примѣра, что такимъ образомъ требуется, чтобы было

$$x > 3$$

$$x > 7\frac{1}{2}$$

и

$$x > 2.$$

Въ такомъ случаѣ, по теоремѣ VIII [§ 51], ясно, что значенія неизвѣстнаго, удовлетворяющія второму изъ этихъ неравенствъ, удовлетворяютъ и обоимъ остальнымъ.

Если же неизвѣстное должно удовлетворять слѣдующимъ неравенствамъ:

$$x > -7$$

$$x < 5$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

$$x < 8\frac{1}{4},$$

то ясно, что значенія его, удовлетворяющія третьему изъ этихъ неравенствъ, удовлетворятъ также первому и четвертому, а значенія x, удовлетворяющія второму неравенству, удовлетворятъ и пятому. Такимъ образомъ въ результатѣ оказывается, что всѣмъ даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ тѣ значенія x, которыя удовлетворяютъ условіямъ:

$$5 > x > \frac{1}{2}.$$

Какъ это нами было сдѣлано въ разсмотрѣнныхъ примѣрахъ, такъ и вообще всякая система неравенствъ первой степени съ 1 неизвѣстнымъ, если неизвѣстное не встрѣчается въ знаменателяхъ, можетъ быть приведено къ одному неравенству или системѣ двухъ. Поэтому послѣдняго рода система заслуживаетъ быть разсмотрѣнною особо и нѣсколько подробнѣе

§ 581. **Система 2 неравенствъ первой степени съ 1 неизвѣстнымъ** Такая система можетъ быть троякаго вида

I. Если мы, рѣшивъ оба неравенства системы, получаемъ

$$x>a$$
$$x>b,$$

и при этомъ $a \geqq b$, то значенія неизвѣстнаго, удовлетворяющія первому неравенству, удовлетворяютъ и второму, слѣдовательно, данной системѣ.

Если же мы, рѣшивъ неравенства системы, получаемъ

$$x<a$$
$$x<b,$$

и при этомъ $a \geqq b$, то данной системѣ удовлетворяютъ тѣ значенія x, которыя удовлетворяютъ второму неравенству.

II. Если результатъ рѣшенія неравенствъ будетъ:

$$x<a$$
$$x>b,$$

и при этомъ $a>b$, то системѣ неравенствъ удовлетворяютъ значенія x, удовлетворяющія условіямъ:

$$a>x>b,$$

то есть такія, которыя заключены между числами a и b.

III. Если, наконецъ, результатъ рѣшенія неравенствъ будетъ

$$x>a$$
$$x<b,$$

и при этомъ $a \geqq b$, то система рѣшенія не допускаетъ, такъ какъ неравенства, составляющія ее, противорѣчатъ другъ другу. И въ самомъ дѣлѣ, изъ

$$x>a$$

и

$$a \geqq b$$

по теоремѣ VIII [§ 51] и по аксіомѣ III слѣдуеть, что первому неравенству могутъ удовлетворять только такія значенія неизвѣстнаго, которыя удовлетворяютъ условію

$$x > b$$

и, слѣдовательно, ни одно изъ тѣхъ, которыя удовлетворяютъ второму неравенству системы.

Примѣръ.

Задача. Разложить число 75 на такія два цѣлыя положительныя слагаемыя, чтобы половина перваго была меньше 29, а второе было меньше $\frac{1}{3}$ перваго.

Рѣшеніе. Если мы первое слагаемое обозначимъ буквою x, то второе будетъ $75-x$, условія же задачи выразятся слѣдующими неравенствами:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x < 29 \\ 75-x < \frac{x}{3}. \end{cases}$$

Рѣшивъ эти неравенства, мы получаемъ:

$$\begin{cases} x < 58 \\ x > 56\frac{1}{4} \end{cases}$$

или

$$58 > x > 56\frac{1}{4}.$$

Единственное цѣлое число, удовлетворяющее этимъ условіямъ, есть 57. Слѣдовательно, искомыя слагаемыя суть 57 и 18.

§ 582. **Неравенства съ неизвѣстнымъ въ знаменателяхъ.** Если знаменатели содержатъ неизвѣстное, то только въ исключительныхъ случаяхъ ихъ общее наименьшее кратное будетъ безусловно положительнымъ числомъ. Потому мы въ общемъ не имѣемъ права умножать неравенство на это общее наименьшее кратное, чтобы уничтожить знаменателей. Самый удобный способъ рѣшенія такого неравенства состоитъ въ перенесеніи всѣхъ членовъ въ одну часть и въ приведеніи ея къ общему знаменателю, т. е. въ приведеніи неравенства къ виду

$$\frac{A}{B} > 0$$

или

$$\frac{C}{D}<0$$

и въ такомъ разсужденіи послѣ этого:

Частное можетъ быть положительнымъ только, если дѣлимое и дѣлитель оба положительны или оба отрицательны, отрицательнымъ же оно будетъ, если у дѣлимаго и дѣлителя противоположные знаки. Такимъ образомъ, данное неравенство распадается въ первомъ случаѣ на системы:

$$\begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A<0 \\ B<0, \end{cases}$$

во второмъ же случаѣ на системы:

$$\begin{cases} C>0 \\ D<0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} C<0 \\ D>0. \end{cases}$$

Рѣшенія этихъ системъ неравенствъ и составятъ, та или другая совокупность, рѣшеніе даннаго неравенства, смотря по тому, къ которому изъ видовъ это неравенство приводится.

Примѣры.

1)
$$\frac{2x-5}{x-10}>0.$$

Это неравенство удовлетворяется тѣми значеніями неизвѣстнаго, которыя дѣлаютъ

или одновременно		или одновременно
$\begin{cases} 2x-5>0 \\ x\ \ 10>0 \end{cases}$		$\begin{cases} 2x-5<0 \\ x\ \ 10<0 \end{cases}$

Рѣшивъ всѣ неравенства этихъ системъ, мы имѣемъ:

$$\begin{cases} x>2\frac{1}{2} \\ x>10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<2\frac{1}{2} \\ x<10. \end{cases}$$

Рѣшеніе первой изъ этихъ системъ есть

$$x>10,$$

рѣшеніе второй

$$x<2\frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно, данному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, которыя или больше 10 или меньше $2\frac{1}{2}$; оно не удовлетворяется только значеніями x, равными этимъ числамъ или заключенными между ними.

2)
$$\frac{2x-5}{x-10}<0.$$

Для того, чтобы это неравенство удовлетворялось, необходимо, чтобы было:

или
$$\begin{cases} 2x-5>0 \\ x-10<0 \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} 2x-5<0 \\ x-10>0 \end{cases}$$

то есть

или
$$\begin{cases} x>2\frac{1}{2} \\ x<10 \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} x<2\frac{1}{2} \\ x>10 \end{cases}$$

Неравенства второй системы противорѣчатъ другъ другу. Рѣшеніе же первой мы можемъ изобразить въ видѣ:

$$10>x>2\frac{1}{2}.$$

Оказывается такимъ образомъ, что данному неравенству удовлетворяютъ только значенія x, заключенныя между числами 10 и $2\frac{1}{2}$

3)
$$\frac{7x-1}{4-x}>2.$$

Въ этомъ неравенствѣ мы не имѣемъ права уничтожить знаменателя чрезъ умноженіе на него неравенства, такъ какъ знаменатель этотъ не есть безусловно положительное число. Поэтому мы переносимъ 2 въ лѣвую часть и приводимъ ее къ общему знаменателю. Такъ мы получаемъ:

$$\frac{7x-1}{4-x}-2>0$$

$$\frac{9x-9}{4-x}>0.$$

Это неравенство можетъ быть раздѣлено на 9 Получающееся же послѣ этого неравенство

$$\frac{x-1}{4-x}>0$$

распадается на системы:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 4-x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1<0 \\ 4-x<0. \end{cases}$$

изъ которыхъ вторая состоитъ изъ противорѣчащихъ другъ другу неравенствъ, первая же даетъ рѣшеніе:

$$4>x>1.$$

4)
$$\frac{5}{3x-3}-1<\frac{1}{2}+\frac{3}{x-1}.$$

По причинѣ, изложенной въ этомъ параграфѣ, мы не имѣемъ права умножать данное неравенство на общее наименьшее кратное встрѣчающихся въ немъ знаменателей. Перенеся же всѣ члены въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, мы получаемъ:

$$\frac{1-9x}{6(x-1)}<0,$$

а отсюда неравенство

$$\frac{1-9x}{x-1}<0,$$

которое распадается на слѣдующія 2 системы:

$$\begin{cases} 1-9x>0 \\ x-1<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-9x<0 \\ x-1>0 \end{cases}$$

Рѣшеніе первой изъ нихъ есть

$$x<\frac{1}{9},$$

рѣшеніе второй

$$x>1.$$

Слѣдовательно, данному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, которыя больше 1 и всѣ, которыя меньше $\frac{1}{9}$, и не удовлетворяютъ тѣ значенія неизвѣстнаго, которыя заключены между этими числами или равны имъ.

§ 583 **Неравенство 2-й степени**. Неравенство будетъ второй степени, если оно послѣ преобразованій, аналогичныхъ тѣмъ, при помощи которыхъ уравненія приводятся въ порядокъ (см. § 374), принимаетъ видъ

$$ax^2+bx+c>0$$

или

$$ax^2+bx+c<0.$$

Лучшимъ способомъ рѣшенія такого неравенства слѣдуетъ считать тотъ, который основывается на свойствѣ трехчлена, выраженномъ въ теоремѣ **188** [§ 517].

Примѣры.

1) $$x^2-12x+35>0$$

Рѣшеніе.

Корни трехчлена, составляющаго лѣвую часть этого неравенства, суть 7 и 5

Требованіе неравенства, чтобы онъ былъ положительнымъ, т. е. былъ одного знака съ коэффиціентомъ при x^2, будетъ, по упомянутой выше теоремѣ, удовлетворено всѣми вещественными значеніями x кромѣ тѣхъ, которыя заключены между корнями его или равны имъ. Слѣдовательно, неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія неизвѣстнаго, которыя больше 7, и всѣ, которыя меньше 5, другими словами, ему удовлетворяютъ значенія x, удовлетворяющія неравенствамъ

$$x>7$$

и

$$x<5.$$

2) $$-15x^2+x+6>0.$$

Рѣшеніе.

Корни трехчлена, составляющаго лѣвую часть этого неравенства, суть $\frac{2}{3}$ и $-\frac{3}{5}$. Отъ него требуется, чтобы онъ былъ знака противоположнаго знаку коэффиціента при x^2. Слѣдовательно, неравенство удовлетворяется значеніями неизвѣстнаго, удовлетворяющаго условіямъ:

$$\frac{2}{3}>x>-\frac{3}{5}.$$

3) $$9x^2+49>42x.$$

Рѣшеніе.

Перенеся $42x$ въ лѣвую часть неравенства и вычисливъ дискриминантъ получившагося здѣсь трехчлена [§ 502], мы убѣждаемся, что корни этого послѣдняго вещественны и равны. Слѣдовательно, онъ одинаковаго знака съ коэффиціентомъ при x^2 при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ x, и потому данное неравенство удовлетворяется всѣми такими значеніями неизвѣстнаго.

4) $$x^2-2x+5<0.$$

Рѣшеніе

Убѣдившись, что корни трехчлена x^2-2x+5 комплексные, мы, по примѣняемой въ этомъ параграфѣ теоремѣ, узнаемъ, что онъ всегда (т. е. при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ x) положителенъ. Слѣдовательно, данное неравенство не допускаетъ рѣшеній.

§ 584. **Другіе способы рѣшенія неравенствъ 2-й степени**. Неравенства

$$ax^2+bx+c>0$$

и

$$ax^2+bx+c<0$$

можно рѣшать также при помощи излагаемыхъ въ этомъ параграфѣ пріемовъ, выборъ которыхъ, однако, не произволенъ, а зависитъ отъ природы корней трехчлена въ лѣвой части. При изученіи этихъ способовъ рѣшенія мы оба неравенства можемъ разсматривать заразъ, изображая ихъ вмѣстѣ такъ:

$$ax^2+bx+c\gtrless 0.$$

I. Если **корни трехчлена вещественны и неравны**, то его можно разложить на сомножителей, причемъ удобно неравенство предварительно раздѣлить на a.

Въ такомъ случаѣ оно принимаетъ видъ:

$$x^2+px+q\gtrless 0,$$

а послѣ разложенія на сомножителей:

$$(x-x_1)(x-x_2)>0$$

или

$$(x-x_1)(x-x_2)<0,$$

гдѣ x_1 и x_2 означаютъ корни трехчлена. Продолженіе рѣшенія основывается на примѣненіи теоремы **46**, при помощи которой оно сводится къ рѣшенію

двухъ системъ неравенствъ первой степени совершенно такъ же, какъ рѣшеніе неравенства, разсмотрѣнное въ § 582, при помощи теоремы **55**.

II. Если **корни трехчлена вещественны и равны,** то лѣвая часть неравенства будетъ квадратъ вещественнаго числа [§ 505] и какъ таковой всегда положителенъ, такъ что неравенство или будетъ удовлетворено всякимъ вещественнымъ значеніемъ неизвѣстнаго или вовсе не допуститъ рѣшенія

III. Если, наконецъ, **корни трехчлена числа комплексныя,** то неравенство можно преобразовать такъ, чтобы лѣвая часть его представляла квадратъ двучлена, т. е. слѣдующимъ образомъ:

$$x^2+px \gtrless -q$$

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2 \gtrless \left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \gtrless \left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Такъ какъ квадратъ всякаго вещественнаго числа положителенъ, а въ случаѣ комплексныхъ корней $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$, то теперь всегда лѣвая часть неравенства положительна, а правая отрицательна, слѣдовательно, неравенство или удовлетворяется всегда или вообще не допускаетъ рѣшенія, смотря по тому, стоитъ ли между частями неравенства знакъ $>$ или знакъ $<$.

Примѣры.

1) $3x^2-5x+2<0$

Рѣшеніе.

Раздѣливъ неравенство на 3 и раздѣливъ лѣвую часть на сомножителей, мы получаемъ:

$$(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)<0.$$

Это неравенство удовлетворяется, если

или

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-\frac{2}{3}<0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x-1<0 \\ x-\frac{2}{3}>0. \end{cases}$$

Неравенства первой изъ этихъ двухъ системъ противорѣчатъ другъ другу, а изъ второй мы получаемъ рѣшеніе:

$$1 > x > \frac{2}{3}.$$

2) $2x^2 - 7x + 6\frac{1}{8} < 0.$

Рѣшеніе.

Раздѣливъ это неравенство на 2, мы находимъ.

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} < 0$$

И безъ вычисленія дискриминанта не трудно убѣдиться, что лѣвая часть есть квадратъ бинома $x - \frac{7}{4}$. Никакими вещественными значеніями x неравенство

$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 < 0$$

не удовлетворяется.

Слѣдовательно, данное неравенство рѣшенія не допускаетъ.

3) $5x^2 - 2x + 1 > 0.$

Рѣшеніе.

Убѣдившись, что корни трехчлена $5x^2 - 2x + 1$ числа комплексныя, преобразуемъ неравенство такъ:

$$5x^2 - 2x > -1$$

$$x^2 - \frac{2}{5}x > -\frac{1}{5}.$$

$$x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} > -\frac{4}{25}$$

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 > -\frac{4}{25}$$

Послѣднее неравенство удовлетворяется всегда. Слѣдовательно, и равносильное ему данное неравенство удовлетворяется всѣми вещественными значеніями x.

5) $\frac{x+2\sqrt{5-x^2}}{5}<1.$

Рѣшеніе

Такъ какъ знакъ неравенства ставится только между вещественными величинами, то прежде всего мы должны опредѣлить, при какихъ условіяхъ будетъ $\sqrt{5-x^2}$ вещественное число, другими словами, мы должны найти, при какихъ значеніяхъ x подкоренное выраженіе означаетъ положительное число, т. е. рѣшить неравенство

$$5-x^2>0$$

Для этой цѣли разложимъ лѣвую часть послѣдняго неравенства на сомножителей:

$$(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)>0.$$

Теперь мы видимъ, что оно удовлетворяется, если

или

$$\begin{cases}\sqrt{5}+x>0\\ \sqrt{5}-x>0,\end{cases}$$

слѣд.,

$$\begin{cases}x>-\sqrt{5}\\ x<\sqrt{5}\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\sqrt{5}+x<0\\ \sqrt{5}-x<0,\end{cases}$$

слѣд.,

$$\begin{cases}x<-\sqrt{5}\\ x>\sqrt{5}\end{cases}$$

Неравенства второй системы противорѣчатъ другъ другу, изъ первой же мы получаемъ

$$\sqrt{5}>x>-\sqrt{5} \;\ldots\; (A)$$

Только теперь, послѣ произведеннаго нами подготовительнаго изслѣдованія, мы можемъ приступить и къ рѣшенію самого даннаго неравенства.

Уединимъ корень:

$$2\sqrt{5-x^2}<5-x.$$

При условіяхъ (A) x меньше 5, слѣдовательно, правая часть послѣдняго неравенства положительная величина. Такъ какъ и лѣвая часть его положительна, то [теор. 1 въ § 130] при возвышеніи его въ квадратъ знакъ неравенства долженъ остаться, какимъ онъ былъ. Вводимыя же при этомъ постороннія рѣшенія нами уже напередъ устранены подготовительнымъ нашимъ изслѣдованіемъ и предположеніемъ, что $\sqrt{5-x^2}$ означаетъ положительное число.

Произведя упомянутое возвышеніе въ квадратъ, мы получаемъ:

$$4(5-x^2)<25-10x+x^2,$$

а отсюда

$$20-4x^2<25-10x+x^2$$
$$0<5-10x+5x^2$$
$$x^2-2x+1>0$$
$$(x-1)^2>0.$$

Это неравенство удовлетворяется всякимъ вещественнымъ значеніемъ x, слѣдовательно, данное неравенство всѣми значеніями неизвѣстнаго, удовлетворяющими условіямъ (A). Значитъ

$$\sqrt{5}>x>-\sqrt{5}$$

есть рѣшеніе даннаго неравенства.

6) *Задача.*

Найти, какія значенія x удовлетворяють условіямъ

$$2>\frac{5+\sqrt{25-4x^2}}{4}>0.$$

Рѣшеніе.

И здѣсь мы прежде всего должны опредѣлить условія вещественности радикала, встрѣчающагося въ данномъ неравенствѣ. Для этого мы должны рѣшить неравенство

$$25-4x^2>0.$$

Разложивъ лѣвую часть его на сомножителей и получивъ при этомъ

$$(5+2x)(5-2x)>0,$$

мы видимъ, что оно удовлетворяется, если

или	или
$\begin{cases} 5+2x>0 \\ 5-2x>0, \end{cases}$	$\begin{cases} 5+2x<0 \\ 5-2x<0, \end{cases}$
слѣд.,	слѣд.,
$\begin{cases} x>-2\frac{1}{2} \\ x<2\frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x<-2\frac{1}{2} \\ x>2\frac{1}{2}. \end{cases}$

Неравенства второй системы противорѣчать другъ другу, изъ первой же мы получаемъ

$$2\frac{1}{2} > x > \quad 2\frac{1}{2} \ldots (A).$$

Приступая теперь къ рѣшенію самихъ данныхъ неравенствъ, мы безъ дальнѣйшихъ преобразованій сразу же видимъ, что неравенство

$$\frac{5+\sqrt{25\quad 4x^2}}{4} > 0$$

удовлетворяется всѣми значеніями x, удовлетворяющими условіямъ (A), такъ какъ дѣлимое лѣвой части есть сумма двухъ положительныхъ величинъ и дѣлитель также положительное число, а потому и вся лѣвая часть больше 0.

Чтобы рѣшить неравенство

$$2 > \frac{5+\sqrt{25-4x^2}}{4},$$

нужно въ немъ сначала уединить корень:

$$8 > 5+\sqrt{25-4x^2}$$
$$3 > \sqrt{25-4x^2}.$$

На томъ же основанія, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, мы послѣднее неравенство можемъ возвысить въ квадратъ, при чемъ и здѣсь, какъ тамъ, вводимыя вслѣдствіе такого преобразованія постороннія рѣшенія уже напередъ устранены изслѣдованіемъ относительно условій вещественности радикала $\sqrt{25-4x^2}$ и предположеніемъ, что онъ означаетъ положительное число. Произведя это возвышеніе въ квадратъ, мы получаемъ:

$$9 > 25-4x^2,$$

а отсюда

$$4x^2 > 16$$
$$4x^2-16 > 0$$
$$x^2-4 > 0$$
$$(x+2)(x-2) > 0.$$

Такимъ же способомъ, какъ найдены были условія (A), мы изъ послѣдняго неравенства находимъ, что оно *не* удовлетворяется только такими значеніями x, которыя заключены между $+2$ и -2.

А изъ этого рѣшенія, изъ рѣшенія неравенства

$$\frac{5+\sqrt{25-4x^2}}{4} > 0$$

и изъ условій (A) мы заключаемъ, что *даннымъ условіямъ удовлетворяютъ только значенія x, удовлетворяющія неравенствамъ*:

$$2\frac{1}{2}>x>2$$

и

$$-2\frac{1}{2}<x<-2.$$

ГЛАВА XXIII

Неопредѣленныя уравненія.

§ 585. **Вступительныя замѣчанія**. Нами уже было разъяснено [въ §§ 393, 394, 426, 427 и 430], что система уравненій, въ которой неизвѣстныхъ больше, чѣмъ уравненій, имѣетъ безконечное число рѣшеній, что значенія по крайней мѣрѣ одного изъ неизвѣстныхъ могутъ быть въ ней совершенно произвольныя, и что такая система вслѣдствіе этого называется неопредѣленною. Наипростѣйшій частный случай такой системы представляетъ одно уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными. Въ общемъ видѣ этотъ случай можетъ быть изображенъ уравненіемъ

$$ax+by=c.$$

Рѣшивъ его относительно одного изъ неизвѣстныхъ, напр., x, мы имѣемъ:

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

По этой формулѣ мы для всякаго совершенно произвольно взятаго y находимъ соотвѣтствующее ему значеніе x, т. е. такое, которое вмѣстѣ съ избраннымъ значеніемъ y составляетъ систему корней, удовлетворяющую данному уравненію.

Съ каждымъ увеличеніемъ числа неизвѣстныхъ въ уравненіи (а также и въ системѣ) на одно увеличивается на одно и число неизвѣстныхъ, для которыхъ можно брать совершенно произвольныя значенія.

§ 586. **Ограниченіе числа рѣшеній неопредѣленной системы**. Въ § 394 уже упоминалось, что число рѣшеній уравненія съ двумя неизвѣстными можетъ быть между прочимъ ограничено требованіемъ, чтобы значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія такому уравненію, были цѣлыя и положительныя. Ясно, что предъявленіемъ такого же требованія будетъ ограничено число рѣшеній и въ томъ случаѣ, когда въ уравненіи неизвѣстныхъ больше, чѣмъ два, а равнымъ образомъ и число рѣшеній всякой неопредѣленной системы. Отысканіе цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній и имѣется главнымъ образомъ въ виду, когда говорятъ о рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій. Мы при этомъ ограничимся уравненіями первой степени, а попутно отно-

сительно уравненія съ двумя неизвѣстными разсмотримъ болѣе общую здачу, состоящую въ нахожденіи рѣшеній, которыя были бы только цѣлыми, какъ положительными, такъ и отрицательными

Но не всякое неопредѣленное уравненіе допускаетъ цѣлыя рѣшенія. Условія, при которыхъ ихъ не имѣется, указываются слѣдующею теоремою.

§ 587. **Уравненія, не допускающія цѣлыхъ рѣшеній**

196 **Теорема.** Уравненіе

$$ax+by=c$$

не допускаетъ цѣлыхъ рѣшеній, если a и b суть кратныя одного и того же числа, которое въ c не содержится.

Предп. a, a_1, b, b_1, c и m цѣлыя числа;

$$a=a_1 m,$$
$$b=b_1 m;$$

c не дѣлится на m.

Утв. Уравненіе

$$ax+by=c$$

не допускаетъ цѣлыхъ рѣшеній.

Док. Раздѣливъ уравненіе

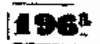
$$ax+by=c$$

на m, мы на основаніи сдѣланныхъ предположеній получаемъ:

$$a_1x+b_1y=\frac{c}{m}.$$

Такъ какъ a_1 и b_1 цѣлыя числа, то, какія бы x и y ни означали цѣлыя числа, лѣвая часть послѣдняго уравненія будетъ цѣлое число, которое какъ таковое никоимъ образомъ не можетъ оказаться равнымъ правой части, выражающей, вслѣдствіе послѣдняго предположенія, настоящую дробь. А это и значитъ, что при условіяхъ, названныхъ въ теоремѣ, уравненіе цѣлыхъ рѣшеній не допускаетъ.

Совершенно такимъ же образомъ доказывается и болѣе общее предложеніе:


196a **Теорема.** Уравненіе

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=p$$

не допускаетъ цѣлыхъ рѣшеній, если $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ суть кратныя одного и того же числа, которое въ p не содержится.

§ 588. **Соглашеніе**. Такъ какъ вообще рѣшеніе уравненій должно начинать съ приведенія ихъ къ ординарному виду и такъ какъ къ разсмотрѣнному только-что случаю неопредѣленнаго уравненія мы болѣе возвращаться не будемъ, то условимся, 1) что

$$ax+by=c$$

въ этой главѣ отнынѣ будетъ всегда изображать уравненіе, окончательно приведенное въ порядокъ, т. е., что въ немъ a, b и c означаютъ цѣлыя числа, не содержащія притомъ и общаго дѣлителя [§§ 91 и 92], и 2) что a и b кромѣ того числа взаимно-простыя.

§ 589. **Случай, что коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ 1**. Проще всего рѣшается уравненіе

$$ax+by=c$$

въ цѣлыхъ числахъ въ случаѣ, названномъ въ заголовкѣ этого параграфа. Если, напр., требуется рѣшить уравненіе

$$x+py=q,$$

то, перенеся членъ py въ правую часть, мы имѣемъ:

$$x=q-py \ldots (\alpha).$$

Какія бы цѣлыя значенія мы вмѣсто y въ полученное для x выраженіе ни подставляли, оно всегда будетъ означать цѣлое число.

Слѣдовательно, уравненіе

$$x+py=q$$

имѣетъ безконечно большое число цѣлыхъ рѣшеній: уравненію удовлетворяютъ каждое цѣлое значеніе y и соотвѣтствующее ему значеніе x, вычисляемое по формулѣ (α). Обозначая буквою n произвольное цѣлое число (положительное или отрицательное, а также и 0), мы рѣшеніе разсматриваемаго уравненія можемъ выразить въ общемъ видѣ слѣдующими формулами:

$$y=n$$
$$x=q-pn.$$

§ 590. **Отысканіе рѣшенія уравненія общаго вида**. Рѣшеніе уравненія

$$ax+by=c$$

въ цѣлыхъ числахъ можетъ быть приведено къ рѣшенію уравненія вида, разсмотрѣннаго въ предыдущемъ параграфѣ, при помощи пріемовъ, которые сначала покажемъ на частномъ примѣрѣ.

Положимъ, что требуется рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$47x+14y=904.$$

Рѣшивъ это уравненіе относительно y (по причинѣ, выясняемой ниже, мы рѣшаемъ его относительно того неизвѣстнаго, предъ которымъ коэффиціентъ меньше), мы находимъ:

$$y=\frac{904-47x}{14}.$$

Если мы дѣлимое полученнаго выраженія раздѣлимъ почленно, то послѣднее принимаетъ видъ:

$$y=64\frac{8}{14}-3\frac{5}{14}x,$$

который можетъ быть замѣненъ слѣдующими:

$$y=64+\frac{8}{14}-3x-\frac{5}{14}x$$

$$y=64-3x+\frac{8-5x}{14} \qquad (I).$$

Видомъ послѣдняго выраженія отчетливо указывается, что значенія y будутъ цѣлыя числа при всѣхъ тѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ x, которыя превращаютъ частное $\frac{8-5x}{14}$ въ цѣлое число.

Обозначивъ это частное буквою a и приведя уравненіе

$$\frac{8-5x}{14}=a \ \ldots \ (\alpha)$$

къ виду:

$$5x+14a=8 \ \ldots \ (\beta),$$

мы убѣждаемся, что задача приведена теперь къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ новаго неопредѣленнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ меньше, чѣмъ меньшій изъ коэффиціентовъ въ данномъ уравненіи, а другой равенъ этому послѣднему коэффиціенту. Ясно, что если мы поступимъ съ неопредѣленнымъ уравненіемъ (β) такъ же, какъ мы это сдѣлали съ даннымъ, то должны будемъ получить новое съ еще меньшими коэффиціентами; и ясно также, что рѣшая данное уравненіе и получаемыя новыя всегда относительно того неизвѣстнаго, предъ которымъ коэффиціентъ меньше, мы скорѣе будемъ приближаться къ цѣли, т. е., скорѣе получимъ такое уравненіе, до какого мы указаннымъ способомъ,

какъ это доказывается въ слѣдующемъ параграфѣ, всегда должны дойти, а именно уравненіе съ коэффиціентомъ 1 предъ неизвѣстнымъ.

Рѣшивъ уравненіе (β) относительно x и исключивъ изъ полученнаго выраженія цѣлыя, какъ это было сдѣлано выше для y, мы находимъ:

$$x = 1 - 2a + \frac{3-4a}{5} \qquad \text{(II)}$$

Обозначивъ теперь частное $\frac{3-4a}{5}$ буквою b и рѣшивъ относительно a уравненіе

$$\frac{3-4a}{5} = b,$$

принимающее послѣ приведенія въ порядокъ видъ

$$4a + 5b = 3 \quad . \quad (\gamma),$$

мы находимъ:

$$a = -b + \frac{3-b}{4} \qquad \text{(III)}.$$

Полагая, наконецъ,

$$\frac{3-b}{4} = c \ . \quad (\delta),$$

мы изъ уравненія (δ) получаемъ уравненіе

$$b + 4c = 3 \ldots \quad (\varepsilon),$$

въ которомъ и въ самомъ дѣлѣ коэффиціентъ передъ однимъ изъ неизвѣстныхъ есть 1.

А отсюда мы имѣемъ

$$b = 3 - 4c \qquad \text{(IV)}.$$

Чрезъ подстановку этого выраженія вмѣсто b въ выраженіе III мы находимъ:

$$a = -b + c = -(3 - 4c) + c = -3 + 5c \qquad (\text{III}^{a}),$$

а посредствомъ подстановки послѣдняго выраженія и выраженія (IV) въ формулу II получаемъ:

$$x = 1 - 2a + b = 1 - 2(-3 + 5c) + (3 - 4c) = 10 - 14c \qquad (\text{II}^{a}).$$

Если мы, наконецъ, подставимъ выраженія (II^{a}) и (III^{a}) въ формулу (I), то находимъ:

$$y = 64 - 3(10 - 14c) + (-3 + 5c) = 31 + 47c \qquad (\text{I}^{a}).$$

Выраженія (II^{a}) и (I^{a}), т. е.

$$x = 10 - 14c$$
$$y = 31 + 47c$$

и составляютъ въ общемъ видѣ рѣшеніе даннаго уравненія, въ чемъ можно убѣдиться и чрезъ подстановку въ него цѣликомъ этихъ формулъ.

При всякомъ произвольномъ цѣломъ значеніи c они дадутъ цѣлыя значенія x и y, удовлетворяющія данному уравненію.

§ 591. **Возможность цѣлыхъ рѣшеній уравненія $ax+by=c$** Если мы обратимъ вниманіе на коэффиціенты предъ неизвѣстными въ уравненіяхъ (β), (γ) и (ε), найденныхъ нами въ предыдущемъ параграфѣ, то оказывается, что коэффиціентъ 5 передъ x есть остатокъ отъ дѣленія большаго коэффицента 47 въ данномъ уравненіи на меньшій 14, что коэффиціентъ 4 передъ a есть остатокъ отъ дѣленія этого числа 14, которое въ уравненіи (β) есть большій коэффиціентъ, на названный остатокъ 5, который въ томъ же уравненіи есть меньшій коэффиціентъ, и что, наконецъ, коэффиціентъ 1 предъ b есть остатокъ отъ дѣленія названнаго числа 5, которое въ уравненіи (γ) есть большій коэффиціентъ, на прежній остатокъ 4, который въ этомъ послѣднемъ уравненіи есть меньшій коэффиціентъ. Оказывается, слѣдовательно, что коэффиціенты въ неопредѣленныхъ уравненіяхъ, выводимыхъ изъ даннаго при рѣшеніи его, суть дѣлители въ томъ рядѣ дѣленій, который бы намъ пришлось произвести, если бы мы отыскивали общаго наибольшаго дѣлителя для коэффицентовъ при неизвѣстныхъ въ данномъ уравненіи. Но такъ какъ мы эти коэффиціенты теперь предполагаемъ числами взаимнопростыми, т. е. такими, которыхъ общій наибольшій дѣлитель есть 1, то, рѣшая уравненіе вида

$$ax+by=c$$

способомъ, изложеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, *мы всегда въ концѣ концовъ должны будемъ дойти до уравненія съ коэффиціентомъ 1 при одномъ изъ неизвѣстныхъ.*

Но такое уравненіе, какъ это уже разъяснено было въ § 589, имѣетъ безконечно большое число цѣлыхъ рѣшеній. Изъ каждаго же рѣшенія названнаго послѣдняго полученнаго уравненія мы путемъ подстановокъ, описанныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, находимъ одно рѣшеніе даннаго уравненія, которое, слѣдовательно, также должно имѣть безконечно большое число цѣлыхъ рѣшеній.

Результатъ послѣднихъ нашихъ разсужденій мы можемъ выразить такъ:

Теорема. Уравненіе

$$ax+by=c$$

допускаетъ безконечно большое число цѣлыхъ рѣшеній, если a, b и c суть цѣлыя числа и притомъ a и b числа взаимно-простыя.

§ 592. **Зависимость общаго рѣшенія ур. $ax+by=c$ отъ коэффиціентовъ послѣдняго** Въ общемъ рѣшеніи уравненія, разсмотрѣннаго

въ § 590, мы видимъ, что коэффиціентами произвольнаго цѣлаго числа c являются коэффиціенты при неизвѣстныхъ, одинъ со знакомъ $+$, другой со знакомъ $-$. Что это не случайное совпаденіе, получившееся только въ разсмотрѣнномъ рѣшеніи, а соотвѣтствуетъ нѣкоторому общему правилу, это подтверждается слѣдующимъ предложеніемъ, справедливымъ не только для цѣлыхъ значеній буквы n, но и для всякихъ другихъ:

Теорема. Если уравненію 197

$$ax+by=c$$

удовлетворяютъ значенія

$$x=\alpha$$
$$y=\beta,$$

то ему удовлетворяютъ также всѣ значенія

$$x=\alpha\pm bn$$
$$y=\beta\mp an.$$

Предп. Уравненіе $ax+by=c$ превращается въ тождество при значеніяхъ $x=\alpha$ и $y=\beta$.

Утв. Уравненіе $ax+by=c$ превращается въ тождество также при значеніяхъ $x=\alpha\pm bn$ и $y=\beta\mp an$.

Док. Подставивъ въ уравненіе

$$ax+by=c$$

значенія

$$x=\alpha\pm bn$$
$$y=\beta\mp an,$$

мы получаемъ:

$$a(\alpha\pm bn)+b(\beta\mp an)=c$$

или

$$a\alpha\pm abn+b\beta\mp abn=c,$$

то есть

$$a\alpha+b\beta=c,$$

слѣдовательно, равенство, которое по предположенію есть тождество, чѣмъ теорема и доказана.

§ 593. **Опредѣленіе общаго рѣшенія ур. ax+by=c одною системою корней его.** Только-что доказанная теорема оказываетъ при рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій весьма значительную пользу. Она позволяетъ сразу писать общее рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія

$$ax+by=c,$$

когда извѣстно какое-либо одно рѣшеніе его, хотя бы даже угаданное, что сдѣлать иногда бываетъ очень легко.

Прежде, однако, чѣмъ приступить къ поясненію сказаннаго примѣрами, разсмотримъ, какъ получается наилучшій видъ общаго рѣшенія, а затѣмъ нѣкоторыя упрощенія, позволяющія скорѣе найти систему корней, удовлетворяющихъ уравненію.

§ 594. **Наилучшій видъ общаго рѣшенія** Положимъ, что дано уравненіе

$$41x-73y=27$$

и что мы какимъ бы то ни было способомъ нашли значенія

$$\begin{aligned} x&=152 \\ y&=85, \end{aligned}$$

удовлетворяющія ему. Въ такомъ случаѣ общее рѣшеніе этого уравненія мы можемъ написать такъ:

$$\begin{aligned} x&=152+73n \\ y&=85+41n. \end{aligned}$$

Полагая n равнымъ —1 и —2, мы получимъ значенія

$$\begin{cases} x=79 \\ y=44 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x=6 \\ y=3, \end{cases}$$

которыя между прочимъ также составляютъ системы корней, удовлетворяющія данному уравненію. Исходя изъ послѣдней изъ нихъ, мы имѣемъ право общее рѣжение уравненія писать также въ видѣ:

$$\begin{aligned} x&=6+73n \\ y&=3+41n. \end{aligned}$$

Полагая теперь $n=0$, мы получимъ въ наименьшихъ возможныхъ положительныхъ цѣлыхъ числахъ рѣшеніе уравненія.

Подобнымъ образомъ можно всегда формулы общаго рѣшенія

$$\begin{aligned} x&=\alpha\pm bn \\ y&=\beta\mp an \end{aligned}$$

замѣнить другими

$$\begin{aligned} x&=\alpha_1\pm bn \\ y&=\beta_1\mp an, \end{aligned}$$

въ которыхъ по абсолютной величинѣ α_1 будетъ меньше b или β_1 меньше a. Такой видъ мы и будемъ всегда придавать общимъ рѣшеніямъ неопредѣленныхъ уравненій. А что онъ всегда возможенъ, это докажемъ слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Уравненію

$$ax+by=c$$

[см. § 588] удовлетворяютъ между прочимъ всегда 1 положительное и 1 отрицательное цѣлое значеніе одного изъ неизвѣстныхъ, меньшее по абсолютной величинѣ, чѣмъ коэффиціентъ при другомъ неизвѣстномъ, вмѣстѣ съ соотвѣтствующимъ значеніемъ этого послѣдняго неизвѣстнаго.

Док. Положимъ, что уравненіе

$$ax+by=c$$

удовлетворяется въ цѣлыхъ числахъ значеніями

$$x=\alpha$$
$$y=\beta.$$

Въ такомъ случаѣ ему удовлетворяютъ также, по теоремѣ **197**, всѣ значенія, выражаемыя формулами:

$$x=\alpha\pm bn$$
$$y=\beta\mp an.$$

Если абсолютное значеніе α не меньше абсолютнаго значенія b, а, положимъ, равно ему, то достаточно взять n равнымъ $+1$ или -1, чтобы получить $x=0$, слѣдовательно значеніе этого неизвѣстнаго меньшее, чѣмъ $|b|$, которое вмѣстѣ съ соотвѣтствующимъ значеніемъ y удовлетворяетъ уравненію.

Если же абсолютное значеніе α больше абсолютнаго значенія b, то достаточно избрать предъ bn тотъ изъ знаковъ, при которомъ $\alpha\pm bn$ будетъ разность двухъ равнозначныхъ чиселъ (обозначимъ абсолютное значеніе этой разности $|\alpha\pm bn|$) и n равнымъ частному отъ обыкновеннаго ариөметическаго дѣленія $|\alpha|$ на $|b|$, чтобы было

$$|x|<|b|.$$

Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ r остатокъ отъ такого дѣленія, мы имѣемъ:

$$|r|=|\alpha\pm bn| \;{}^{*)}.$$

Слѣдовательно,

$$|x|=|r|.$$

Но такъ какъ при дѣленіи упомянутаго рода остатокъ меньше дѣлителя, то вмѣстѣ съ r и

$$|x|<|b|,$$

то есть, и въ томъ случаѣ, когда

$$|\alpha|>|b|.$$

*) Дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное плюсъ остатокъ, слѣд., остатокъ равняется произведенію дѣлителя на частное минусъ дѣлимое.

можетъ быть найдено такое значенiе n, при которомъ x по абсолютной величинѣ будетъ меньше абсолютнаго значенiя b.

Полагая n равнымъ 0, 1, 2, 3 и т. д., а также равнымъ —1, —2, —3 и т. д., мы видимъ, что разность между ближайшими другъ къ другу двумя значенiями x всегда равна b. Если мы нашли положительное значенiе x меньшее, чѣмъ $|b|$, и назовемъ его α_1, то слѣдующее большее будетъ $\alpha_1+|b|$, слѣдовательно, больше, чѣмъ $|b|$, а предшествующее ему меньшее должно быть $\alpha_1-|b|$, слѣдовательно, число отрицательное, но по абсолютной величинѣ своей также меньшее, чѣмъ $|b|$. Если же мы нашли отрицательное значенiе x, абсолютное значенiе котораго меньше, чѣмъ абсолютное значенiе b, и назовемъ его $-\alpha'$, то слѣдующее большее значенiе x будетъ $-\alpha'+|b|$, слѣдовательно, положительное число, меньшее, чѣмъ $|b|$, а предшествующее ему меньшее должно быть $-\alpha'-|b|$ или $-(\alpha'+|b|)$, слѣдовательно, число по абсолютной величинѣ своей большее, чѣмъ $|b|$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что, дѣйствительно, между 0 и $+b$ и между 0 и $-b$ есть по одному цѣлому значенiю x, которыя вмѣстѣ съ соотвѣтствующими цѣлыми значенiями y удовлетворяютъ данному уравненiю.

Относительно y теорема доказывается, конечно, такимъ же образомъ.

Если бы неопредѣленное уравненiе гласило:

$$ma+nb=p$$

и въ немъ были a и b неизвѣстныя, то рѣшивъ его относительно b, мы получили бы

$$b=\frac{p-ma}{n}.$$

На основанiи этого мы изъ доказанной теоремы выводимъ слѣдующее заключенiе, позволяющее часто скорѣе найти рѣшенiе неопредѣленнаго уравненiя.

Слѣдствiе. Частное $\frac{p-ma}{n}$, въ которомъ всѣ буквы означаютъ цѣлыя числа *), притомъ m и n взаимно-простыя, должно быть цѣлымъ числомъ, между прочимъ, и при одномъ положительномъ значенiи a меньшемъ по абсолютной величинѣ, чѣмъ n, и при одномъ отрицательномъ такомъ же значенiи.

Примѣръ.

Частное $\frac{5-3a}{17}$ дѣлается равнымъ -2 при $a=13$ и превращается въ 1 при $a=-4$.

---

*) Всѣ онѣ могутъ означать и положительныя и отрицательныя числа, но m и n при этомъ не должны только означать 0.

§ 595. **Упрощеніе чрезъ вынесеніе въ числителяхъ общаго множителя за скобки.** Рѣшая уравненіе

$$81x+23y=179$$

относительно y и исключая въ полученномъ выраженіи цѣлыя такимъ образомъ, какъ это указано было въ примѣрѣ, разсмотрѣнномъ въ § 590, мы находимъ,

$$y=\frac{179-81x}{23}=7-3x+\frac{18-12x}{23}.$$

Если бы мы теперь частное $\frac{18-12x}{23}$ обозначили буквою a, то въ порядкѣ, указанномъ въ названномъ параграфѣ, намъ пришлось бы рѣшать уравненіе

$$\frac{18-12x}{23}=a,$$

которое послѣ приведенія въ порядокъ принимаетъ видъ:

$$12x+23a=18.$$

Но, обративъ вниманіе на то, что въ дѣлимомъ названнаго частнаго можно вынести за скобки общаго множителя 6, мы выраженію для y можемъ придать видъ:

$$y=7-3x+6\cdot\frac{3-2x}{2},$$

послѣ чего дѣлается яснымъ, что достаточно при цѣлыхъ значеніяхъ x частному $\frac{3-2x}{23}$ быть цѣлымъ числомъ, чтобы и значеніе y было цѣлое. Полагая поэтому

$$\frac{3-2x}{23}=a_1$$

и находя отсюда

$$2x+23a_1=3,$$

мы этимъ послѣднимъ уравненіемъ замѣняемъ уравненіе съ неизвѣстными x и a, которое менѣе удобно, потому что въ немъ коэффиціентъ предъ x больше. Рѣшая это болѣе удобное уравненіе относительно x и исключая опять цѣлыя, мы находимъ:

$$x=\frac{3-23a_1}{2}=1-11a_1+\frac{1-a_1}{2}.$$

Полагая теперь

$$\frac{1-a_1}{2}=b,$$

мы получаемъ:

$$a_1=1-2b,$$

а подставляя это выраженіе вмѣсто a_1 въ выраженія для x и y, въ общемъ видѣ рѣшеніе уравненія:

$$x=1-11(1-2b)+b,$$

то есть

$$x=-10+23b;$$

$$y=7-3(-10+23b)+6(1-2b),$$

то есть

$$y=43-81b.$$

§ 596. **Другой случай упрощенія чрезъ вынесеніе въ числителѣ за скобки общаго множителя**. Если въ уравненіи

$$ax+by=c$$

свободный членъ c и одинъ изъ коэффиціентовъ предъ неизвѣстными числа не взаимно-простыя, то можетъ быть полезнымъ общаго наибольшаго дѣлителя ихъ вынести общимъ множителемъ за скобки еще до исключенія цѣлыхъ. Возьмемъ для примѣра уравненіе

$$290x-21y=725,$$

въ которомъ свободный членъ и коэффиціентъ предъ x дѣлятся на 5 и на 29, слѣд., и на 145. Рѣшивъ это уравненіе относительно y, мы поэтому полученное выраженіе

$$y=\frac{290x-725}{21}$$

можемъ преобразовать такъ:

$$y=145\cdot\frac{2x-5}{21}.$$

Теперь достаточно найти, какія цѣлыя значенія x превращаютъ частное $\frac{2x-5}{21}$ въ цѣлыя числа, чтобы имѣть цѣлыя рѣшенія разсматриваемаго уравненія, такъ какъ при такихъ значеніяхъ x и значенія y будутъ цѣлыя. Въ частномъ же $\frac{2x-5}{21}$ коэффиціентъ предъ x меньше, чѣмъ въ дробной части выраженія, которое бы мы получили, если бы изъ частнаго $\frac{290x-725}{21}$ исключили цѣлыя. Потому мы, примѣняя разъясняемое теперь упрощеніе, скорѣе получимъ цѣлое рѣшеніе уравненія.

Полагая

$$\frac{2x-5}{21}=a,$$

рѣшая полученное уравненіе относительно x и исключая цѣлыя, мы находимъ:

$$2x=21a+5$$
$$x=\frac{21a+5}{2}=10a+2+\frac{a+1}{2}$$

Полагая, наконецъ,

$$\frac{a+1}{2}=b,$$

мы имѣемъ:

$$a=2b-1,$$

слѣдовательно,

$$x=10(2b-1)+2+b=21b-8$$
$$y=145a=145(2b-1)$$

Формулы

$$x=21b-8$$
$$y=145(2b-1)$$

представляютъ собою общее рѣшеніе разсмотрѣннаго уравненія: какое бы цѣлое значеніе мы въ нихъ вмѣсто b ни подставили, мы всякій разъ получимъ систему цѣлыхъ корней, удовлетворяющую этому уравненію.

§ 597. Упрощеніе чрезъ превращеніе числителя въ 0. Рѣшеніе только что разсмотрѣннаго въ § 595 уравненія можно было бы закончить удобнѣе, чѣмъ это нами было сдѣлано. Числитель дроби въ выраженіи

$$x=1-11a_1+\frac{1-a_1}{2}$$

при $a_1=1$ превращается въ 0, а потому при этомъ значеніи a_1 и вся дробь въ 0. Слѣдовательно, достаточно взять $a_1=1$, чтобы наиудобнѣйшимъ способомъ достигнуть цѣлаго значенія x, а вмѣстѣ съ тѣмъ и цѣлаго значенія y. Такимъ образомъ, мы находимъ

$$x=-10$$
$$y=43,$$

а отсюда, по теоремѣ **197**, то же общее рѣшеніе уравненія:

$$x=-10+23n$$
$$y=43-81n,$$

которое нами было получено выше.

Подобнымъ образомъ можно посредствомъ превращенія въ 0 числителя, содержащаго уже неизвѣстное съ коэффиціентомъ 1, заканчивать рѣшеніе всякаго уравненія вида

$$ax+by=c,$$

допускающаго цѣлыя рѣшенія.

§ 598. **Упрощеніе чрезъ отысканіе цѣлаго значенія частнаго посредствомъ подстановокъ или чрезъ угадываніе**. Иногда же бываетъ очень удобно еще до полученія числителя, содержащаго неизвѣстное съ коэффиціентомъ 1, найти систему цѣлыхъ корней, удовлетворяющихъ данному уравненію, путемъ примѣненія теоремы, приведенной какъ слѣдствіе въ § 594

Можно, конечао, эту теорему примѣнить къ любому изъ частныхъ, съ которыми мы имѣемъ дѣло при рѣшеніи неопредѣленнаго уравненія. Но если дѣлитель этого частнаго большое число, то подстановка чиселъ 0, 1, 2 и т. д. вмѣсто буквы въ дѣлимомъ можетъ иногда и очень не скоро довести насъ до того значенія ея, при которомъ частное станетъ цѣлымъ числомъ. Зато иногда бываетъ очень легко угадать такое значеніе ея. Такъ, напр., нѣтъ ничего легче, какъ увидѣть сразу же, что при $a=2$ частное $\frac{2a+1}{5}$ превращается въ 1, или что при $b=3$ частное $\frac{5b-1}{7}$ дѣлается равнымъ 2. Въ такихъ случаяхъ можно только рекомендовать разсматриваемое здѣсь упрощеніе.

§ 599. **Упрощеніе чрезъ примѣненіе отрицательныхъ остатковъ**. При упоминавшемся неоднократно выше исключеніи цѣлыхъ можно достигнуть иногда меньшихъ по абсолютной величинѣ остатковъ, если частное брать на 1 больше, чѣмъ это полагается при обыкновенномъ дѣленіи. Въ случаяхъ примѣненія такого пріема мы, конечно, будемъ получать отрицательные остатки. Пріемъ же можетъ быть полезенъ и въ другомъ отношеніи: можно посредствомъ его иногда получить въ дѣлимомъ члены съ общимъ множителемъ и этимъ упростить рѣшеніе.

И то и другое упрощеніе достигается заразъ примѣненіемъ разсматриваемаго пріема въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Рѣшивъ уравненіе

$$745x-112y=86$$

относительно y и исключивъ цѣлыя обыкновеннымъ способомъ, мы получили бы:

$$y=6x+\frac{73x-86}{112}.$$

Теперь пришлось бы продолжать рѣшеніе, полагая

$$\frac{73x-86}{112}=a,$$

приводя послѣднее уравненіе въ порядокъ и т. д.

Но если бы мы при дѣленіи на 112 первымъ частнымъ взяли $7x$ вмѣсто $6x$, а вторымъ 1 вмѣсто 0, то получили бы:

$$y=7x-\frac{39x}{112}\left(1-\frac{26}{112}\right)=7x-1+\frac{-39x+26}{112}=7x-1+13\cdot\frac{2-3x}{112}.$$

Если бы мы обозначили частное $\frac{2-3x}{112}$ какою-либо буквою, то по теоремѣ, доказанной въ § 594, и по слѣдствію изъ нея должно быть возможно одно положительное и одно отрицательное значеніе x, при которыхъ абсолютное значеніе b равно 1 или 2. На основаніи этого такое значеніе легко подыскать въ умѣ: абсолютное значеніе x должно быть число, близкое къ тому, при которомъ $3x$ равно 112 или 2 . 112; раздѣливъ поэтому 112 на 3, мы находимъ 37, а взявъ x равнымъ 38, мы получаемъ

$$\frac{2-3x}{112}=-1,$$

взявъ же x равнымъ -74, мы получаемъ

$$\frac{2-3x}{112}=2.$$

Но если $x=38$, то $y=252$. Слѣдовательно, общее рѣшеніе нашего уравненія, по теоремѣ **197**, должно быть:

$$x=38+112n$$
$$y=252+745n.$$

Если бы мы это уравненіе рѣшали безъ примѣненныхъ нами упрощеній, то намъ понадобилось бы 6 новыхъ неизвѣстныхъ a, b, c, d, e и f, и при помощи f мы выразили бы общее рѣшеніе; упрощенія же эти намъ позволили найти это рѣшеніе, не изодя ни одного вспомогательнаго неизвѣстнаго.

§ 600. **Примѣры.**

1) Для сравненія рѣшимъ еще разъ уравненіе

$$47x+14y=904,$$

рѣшенное нами въ § 590 безъ примѣненія какихъ-либо упрощеній.

Рѣшивъ уравненіе относительно y, возьмемъ при исключеніи цѣлыхъ частныя равными 65 и $4x$, вслѣдствіе чего остатки получатся отрицательные, выраженіе же для y приметъ видъ:

$$y=65-4x+\frac{9x-6}{14}=65-4x+3\cdot\frac{3x-2}{14}.$$

Теперь мы на основаніи теоремы, доказанной въ § 594, и слѣдствія изъ нея видимъ, что должно быть возможно одно положительное и одно отрицательное еначеніе x, при которыхъ абсолютное значеніе частнаго $\frac{3x-2}{14}$ равно 1 или 2. Какъ въ задачѣ, разсмотрѣнной въ § 599, и здѣсь легко найти въ умѣ, что названное частное превращается въ -1 при $x=-4$. Въ этомъ случаѣ $y=78$. Слѣдовательно, общее рѣшеніе уравненія будетъ:

$$x=-4+14n$$
$$y=78-47n.$$

Полагая $n=1$, мы изъ этихъ формулъ находимъ систему корней:

$$x=10$$
$$y=31,$$

а изъ нея общее рѣшеніе уравненія въ томъ видѣ, въ какомъ оно было получено въ § 590.

2) Если требуется рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$17x-56y=46,$$

то послѣ рѣшенія его относительно x удобно примѣнить отрицательный остатокъ при дѣленіи перваго члена дѣлимаго на 17. Такнмъ образомъ получается:

$$x=\frac{46+56y}{17}=3+3y+\frac{-5+5y}{17}=3+3y+5\cdot\frac{y-1}{17}.$$

Здѣсь въ частномъ $\frac{y-1}{17}$ коэффиціентъ при неизвѣстномъ уже равенъ 1, слѣдовательно, мы можемъ продолжать рѣшеніе, разсуждая такъ [см. § 597]:

При $y=1$ частное $\frac{y-1}{17}$ превращается въ 0; въ этомъ случаѣ $x=6$. А потому общій видъ рѣшенія даннаго уравненія долженъ быть:

$$x=6+56n$$
$$y=1+17n.$$

§ 601. **Уравненіе $ax+by=0$.** Въ томъ частномъ случаѣ, когда въ уравненіи

$$ax+by=c$$

правая часть равна 0, оно удовлетворяется значеніями

$$x=0$$
$$y=0.$$

Слѣдовательно, общее рѣшеніе его должно быть, по теоремѣ **197**,

$$x=0+bn$$
$$y=0\mp an$$

или

$$x=\pm bn$$
$$y=\mp an.$$

§ 602 **Положительныя цѣлыя рѣшенія неопредѣленнаго уравненія** До сихъ поръ мы ограничивали число рѣшеній неопредѣленнаго уравненія требованіемъ, чтобы рѣшенія были цѣлыя. Но весьма часто къ нимъ предъявляется еще требованіе, чтобы они были, кромѣ того, и положительныя Если мы общее рѣшеніе уравненія

$$ax+by=c,$$

какъ въ § 592, выразимъ формулами:

$$x=\alpha+bn$$
$$y=\beta+an,$$

то послѣднее требованіе можетъ быть выражено неравенствами

$$\alpha\pm bn>0$$
$$\beta\mp an>0,$$

рѣшивъ которыя, мы и найдемъ искомыя значенія неизвѣстныхъ.

Такъ мы видимъ, что рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія въ *цѣлыхъ положительныхъ* числахъ отличается отъ разсмотрѣннаго нами уже рѣшенія его въ *цѣлыхъ числахъ* только тѣмъ, что теперь ходъ рѣшенія долженъ заканчиваться прибавляющимся рѣшеніемъ системы 2 неравенствъ 1-ой степени съ 1 неизвѣстнымъ

§ 603. **Случаи, когда рѣшеніе въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ невозможно**. Ясно, что при условіяхъ, при которыхъ вообще невозможны цѣлыя рѣшенія неопредѣленнаго уравненія, невозможны и цѣлыя положительныя рѣшенія его [теор. **196**], что сумма двухъ положительныхъ чиселъ не можетъ быть отрицательнымъ числомъ, а сумма двухъ отрицательныхъ чиселъ числомъ положительнымъ; и что если $a+b>c$ или, что то же самое, $a\,.\,1+b\,.\,1>c$, то $ax+by$ при положительныхъ цѣлыхъ значеніяхъ x и y не можетъ равняться c.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что требованіе, чтобы рѣшенія уравненія

$$ax+by=c$$

были цѣлыя и положительныя, невыполнимо:

1) если коэффиціенты a и b суть кратныя одного и того же числа, которое въ c не содержится;

2) если коэффиціенты a и b имѣютъ оба знаки, противоположные знаку числа c; и

3) если a, b и c положительны и притомъ $a+b>c$, или же a, b и c отрицательны и притомъ $a+b<c$.

§ 604. **Неопредѣленныя уравненія, допускающія конечное число положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній.** Если въ неопредѣленномъ уравненіи коэффиціенты передъ неизвѣстными и свободный членъ всѣ отрицательны, то, перемѣнивъ знаки, мы получимъ предъ всѣми этими числами знакъ +. Поэтому и къ уравненіямъ, въ которыхъ всѣ эти числа отрицательны, относится все то, что мы найдемъ, предположивъ, что въ уравненіи

$$ax+by=c$$

a, b и c положительны.

Положимъ, что при этомъ условіи найдено общее рѣшеніе уравненія

$$x=\alpha+bn$$
$$y=\beta-an$$
(или $x=\alpha-bn$; $y=-\beta+an$).

Рѣшивъ въ такомъ случаѣ неравенства

$$\alpha+bn>0$$

и

$$\beta-an>0$$

(или соотвѣтственно неравенства:

$$\alpha-bn>0$$

и

$$\beta+an>0),$$

мы узнаемъ, что тѣ рѣшенія уравненія будутъ цѣлыя и положительныя, которыя получатся при цѣлыхъ значеніяхъ n, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$\frac{\beta}{a}>n>-\frac{\alpha}{b}$$

(или соотвѣтственно

$$\frac{\alpha}{b} > n > -\frac{\beta}{a}\Big).$$

Изъ этого же слѣдуетъ, что рѣшеній при этомъ должно получиться столько, сколько заключается цѣлыхъ чиселъ между $\frac{\beta}{a}$ и $-\frac{\alpha}{b}$ (или соотвѣтственно между $\frac{\alpha}{b}$ и $-\frac{\beta}{a}\Big)$. А такъ какъ между названными дробями можетъ и не оказаться цѣлаго числа, то можетъ случиться, что уравненіе

$$ax + by = c,$$

въ которомъ a, b и c числа равнозначныя, не допускаетъ ни одного рѣшенія въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ, хотя бы уравненіе и не представляло ни одного изъ случаевъ, перечисленныхъ въ § 603.

Изъ всего сказаннаго здѣсь мы заключаемъ слѣдующее:

Если въ уравненіи

$$ax + by = c$$

a, b и c числа равнозначныя, то оно допускаетъ конечное число положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній, иногда же и ни одного.

§ 605. Неопредѣленныя уравненія, допускающія безконечно много положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній. Если въ неопредѣленномъ уравненіи коэффиціенты передъ неизвѣстными имѣютъ противоположные знаки, то, предполагая a и b числами абсолютными, мы такое уравненіе можемъ представить въ общемъ видѣ такимъ образомъ:

$$ax - by = c,$$

такъ какъ вѣдь безразлично, которое изъ неизвѣстныхъ мы назовемъ x и которое y.

Общее рѣшеніе этого уравненія будетъ, по теоремѣ **197**:

$$x = \alpha + bn$$
$$y = \beta + an.$$

Эти формулы указываютъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ x и y, оставаясь положительными, могутъ дѣлаться все больше и больше безъ конца.

Наименьшимъ цѣлымъ значеніемъ n, удовлетворяющимъ системѣ неравенствъ:

$$\begin{cases} \alpha + bn > 0 \\ \beta + an > 0, \end{cases}$$

опредѣляются наименьшія положительныя цѣлыя значенія x и y, удовлетворяющія уравненію.

Выводъ же изъ сказаннаго относительно числа рѣшеній мы можемъ выразить такъ:

Если въ уравненіи

$$ax + by = c$$

числа a и b разнозначныя и взаимно простыя, то оно допускаетъ безконечно много положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній.

§ 606. **Резюмированіе правила рѣшенія ур $ax + by = c$ въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ.** Резюмируя все изложенное въ этой главѣ, мы можемъ указанія, какъ должно рѣшать въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ уравненіе вида

$$ax + by = c,$$

выразить такимъ образомъ:

Правило. *Для рѣшенія въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ неопредѣленнаго уравненія первой степени съ 2 неизвѣстными нужно:*

1) *сначала убѣдиться, не представляетъ ли уравненіе одинъ изъ случаевъ, когда рѣшеніе его въ цѣлыхъ числахъ невозможно;*

2) *рѣшить уравненіе относительно того неизвѣстнаго, предъ которымъ коэффиціентъ меньше;*

3) *исключить изъ полученнаго частнаго цѣлыя, примѣняя отрицательные остатки, гдѣ этимъ достигается упрощеніе;*

4) *испробовать, нельзя ли легко найти такое цѣлое значеніе другого неизвѣстнаго, при которомъ дробная часть выраженія для перваго неизвѣстнаго дѣлается цѣлымъ числомъ;*

5) *если послѣднее не удается легко, то названную дробную часть обозначить буквою и рѣшить въ цѣлыхъ числахъ получающееся новое неопредѣленное уравненіе, примѣняя опять всѣ возможныя упрощенія;*

6) *если понадобится введеніе еще вспомогательныхъ неизвѣстныхъ, то и съ ними поступать такимъ же образомъ;*

7) *найдя, наконецъ, цѣлое рѣшеніе, произвести, идя обратно, подстановку получающихся корней въ выраженія для всѣхъ неизвѣстныхъ, относительно которыхъ рѣшались вспомогательныя уравненія и уравненіе данное;*

8) *найдя такимъ образомъ систему корней, удовлетворяющую данному уравненію, написать общее рѣшеніе;*

9) *полагая формулы этого рѣшенія каждую больше* **0**, *рѣшить получающіяся такимъ образомъ неравенства*;

10) *опредѣлить, какія цѣлыя числа удовлетворяютъ рѣшеніямъ послѣднихъ, и*

11) *подставляя эти числа въ формулы общаго рѣшенія, составить табличку получающихся рѣшеній, если число ихъ конечное*

Примѣры

Задача **1**.

Найти положительныя цѣлыя рѣшенія уравненія

$$15x+41y=1163$$

Рѣшеніе.

Рѣшивъ уравненіе относительно x и исключивъ изъ полученнаго выраженія цѣлыя, мы находимъ:

$$x=\frac{1163-41y}{15}=77-3y+\frac{8+4y}{15}=77-3y+4\,.\,\frac{2+y}{15}.$$

Частное $\frac{2+y}{15}$ при $y=-2$ превращается въ 0, при значеніи же $y=13$, которое на коэффиціентъ при x, т. е. на 15 больше, это частное превращается въ 1. Въ послѣднемъ случаѣ $x=42$. Отдавая предпочтеніе этимъ послѣднимъ значеніямъ неизвѣстныхъ, мы получаемъ наилучшій видъ общаго рѣшенія даннаго уравненія:

$$x=42-41n$$
$$y=13+15n.$$

Рѣшенія будутъ положительны, если

$$\begin{cases} 42-41n>0 \\ 13+15n>0, \end{cases}$$

значитъ, если

$$1\frac{1}{41}>n>-\frac{13}{15}.$$

слѣдовательно, при $n=0$ и при $n=1$.

Слѣдующею табличкою, содержащею оба рѣшенія уравненія, указывается и вычисленіе ихъ:

n	0	1
$x=$	42	1
$y=$	13	28

Задача 2.

Найти положительныя цѣлыя рѣшенія уравненія

$$16x-21y=35.$$

Рѣшеніе

Рѣшая уравненіе относительно x и исключая изъ полученнаго выраженія цѣлыя, мы находимъ:

$$x=\frac{35+21y}{16}=2+y+\frac{3+5y}{16}.$$

Полагая

$$\frac{3+5y}{16}=a,$$

мы имѣемъ:

$$5y=16a-3$$
$$y=\frac{16a-3}{5}=3a+\frac{a-3}{5}.$$

При $a=3$ частное $\frac{a-3}{5}$ превращается въ 0. Въ этомъ случаѣ

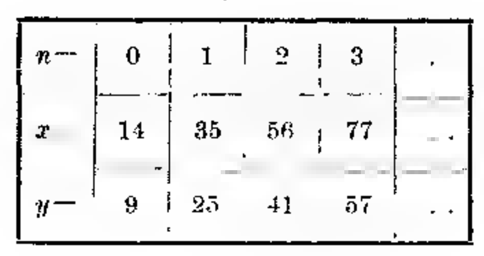
$$y=9$$
$$x=14.$$

Слѣдовательно, въ общемъ видѣ рѣшеніе можетъ быть изображено формулами:

$$x=14+21n$$
$$y=9+16n.$$

И безъ рѣшенія неравенствъ видно, что наименьшее n, дающее положительныя цѣлыя рѣшенія, есть $n=0$, что, слѣдовательно, эти формулы представляютъ наилучшій видъ общаго рѣшенія.

Изъ безконечнаго числа рѣшеній приводимъ первыя въ слѣдующей табличкѣ:



n —	0	1	2	3	.
x	14	35	56	77	. .
y —	9	25	41	57	. .

Задача **3**

Рѣшить въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$9x+11y=70$$

Рѣшеніе.

$$x=\frac{70-11y}{9}=8-y+\frac{-2-2y}{9}=8-y-2\cdot\frac{1+y}{9}$$

При $y=-1$ частное $\frac{1+y}{9}$ превращается въ 0. Въ этомъ случаѣ $x=9$.

Слѣдовательно, общее рѣшеніе уравненія можетъ быть представлено въ видѣ:

$$x=9-11n$$
$$y=-1+9n.$$

Рѣшенія будутъ положительныя при условіи, что

$$\begin{cases} 9-11n>0 \\ -1+9n>0, \end{cases}$$

слѣдовательно, если

$$\frac{9}{11}>n>\frac{1}{9}.$$

Но такъ какъ между числами $\frac{9}{11}$ и $\frac{1}{9}$ цѣлыхъ чиселъ нѣтъ вовсе, то значитъ вообще не существуетъ положительныхъ цѣлыхъ значеній неизвѣстныхъ, которыя бы удовлетворяли данному уравненію.

Задача **4.**

Рѣшить въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ уравненіе.

$$51x-34y=25$$

Рѣшеніе.

Такъ какъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ суть кратныя числа 17, не содержащагося въ 25, то, по теоремѣ **196**, данное уравненіе не только положительныхъ цѣлыхъ, но и вообще цѣлыхъ рѣшеній не имѣетъ.

Задача 5.

Найти положительныя цѣлыя рѣшенія уравненія

$$19x-14y=0.$$

Рѣшеніе.

Какъ разъяснено было въ § 601, общій видъ рѣшенія долженъ быть:

$$x=14n$$
$$y=19n.$$

Изъ безконечно большого числа рѣшеній приводимъ первыя:

$n=$	1	2	3	...
$x=$	14	28	42	...
$y=$	19	38	57	...

Задача **6**

Изъ двухъ чиселъ одно дѣлится безъ остатка на 7, другое на 9 Получающіяся при этомъ частныя вмѣстѣ составляютъ 5. Найти эти числа.

Рѣшеніе

Искомыя числа назовемъ x и y. Въ такомъ случаѣ условіе задачи выразится уравненіемъ

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{9}=5$$

Но вмѣсто того, чтобы, уничтоживъ знаменателей, рѣшать уравненіе обычнымъ порядкомъ, мы можемъ скорѣе достигнуть цѣли, разсуждая слѣдующимъ образомъ:

Всякое число, дѣлящееся безъ остатка на 7, имѣетъ видъ $7m$, всякое же число, дѣлящееся на 9, видъ $9n$, гдѣ m и n означаютъ произвольныя цѣлыя числа. Полагая поэтому

$$x=7m$$
$$y=9n$$

и подставивъ эти выраженія въ уравненіе, выражающее условія задачи, мы получаемъ:

$$m+n=5,$$

откуда

$$m=5-n,$$

слѣдовательно,

$$x=7(5-n)$$
$$y=9n,$$

гдѣ n по смыслу задачи можетъ быть только 1, 2, 3 или 4

Такимъ образомъ, получаются слѣдующія рѣшенія задачи:

n	1	2	3	4
$x=$	28	21	14	7
$y=$	9	18	27	36

§ 607. **Неопредѣленное уравненіе съ нѣсколькими неизвѣстными.** Если дано одно уравненіе съ нѣсколькими неизвѣстными и есть среди нихъ такое, у котораго коэффиціентъ равенъ 1, то цѣлыя рѣшенія уравненія получатся при всѣхъ, какихъ бы то ни было, цѣлыхъ значеніяхъ остальныхъ неизвѣстныхъ, послѣдними же опредѣляется значеніе перваго неизвѣстнаго.

Если же ни у одного неизвѣстнаго нѣтъ коэффиціента 1, то можетъ быть выведено уравненіе, имѣющее этотъ коэффиціентъ предъ однимъ изъ неизвѣстныхъ, при помощи тѣхъ же пріемовъ, посредствомъ которыхъ рѣшеніе уравненія съ 2 неизвѣстными нами сводилось къ рѣшенію уравненія, въ которомъ коэффиціентъ предъ однимъ изъ неизвѣстныхъ равенъ 1.

Такимъ образомъ можетъ быть получено **общее рѣшеніе уравненія**, въ которомъ **буквъ, означающихъ произвольныя цѣлыя числа**, будетъ **на одну меньше, чѣмъ неизвѣстныхъ**.

Имѣя это общее рѣшеніе, мы можемъ найти и положительныя цѣлыя значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія данному уравненію.

Примѣры.

Задача 1.

Рѣшить въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$5x+7y+8z=41.$$

Рѣшеніе.

Рѣшивъ уравненіе относительно x, исключимъ въ полученномъ выраженіи цѣлыя:

$$x=\frac{41-7y-8z}{5}=8-y-z+\frac{1-2y-3z}{5}.$$

Обозначивъ послѣднее частное буквою a, рѣшимъ такимъ же образомъ уравненіе

$$\frac{1-2y-3z}{5}=a$$

относительно y:

$$y=\frac{1-5a-3z}{2}=-2a-z+\frac{1-a-z}{2}.$$

Обозначивъ частное $\frac{1-a-z}{2}$ буквою b, мы находимъ

$$z=1-a-2b.$$

посредствомъ же соотвѣтствующихъ подстановокъ:

$$y=-1-a+3b$$
$$x=8+3a-b.$$

Послѣднія три формулы и составляютъ общее рѣшеніе даннаго уравненія.

Условія, при которыхъ эти формулы будутъ означать положительныя числа, выражаются системою неравенствъ:

$$\begin{cases} 1-a-2b>0 \\ -1-a+3b>0 \\ 8+3a-b>0. \end{cases}$$

Умноживъ первое изъ этихъ неравенствъ на 3 и сложивъ получившееся такимъ образомъ неравенство съ третьимъ, мы находимъ

$$11-7b>0,$$

а отсюда

$$b<1\frac{4}{7}.$$

Сложивъ же умноженное на 3 второе неравенство съ третьимъ, мы получаемъ

$$5+8b>0,$$

откуда

$$b > -\frac{5}{8}.$$

Такъ мы узнали, что для названной цѣли a должно удовлетворять условіямъ:

$$-1\frac{4}{7} > b > \quad \frac{5}{8}.$$

Единственныя цѣлыя числа, удовлетворяющія этимъ условіямъ, суть 0 и 1.

Подставивъ это значеніе вмѣсто b во всѣ неравенства системы, мы находимъ:

$$\begin{cases} 1-a>0 \\ 1 \quad a>0 \\ 8-3a>0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 1-a>0 \\ 2 \quad a>0 \\ 7+3a>0, \end{cases}$$

откуда

$$-1 > a > -2\frac{1}{3}.$$

Слѣдовательно, для того, чтобы рѣшенія были положительныя цѣлыя, нужно взять

$$a = -2, \quad b = 0$$

или

$$a = -2, \quad b = 1,$$

такъ что результатъ можетъ быть выраженъ такою табличкою:

$a =$	-2	-2
b	0	1
$x =$	2	1
$y =$	1	4
$z =$	3	1

Задача 2.

Рѣшить въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$15x \quad 20y + 25z \quad 10u \quad -87.$$

Рѣшеніе.

Уравненіе это не допускаетъ никакихъ цѣлыхъ рѣшеній, такъ какъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ всѣ кратныя числа 5, которое въ 87 не содержится [теорема **196**[a]].

§ 608. **Рѣшеніе неопредѣленной системы уравненій въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ.** По теоремѣ **158** система будетъ неопредѣленная, если въ ней неизвѣстныхъ больше, чѣмъ уравненій Изъ разсужденій же въ главахъ VII и VIII этой части намъ должно быть ясно, что изъ системы n независимыхъ другъ отъ друга уравненій могутъ быть исключены $(n-1)$ неизвѣстныхъ. Если, слѣдовательно, система дана неопредѣленная и въ ней $(n+p)$ неизвѣстныхъ, то по исключеніи названныхъ $(n-1)$ неизвѣстныхъ должно получиться одно уравненіе съ $(p+1)$ неизвѣстными. Найдя способомъ, изложеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ общее рѣшеніе этого послѣдняго, мы для полученія значеній и исключенныхъ неизвѣстныхъ должны будемъ формулы названнаго общаго рѣшенія подставить въ одно изъ уравненій той системы 2 уравненій, изъ которой было получено упомянутое уравненіе съ $(p+1)$ неизвѣстными.

Вообще и здѣсь должна производиться такая же подстановка въ системы, получавшіяся постепенно при исключеніи неизвѣстныхъ, какая бываетъ нужна и при рѣшеніи опредѣленной системы. Только здѣсь каждая такая подстановка даетъ новое неопредѣленное уравненіе, содержащее буквы, означающія произвольныя числа въ общихъ рѣшеніяхъ, и кромѣ того одно изъ первоначальныхъ неизвѣстныхъ. Каждое такое неопредѣленное уравненіе должно быть рѣшено, при чемъ первоначальныя произвольныя величины замѣняются все новыми.

Произведя всѣ упомянутаго рода подстановки и рѣшивъ всѣ упомянутаго рода неопредѣленныя уравненія, мы въ концѣ концовъ получимъ общее рѣшеніе всей системы. Въ какихъ случаяхъ формулы этого рѣшенія будутъ означать положительныя числа, это узнается, какъ это само собою разумѣется, путемъ рѣшенія неравенствъ подобно тому, какъ это уже было показано.

Примѣры.

Задача **1.**

Рѣшить въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ систему уравненій:

$$\begin{cases} 2x-5y+6z=48 \\ 11x+8y-3z=155. \end{cases}$$

Рѣшеніе.

Сложивъ первое изъ этихъ уравненій со вторымъ, умноженнымъ предварительно на 2, мы получаемъ:

$$24x+11y=358$$

Для этого уравненія получается обычнымъ порядкомъ общее рѣшеніе:

$$x=3+11m$$
$$y=26-24m.$$

Подставивъ эти выраженія вмѣсто x и y въ первое уравненіе данной системы, мы находимъ:

$$71m+3z=86$$

(То же самое уравненіе получается и при подстановкѣ этихъ выраженій во второе уравненіе, но послѣднее для этого неудобнѣе, такъ какъ въ немъ больше и коэффиціенты и свободный членъ). Изъ послѣдняго уравненія видно что z будетъ цѣлымъ числомъ не при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ m; а при какихъ именно, это показываетъ общее рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія

$$71m+3z=86.$$

гласящее:

$$z=5+71n$$
$$m=1-3n.$$

Подставивъ послѣднее выраженіе вмѣсто m въ выраженія для x и y, мы получаемъ общій видъ цѣлыхъ чиселъ, удовлетворяющихъ данной системѣ:

$$x=14-33n$$
$$y=2+72n$$
$z=5+71n$ (выраженіе для z здѣсь только повторяется).

Изъ этихъ формулъ получается при $n=0$ положительное цѣлое рѣшеніе, оказывающееся единственнымъ возможнымъ рѣшеніемъ такого рода, какъ это могло бы быть обнаружено при помощи неравенствъ, но видно въ данномъ случаѣ сейчасъ же и безъ нихъ.

Задача 2.

Найти положительныя цѣлыя значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія системѣ уравненій:

$$\begin{cases} 8x-5y+3z=19 \\ 4x+3y-5z=-1. \end{cases}$$

Рѣшеніе.

Вычтя изъ перваго уравненія второе, умноженное предварительно на 2, мы получаемъ уравненіе

$$-11y+13z=21,$$

общее рѣшенiе котораго есть:

$$y=4+13n$$
$$z=5+11n.$$

Подставивъ эти выраженiя во второе уравненiе данной системы, мы находимъ послѣ приведенiя:

$$4x-16n=12,$$

откуда

$$x-4n=3.$$

(Если бы мы эти выраженiя подставили въ первое уравненiе, то получили бы

$$8x-32n=24,$$

а отсюда также

$$x-4n=3).$$

Такъ какъ въ этомъ уравненiи коэффицiентъ при x случайно оказался равнымъ 1, то x будетъ цѣлое число при всякомъ цѣломъ значенiи n и выражается формулою

$$x=3+4n.$$

Приведенныя формулы для неизвѣстныхъ составляютъ общее рѣшенiе данной системы. При $n=0$ получаются наименьшiя положительныя цѣлыя числа, удовлетворяющiя ей. Но вообще она допускаетъ безконечно много положительныхъ цѣлыхъ рѣшенiй: всякое положительное цѣлое n даетъ такое рѣшенiе

ЧАСТЬ III.

Дополненія и примѣненія.

А. Прогрессіи и ихъ примѣненія.

ГЛАВА I.

Ариѳметическая прогрессія.

§ 609. **Понятіе о рядѣ.**

Опредѣленіе. Рядомъ называется послѣдователь- **198**
ность чиселъ, изъ которыхъ каждое образовано изъ предыдущаго по одному и тому же закону. Числа же эти называются членами ряда.

Такъ, напр., ряды суть слѣдующія 3 послѣдовательности чиселъ, каждая изъ которыхъ содержитъ n членовъ:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n};$$

$$1\,.\,2,\ 2\,.\,3,\ 3\,.\,4,\ \ldots,\ (n-2)(n-1),\ (n-1)n,\ n(n+1);$$

$$\frac{0}{\sqrt{1}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ +\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{3}{\sqrt{7}},\ +\frac{4}{\sqrt{9}},\ \ldots,\ (-1)^{n-1}\,.\,\frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}.$$

Важнѣйшая изъ задачъ, относящихся къ рядамъ, есть нахожденіе суммы опредѣленнаго количества членовъ даннаго ряда, такъ называемое суммированіе рядовъ, почему очень часто подъ рядомъ понимаютъ также выраженіе, представляющее сумму членовъ ряда. Такъ, напр., ряды будутъ и слѣдующія суммы членовъ приведенныхъ выше послѣдовательностей:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n};$$

$$1\,.\,2+2\,.\,3+3\,.\,4+\ldots+(n-2)(n-1)+(n-1)n+n(n+1);$$

$$\frac{0}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{4}{\sqrt{9}}-\ldots+(-1)^{n-1}\,.\,\frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}.$$

Изъ рядовъ мы будемъ разсматривать только такъ называемыя прогрессіи: **ариѳметическую** и геометрическую.

§ 610. **Ариѳметическая прогрессія.**

199 **Опредѣленіе.** Ариѳметическою прогрессіею называется рядъ, въ которомъ каждый членъ образуется чрезъ прибавленіе къ предыдущему одного и того же числа.

Послѣднее называется разностью ариѳметической прогрессіи, потому что можетъ быть найдено чрезъ вычитаніе любого ея члена изъ слѣдующаго.

Ариѳметическая прогрессія называется *возрастающею* или *убывающею*, смотря по тому, положительное ли число ея разность или отрицательное.

Примѣры ариѳметическихъ прогрессій:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15.\ 19,\ 23,\ 27,\ 31;$$
$$20.\ 13,\ 6,\ -1,\ -8,\ -15.$$

Въ первой изъ нихъ разность $+4$, она возрастающая; во второй разность -7, она убывающая.

Чтобы обратить вниманіе на то, что данный рядъ чиселъ составляетъ ариѳметическую прогрессію, иногда ставятъ предъ нимъ знакъ $\div$. Такъ, напр., пишутъ:

$$\div\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ 1\frac{1}{6}.$$

§ 611. **Общій видъ ариѳметической прогрессіи.** Если мы первый членъ такой прогрессіи обозначимъ буквою a, а разность ея буквою d, то второй членъ ея долженъ быть $a+d$, третій $a+2d$, слѣдовательно, n-вый $a+(n-1)d$, а предшествующій ему $a+(n-2)d$. Поэтому общій видъ ариѳметической прогрессіи, состоящей изъ n членовъ, можетъ быть изображенъ такъ:

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-2)d, a+(n-1)d.$$

§ 612. **Послѣдній членъ и общій видъ любого члена ариѳметической прогрессіи.** Если мы послѣдній членъ послѣдней прогрессіи обозначимъ буквою t, то имѣемъ:

$$t = a+(n-1)d \qquad (A).$$

По этой формулѣ можетъ быть вычисленъ послѣдній членъ любой ариѳметической прогрессіи.

Но полагая въ выраженіи для t букву n равною 1, 2, 3 и т. д., мы можемъ вычислить также по этой формулѣ первый, второй, третій и т. д. членъ ариѳметической прогрессіи и можемъ, слѣдовательно, найти каждый указанный членъ ея.

Поэтому формула A есть также о б щ і й в и д ъ л ю б о г о ч л е н а ариѳметической прогрессіи.

§ 613. **Правило вычисленія любого члена ариѳметической прогрессіи.** Правило это, выражаемое въ самомъ ясномъ и сжатомъ видѣ формулою A, принято передавать еще словами. Въ силу этого обычая формулируемъ это правило въ видѣ теоремы, которую докажемъ способомъ заключенія отъ n къ $n+1$ ради упражненія въ этомъ пріемѣ.

Теорема. В с я к і й ч л е н ъ а р и ѳ м е т и ч е с к о й п р о- 200
г р е с с і и р а в е н ъ п е р в о м у ч л е н у е я, с л о ж е н н о м у с ъ п р о и з в е д е н і е м ъ е я р а з н о с т и н а ч и с л о п р е д- ш е с т в у ю щ и х ъ ч л е н о в ъ

Док. Обозначивъ n-ый и $(n+1)$-ый члены прогрессіи u_n и u_{n+1}, допустимъ, что правило вычисленія любого члена ея правильно для n-аго члена, т. е., что для вычисленія n-аго члена нужно разность ея d умножить на число предшествующихъ членовъ $(n-1)$ и полученное произведеніе $(n-1)d$ прибавить къ первому члену a; другими словами, допустимъ, что правильна формула

$$u_n=a+(n-1)d.$$

По опредѣленію ариѳметической прогрессіи $(n+1)$-ый членъ долженъ быть на d больше, чѣмъ n-ый, значитъ должно быть

$$u_{n+1}=u_n+d=a+(n-1)d+d=a+nd-d+d,$$

то есть,

$$u_{n+1}=a+nd.$$

Такъ какъ $(n+1)$-ому члену предшествуетъ n членовъ, то послѣдняя формула выражаетъ, что и для вычисленія $(n+1)$-аго члена должно къ первому члену прибавить произведеніе разности прогрессіи на число предшествующихъ членовъ.

Мы доказали такимъ образомъ, что теорема справедлива для вычисленія $(n+1)$ члена, если она справедлива для вычисленія n-аго члена. Но правило, выражаемое ею, правильно для второго члена $a+d$ и третьяго $a+2d$. Слѣдовательно, оно правильно и для 4-го члена, будучи же правильнымъ для 4-аго, оно должно быть правильнымъ и для 5-аго, и т. д. безъ конца, т. е. для всякаго члена; что и требовалось доказать.

§ 614. **Общій видъ любого члена ариѳметической прогрессіи, написанной въ обратномъ порядкѣ.** Рѣшивъ уравненіе A (§ 612) относительно a, мы находимъ

$$a=l-(n-1)d.$$

По этой формулѣ можетъ быть вычисленъ первый членъ ариѳметической прогрессіи, если даны ея послѣдній членъ, ея разность и число

членовъ ея. Но въ то же время она выражаетъ любой членъ этой прогрессіи, читаемой или написанной въ обратномъ порядкѣ, такъ какъ такимъ именно выраженіемъ и должно изобразить общій видъ любого члена такой прогрессіи. Въ самомъ дѣлѣ, если написать такимъ образомъ прогрессію, то прежній послѣдній членъ сдѣлается первымъ и прогрессія изъ возрастающей превратится въ убывающую, а изъ убывающей въ возрастающую, такъ что знакъ разности перемѣнится.

Полагая въ формулѣ для a букву n равною 1, 2, 3 и т. д., мы получимъ члены прогрессіи, написанной сказаннымъ образомъ въ обратномъ порядкѣ:

$$t,\ t-d,\ t-2d,\ \ldots,\ t-(n-2)d,\ t-(n-1)d,$$

при чемъ само собою разумѣется, что буква t означаетъ то же число, что и формула $a+(n-1)d$, формула $t-d$ то же число, что и формула $a+(n-2)d$ и т. д.

§ 615. **Сумма двухъ членовъ, равно отстоящихъ отъ крайнихъ.** Сумма перваго и послѣдняго членовъ ариѳметической прогрессіи можетъ быть выражена формулою $a+t$. Какъ разъяснено было въ предыдущемъ параграфѣ, предпослѣдній членъ можно выразить формулою $t-d$, второй же равенъ $a+d$. Если мы сложимъ третій членъ $a+2d$ съ третьимъ отъ конца $t-2d$, то оказывается, что опять сумма равна той же величинѣ $a+t$.

То, что мы обнаруживаемъ такимъ образомъ, можетъ быть формулировано и въ общемъ видѣ доказано слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Сумма каждыхъ двухъ членовъ ариѳметической прогрессіи, равно отстоящихъ отъ концовъ ея, равна суммѣ крайнихъ членовъ ея.

Док. Пользуясь разъясненіями предыдущаго параграфа, мы k-й отъ конца членъ ариѳметической прогрессіи можемъ выразить формулою $t-(k-1)d$; k-й же членъ прогрессіи равенъ $a+(k-1)d$. Вычисляя сумму этихъ членовъ, мы находимъ:

$$a+(k-1)d+t-(k-1)d=a+t,$$

чѣмъ и доказана справедливость теоремы.

§ 616. **Сумма ариѳметической прогрессіи.** Если требуется вычислить сумму 2, 3, 4 и т. д. членовъ ариѳметической прогрессіи, то можно для этого случая считать прогрессію кончающеюся на 2-мъ, 3-емъ, 4-мъ и т. д. членѣ и этотъ членъ называть въ этомъ смыслѣ послѣднимъ. Равнымъ образомъ мы можемъ также любой членъ прогрессіи считать за первый, не допуская только, конечно, несообразности, чтобы первый слѣдовалъ по порядку послѣ послѣдняго. На основаніи такого соглашенія и называя первый и послѣдній членъ крайними, мы можемъ правило вычисленія любого числа членовъ ариѳметической прогрессіи, слѣдующихъ непосредственно одинъ послѣ другого, выразить такъ:

Теорема. Сумма членовъ ариөметической прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ членовъ ея, умноженной на число всѣхъ членовъ. **201**

Предп. a—первый членъ ариөметической прогрессіи,
t послѣдній членъ ея,
n —число членовъ ея,
s —сумма этихъ членовъ.

Утв. $s=n\cdot\frac{a+t}{2}$.

Док. Обозначивъ буквою d разность прогрессіи, мы на основаніи разъясненій въ §§ 613 и 614 сумму членовъ прогрессіи можемъ изобразить двоякимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} s&=a+[a+d]+[a+2d]+\ldots+[a+(n-2)d]+[a+(n-1)d]\\ \text{и } s&=t+[t-d]+[t-2d]+\ldots+[t-(n-2)d]+[t-(n-1)d]\\ \hline 2s&=\underbrace{(a+t)+(a+t)+(a+t)+\ldots+(a+t)+(a+t)}_{\text{всего } n \text{ слагаемыхъ } (a+t)}\end{aligned}\right\}$$

Сложивъ эти два равенства, мы, по теор. VII и согласно съ предыдущею теоремою, находимъ:

или $2s=n(a+t)$,

откуда, какъ и требовалось доказать,

$$s=\frac{n(a+t)}{2}=n\cdot\frac{a+t}{2} \qquad (B)$$

§ 617. **Другая формула для суммы ариөметической прогрессіи.** Замѣнивъ въ выведенной только-что формулѣ

$$s=n\cdot\frac{a+t}{2}$$

букву t выраженіемъ A [§ 612], мы получимъ формулу для суммы

$$s=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]. \qquad (C),$$

которую также полезно запомнить.

§ 618. **Число данныхъ, опредѣляющихъ ариөметическую прогрессію.** Изъ уравненій A, B и C, приведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, каждыя два составляютъ систему независимыхъ другъ отъ друга уравненій. Если поэтому изъ встрѣчающихся въ нихъ 5 величинъ 3 будутъ даны, то

такая система двухъ уравненій будетъ опредѣленная, изъ которой могутъ быть найдены остальныя двѣ неизвѣстныя величины.

Примѣры.

Задача 1

Найти сумму всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 1000.

Рѣшеніе.

Натуральный рядъ чиселъ представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, которой первый членъ 1 и равность 1. Въ данномъ случаѣ послѣдній членъ этой прогрессіи равенъ 1000, число членовъ ея также равно 1000. Поэтому мы по формулѣ B имѣемъ:

$$s=\frac{1000(1+1000)}{2}=500\ .\ 1001$$

$$=500500.$$

Задача 2

Найти сумму n первыхъ чиселъ натуральнаго ряда.

Рѣшеніе.

Разсуждая, какъ при рѣшеніи предыдущей задачи, и примѣняя ту же, какъ и тамъ, теорему, мы для искомой суммы находимъ формулу:

$$s=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача 3.

Найти сумму n первыхъ нечетныхъ чиселъ.

Рѣшеніе.

Нечетныя числа составляютъ ариѳметическую прогрессію, которой разность равна 2. Слѣдовательно, по формулѣ C, искомая сумма будетъ:

$$s=\frac{n}{2}[2\ .\ 1+(n-1)\ .\ 2]=\frac{n\ .\ 2n}{2}=n^2.$$

Задача 4

Найти, сумма сколькихъ членовъ ариѳметической прогрессіи составляетъ 110, если ея первый членъ 16, а разность 3.

Рѣшеніе.

Обозначивъ искомое число членовъ прогрессіи буквою x, мы по формулѣ C имѣемъ:

$$110=\frac{x}{2}[2\ .\ 16+(x-1)\ \ 3].$$

Упростивъ это уравненіе, мы находимъ:

$$3x^2-29x-220=0$$

а отсюда

$$x_1=5\ ;\ x_2=-\frac{44}{3}.$$

Такъ какъ число членовъ прогрессіи можетъ быть только цѣлое, то второй корень уравненія не даетъ рѣшенія задачи.

Отвѣтъ.

Сумма 5 членовъ данной ариѳметической прогрессіи равна данному въ задачѣ числу 110.

З а д а ч а 5.

Зная послѣдній членъ t и разность d ариѳметической прогрессіи и сумму членовъ ея s, найти число членовъ ея и первый членъ.

Рѣшеніе.

Искомое число членовъ обозначимъ буквою n, искомый первый членъ буквою a, т. е оба неизвѣстныя тѣми же буквами, которыми эти величины обозначены въ формулахъ A, B и С. Эти неизвѣстныя опредѣлены системою уравненій:

$$t=a+(n-1)d$$
$$s=\frac{n(a+t)}{2}.$$

Ее рѣшить удобнѣе всего, начавъ со слѣдующаго преобразованія уравненій:

$$\begin{cases} t-a=(n-1)d \\ t+a=\frac{2s}{n}. \end{cases}$$

Сложивъ эти послѣдніяя мы находимъ уравненіе:

$$2t=(n-1)d+\frac{2s}{n},$$

содержащее только одно неизвѣстное n. Рѣшая его относительно этого неизвѣстнаго, мы получаемъ:

$$2tn-dn^2-dn+2s$$
$$dn^2-(2t+d)n+2s=0$$
$$n=\frac{2t+d\pm\sqrt{(2t+d)^2-8sd}}{2d}.$$

Послѣ же подстановки этого выраженія вмѣсто n въ первое уравненіе рѣшаемой системы и послѣ упрощенія мы находимъ:

$$a=\frac{d\mp\sqrt{(2t+d)^2-8sd}}{2}.$$

ГЛАВА II.

Геометрическая прогрессія.



§ 619. **Опредѣленіе.** *Геометрическою прогрессіею называется рядъ, въ которомъ каждый членъ образуется чрезъ умноженіе предыдущаго на одно и то же число.*

Послѣднее называется *знаменателемъ* геометрической прогрессіи. Изъ опредѣленія его слѣдуетъ, что онъ можетъ быть найденъ чрезъ дѣленіе любого члена прогрессіи на предыдущій.

Геометрическая прогрессія называется *возрастающею* или *убывающею*, смотря по тому, больше ли 1 или меньше 1 абсолютное значеніе знаменателя ея.

Примѣры геометрическихъ прогрессій:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ 384;$$
$$1,\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4\sqrt{2}},\ \frac{1}{8}.$$

Въ первой изъ нихъ знаменатель 2, она возрастающая; во второй знаменатель $\frac{1}{\sqrt{2}}$, она убывающая.

Чтобы обратить вниманіе на то, что данный рядъ чиселъ составляетъ

геометрическую прогрессію, иногда ставятъ предъ нимъ знакъ $\div\div$. Такъ, напр., пишутъ:

$$\div\div +1, -\frac{2}{3}, +\frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, +\frac{16}{81}.$$

§ 620. **Общій видъ геометрической прогрессіи.** Если мы первый членъ такой прогрессіи обозначимъ буквою a, а знаменателя ея буквою q, то второй членъ ея долженъ быть aq, третій aq^2, слѣдовательно, n-й aq^{n-1}, а предшествующій ему aq^{n-2}. Поэтому общій видъ геометрической прогрессіи, состоящій изъ n членовъ, можетъ быть изображенъ такъ:

$$\div\div a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-2}, aq^{n-1}.$$

§ 621. **Послѣдній членъ и общій видъ любого члена геометрической прогрессіи.** Если мы послѣдній членъ послѣдней прогрессіи обозначимъ буквою t, то имѣемъ:

$$t=aq^{n-1} \qquad (D)$$

По этой формулѣ можетъ быть вычисленъ не только послѣдній членъ геометрической прогрессіи, но и каждый другой указанный, какъ по соотвѣтствующей формулѣ (A) для ариѳметической прогрессіи Поэтому формула D есть также общій видъ любого члена геометрической прогрессіи.

§ 622. **Правило вычисленія любого члена геометрической прогрессіи.** Выраженное формулою D въ предыдущемъ параграфѣ правило это переведемъ на слова и докажемъ такимъ же образомъ, какъ мы это сдѣлали съ соотвѣтствующимъ правиломъ для ариѳметической прогрессіи:

Теорема. Всякій членъ геометрической прогрессіи равенъ первому члену ея, умноженному на степень, которой основаніе есть знаменатель прогрессіи, а показатель равенъ числу предшествующихъ членовъ. 

Док. Обозначивъ n-й и $(n+1)$-й члены прогрессіи u_n и u_{n+1}, допустимъ, что теорема справедлива для n-аго члена, т. е., что для вычисленія n-аго члена нужно найти значеніе степени, которой основаніе есть знаменатель прогрессіи q, а показатель равенъ числу $(n-1)$ предшествующихъ членовъ, и эту степень q^{n-1} умножить на первый членъ a; другими словами, допустимъ, что правильна формула

$$u_n=aq^{n-1}.$$

По опредѣленію геометрической прогрессіи $(n+1)$-й членъ ея вычисляется чрезъ умноженіе n-аго члена на знаменателя q. Значитъ должно быть

$$u_{n+1}=u_n q$$
$$=aq^{n-1}\cdot q,$$

то есть

$$u_{n+1}=aq^n.$$

Такъ какъ $(n+1)$-ому члену предшествуетъ n членовъ, то послѣдняя формула выражаетъ, что и для вычисленія $(n+1)$-аго члена должно найти значеніе степени, которой основаніе есть знаменатель прогрессіи, а показатель равенъ числу предшествующихъ членовъ, и эту степень умножить на первый членъ. Мы доказали такимъ образомъ, что правило, выражаемое теоремою, правильно для вычисленія $(n+1)$-аго члена, если оно правильно для вычисленія n-аго. Но примѣняя его, мы совершенно правильно получаемъ второй членъ aq и третій aq^2. Слѣдовательно, оно правильно и для 4-аго члена, будучи же правильнымъ для 4-аго, оно должно быть правильнымъ и для 5-аго, и т. д. безъ конца, т. е. для всякаго члена. А это и требовалось доказать.

§ 623. **Общій видъ любого члена геометрической прогрессіи, написанной въ обратномъ порядкѣ.** Рѣшивъ уравненіе D [§ 621] относительно a, мы находимъ:

$$a=\frac{t}{q^{n-1}}.$$

Разсуждая такъ же, какъ въ § 614, мы приходимъ къ выводу, что полученная формула не только можетъ служить для вычисленія перваго члена геометрической прогрессіи по даннымъ послѣднему члену, знаменателю и числу членовъ ея, но выражаетъ также любой (n-ый) членъ этой прогрессіи, читаемой или написанной въ обратномъ порядкѣ.

§ 624. **Произведеніе двухъ членовъ, равно отстоящихъ отъ крайнихъ.** Произведеніе перваго члена геометрической прогрессіи на послѣдній можетъ быть выражено формулою at. По формулѣ, выведенной въ предыдущемъ параграфѣ, предпослѣдній членъ долженъ быть $\frac{t}{q}$, второй же равенъ aq.

Слѣдовательно, произведеніе и этихъ двухъ членовъ равно at. Если мы умножимъ третій членъ aq^2 на третій отъ конца $\frac{t}{q^2}$, то оказывается, что опять произведеніе равно той же величинѣ at.

То, что мы обнаруживаемъ такимъ образомъ, можетъ быть выражено и въ общемъ видѣ доказано слѣдующимъ образомъ

Теорема. Произведеніе каждыхъ двухъ членовъ геометрической прогрессіи, равно отстоящихъ отъ концовъ ея, равно произведенію крайнихъ членовъ ея.

Док. Пользуясь разъясненіями предыдущаго параграфа, мы k-ый отъ конца членъ геометрической прогрессіи можемъ выразить формулою $\frac{t}{q^{k-1}}$; k-ый же членъ прогрессіи равенъ aq^{k-1}. Вычисляя произведеніе этихъ членовъ, мы находимъ:

$$aq^{k-1}\,\frac{t}{q^{k-1}}=at,$$

чѣмъ и доказана справедливость теоремы.

§ 625. **Произведеніе всѣхъ членовъ геометрической прогрессіи.** Какъ теорема 201 слѣдовала изъ предшествующей ей, такъ изъ теоремы, доказанной въ послѣднемъ параграфѣ, вытекаетъ слѣдующая:

Теорема. Произведеніе членовъ геометрической прогрессіи равно степени, которой основаніе равно произведенію крайнихъ членовъ, а показатель половинѣ числа всѣхъ членовъ.

Предп. a—первый членъ геометрической прогрессіи,
t—послѣдній членъ ея,
n—число членовъ ея,
p—произведеніе этихъ членовъ.

Утв. $p=(at)^{\frac{n}{2}}$.

Док. Обозначивъ буквою q знаменателя прогрессіи, мы на основаніи разъясненій въ §§ 621 и 623 произведеніе членовъ прогрессіи можемъ изобразить двоякимъ образомъ:

$$p=a\,.\,aq\,.\,aq^2\,.\,\ldots\,.\,aq^{n-2}\,.\,aq^{n-1}$$
$$p=t\,.\,\frac{t}{q}\,.\,\frac{t}{q^2}\,.\,\ldots\,.\,\frac{t}{q^{n-2}}\,.\,\frac{t}{q^{n-1}}$$
$$p^2=\underbrace{at\,.\,at\,.\,at\,.\,\ldots\,.\,at\,.\,at}_{\text{всего } n \text{ сомножителей } at}$$

Умноживъ эти два равенства другъ на друга, мы по теор. VII и согласно съ предыдущею теоремою, находимъ:

или $p^2=(at)^n$,

откуда, какъ и требовалось доказать,

$$p=(at)^{\frac{n}{2}}.$$

Примѣчаніе.

Формулу для суммы членовъ ариѳметической прогрессіи можно писать также слѣдующимъ образомъ:

$$s=(a+t).\frac{n}{2}.$$

Сравнивъ съ этимъ видомъ ея формулу для произведенія членовъ геометрической прогрессіи, мы замѣчаемъ, что послѣдняя есть аналогія первой: повышеніе на одну ступень до слѣдующаго разряда всѣхъ прямыхъ дѣйствій, которыми соединены величины, встрѣчающіяся въ формулѣ

$$s=(a+t)\frac{n}{2}.$$

насъ приводитъ къ формулѣ

$$p=(at)^{\frac{n}{2}}.$$

§ 626. **Сумма геометрической прогрессіи.**

204 **Теорема.** Сумма членовъ геометрической прогрессіи равна разности между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменателя и первымъ членомъ, дѣленной на разность между знаменателемъ и 1.

Предп. a—первый членъ геометрической прогрессіи,
t—послѣдній членъ ея,
q—знаменатель ея,
s—сумма членовъ ея.

Утв. $s=\frac{qt-a}{q-1}$.

Док. Если мы число членовъ данной прогрессіи назовемъ n, то сумма членовъ ея будетъ:

$$s=a+aq+aq^2+aq^3+\ \dots\ +aq^{n-2}+aq^{n-1}.$$

Вычтя это уравненіе изъ получающагося изъ него чрезъ умноженіе на q слѣдующаго:

$$qs = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots + aq^{n-1} + aq^n,$$

мы находимъ:

$$(q-1)\ s = aq^n - a \qquad (\alpha)$$
$$q\ .\ aq^{n-1}\ \ a,$$

а отсюда, послѣ подстановки буквы t вмѣсто выраженія aq^{n-1} (формула D въ § 621):

$$(q-1)\ s = qt - a.$$

Раздѣливъ еще послѣднее уравненіе на $q-1$, мы и получаемъ, какъ утверждали,

$$s = \frac{qt-a}{q-1} \qquad (E).$$

§ 627. Другія формулы для суммы геометрической прогрессіи.

Послѣдней формулѣ можно также придать видъ:

$$s = \frac{a-qt}{1-q} \qquad (E'),$$

въ которомъ ею удобнѣе пользоваться въ тѣхъ случаяхъ, когда дано

$$q < 1.$$

Можно также еще для суммы членовъ геометрической прогрессіи получить изъ уравненія (α) въ предыдущемъ параграфѣ слѣдующія формулы.

$$s = \frac{a(q^n-1)}{q-1} \qquad (F)$$

или

$$s = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \qquad (F'),$$

которыя также необходимо запомнить.

§ 628. Число данныхъ, опредѣляющихъ геометрическую прогрессію. Изъ трехъ уравненій D, E (или E') и F (или F'), выведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, каждыя два составляютъ систему независимыхъ другъ

отъ друга уравненій Поэтому изъ такой системы могутъ быть найдены двѣ изъ встрѣчающихся въ нихъ 5 величинъ, если остальныя 3 даны.

Примѣры.

Задача 1

Найти сумму первыхъ 8 членовъ геометрической прогрессіи, которой пятый и седьмой члены соотвѣтственно равны 0,32 и 0,0512.

Рѣшеніе.

По теоремѣ **203** называемые въ задачѣ пятый и седьмой члены должны быть выражены формулами:

$$0{,}32 = aq^4$$
$$0{,}0512 = aq^6.$$

Раздѣливъ второе изъ этихъ уравненій на первое, мы получаемъ:

$$q^2 = 0{,}16,$$

откуда

$$q = \pm 0{,}4.$$

Подставивъ эти значенія вмѣсто q въ первое уравненіе и рѣшивъ его, мы находимъ:

$$a = +12{,}5.$$

Если же мы корни рѣшенной системы теперь подставимъ въ формулу F' (§ 627), то имѣемъ:

$$s_1 = \frac{12{,}5\,.\,(1-0{,}4^8)}{1-0{,}4} = 20{,}81968$$
$$s_2 = \frac{12{,}5\,.\,[1-(-0{,}4)^8]}{1+0{,}4} = 8{,}92272.$$

Первый отвѣтъ есть сумма членовъ геометрической прогрессіи:

∺ 12,5; 5; 2; 0,8; 0,32; 0,128; 0,0512; 0,02048;

второй отвѣтъ есть сумма членовъ прогрессіи:

∺ +12,5; —5; +2; —0,8; +0,32; —0,128; +0,0512; —0,02048.

Задача 2.

По даннымъ крайнимъ членамъ a и t и числу членовъ n геометрической прогрессіи найти сумму членовъ ея.

Рѣшеніе.

Искомая величина опредѣляется системою уравненій E и D:

$$\begin{cases} s = \dfrac{qt - a}{q - 1} \\ t = aq^{n-1}. \end{cases}$$

Опредѣливъ q изъ второго уравненія и подставивъ полученное выраженіе въ формулу для s, мы находимъ:

$$s = \frac{t\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}} - 1},$$

а послѣ расширенія на $\sqrt[n-1]{a}$ болѣе удобный видъ отвѣта:

$$s = \frac{t\sqrt[n-1]{t} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

Задача 3.

Сумма скольких членовъ геометрической прогрессіи равна s, если ея знаменатель равенъ q, а первый членъ a?

Рѣшеніе.

Искомая величина можетъ быть найдена изъ уравненія F (§ 627):

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

которое рѣшается относительно n слѣдующимъ способомъ, не нуждающимся въ объясненіи:

$$a(q^n - 1) = s(q - 1)$$

$$q^n - 1 = \frac{s(q - 1)}{a}$$

$$q^n = \frac{s(q-1)}{a} + 1$$

$$= \frac{s(q-1)+a}{a}$$

$$n \log q = \log\,[s(q-1)+a] - \log a$$

$$n = \frac{\log\,[s(q-1)+a] - \log a}{\log q}$$

§ 629. **Понятіе о перемѣнныхъ и постоянныхъ величинахъ.** Если въ какомъ-либо выраженіи значеніе одной изъ величинъ измѣняется, то измѣняется обыкновенно и значеніе всего выраженія. Такъ, напр., если въ выраженіи

$$y = \sqrt{a+bx^2}$$

измѣняется значеніе буквы x, то въ зависимости отъ этого измѣняется и значеніе всего выраженія, обозначеннаго нами буквою y. Первую изъ измѣняющихся величинъ называютъ независимою перемѣнною или аргументомъ, вторую же, т. е. измѣняющееся значеніе всего выраженія, зависимою перемѣнною или функціею первой перемѣнной. Такъ, въ приведенномъ примѣрѣ y есть функція величины x.

Въ противоположность перемѣннымъ величинамъ величины не измѣняющіяся называются постоянными.

Часто для того, чтобы сразу же видно было, какія величины въ выраженіи или въ уравненіи желаютъ разсматривать какъ перемѣнныя и какія какъ постоянныя, первыя обозначаютъ послѣдними буквами латинскаго алфавита, какъ это дѣлается для обозначенія неизвѣстныхъ величинъ, а послѣднія, если онѣ не опредѣленныя числа, первыми буквами того же алфавита, какъ это дѣлается для обозначенія извѣстныхъ величинъ.

Есть особые отдѣлы высшей математики, въ которыхъ разсматриваются и комплексныя значенія аргумента. Но обыкновенно независимую перемѣнную представляютъ себѣ измѣняющеюся отъ $-\infty$ до $+\infty$ чрезъ всѣ возможныя вещественныя значенія. Такъ и мы *аргументъ будемъ считать здѣсь всегда вещественнымъ*.

§ 630. **Понятіе о предѣлѣ.** Случается, что при не прекращающемся увеличеніи или уменьшеніи независимой перемѣнной функція ея приближается въ нѣкоторой постоянной величинѣ, такъ, что, увеличиваясь, не дѣлается больше ея, а уменьшаясь не дѣлается меньше ея, въ обоихъ случаяхъ не дѣлается и равною ей, но измѣняется такъ, что разность между нею и названною постоянною величиною можетъ быть сдѣлана по абсолютной величинѣ меньше всякаго заданнаго произвольно малаго числа. Такую постоянную величину называютъ предѣломъ функціи описаннаго свойства.

Чтобы пояснить сказанное примѣромъ, разсмотримъ слѣдующую функцію y величины x:

$$y=\frac{2+x^2}{3+x^2}.$$

Вычитая частное, обозначенное буквою y, изъ 1, мы находимъ:

$$1-\frac{2+x^2}{3+x^2}=\frac{3+x^2-2-x^2}{3+x^2}=\frac{1}{3+x^2}$$

Въ полученномъ выраженіи $\frac{1}{3+x^2}$ второй членъ въ дѣлителѣ есть квадратъ, слѣдовательно, при всякомъ значеніи перемѣнной, которая, можетъ быть, только вещественнымъ числомъ, не меньше 0. Наименьшее значеніе этого дѣлителя получается, слѣдовательно, при $x=0$, а поэтому при этомъ значеніи аргумента наибольшее значеніе частнаго $\frac{1}{3+x^2}$, значитъ и разности $1-y$. Это частное при $x=0$ равно $\frac{1}{3}$. Слѣдовательно, y отъ 1 больше, чѣмъ на $\frac{1}{3}$, отличаться не можетъ, т. е., наименьшее возможное значеніе y есть $\frac{2}{3}$.

При увеличеніи же абсолютнаго значенія x частное $\frac{1}{3+x^2}$, которое отрицательнымъ быть не можетъ, можетъ сдѣлаться меньше всякаго положительнаго числа. Если мы, напр., хотимъ, чтобы это частное было меньше $\frac{1}{m}$, гдѣ $m>0$, то достаточно x взять равнымъ $\sqrt{m}$, чтобы это было достигнуто.

Слѣдовательно, 1 есть предѣлъ разсматриваемой функціи, такъ какъ разность между 1 и ею, можетъ быть, сдѣлана по абсолютной величинѣ меньше всякаго заданнаго числа.

Тамъ мы убѣдились, что всѣ возможныя значенія функціи

$$y=\frac{2+x^2}{3+x^2}$$

заключаются между числами $\frac{2}{3}$ и 1. Первое изъ этихъ чиселъ есть наименьшее возможное значеніе ея, получающееся при $x=0$; второе есть предѣлъ, къ которому она стремится по мѣрѣ увеличенія абсолютнаго значенія x,

котораго она, однако, ни при какомъ конечномъ значеніи x не достигаетъ, какъ бы велико оно ни было по абсолютной величинѣ своей

Но вмѣсто сказаннаго относительно предѣла говорятъ также, что функція достигаетъ своего предѣла, или что значеніе ея дѣлается равнымъ ея предѣлу при $x=\pm\infty$. Сообразно же съ этимъ способомъ выражаться сказанное изображаютъ въ знакахъ такъ:

$$\text{пред.}\left(\frac{2+x^2}{3+x^2}\right)_{x=\pm\infty}=1$$

или

$$\lim\left(\frac{2+x^2}{3+x^2}\right)_{x=\pm\infty}=1,$$

при чемъ въ послѣднемъ случаѣ «lim» есть сокращеніе латинскаго слова limes (или французскаго limite), означающаго «предѣлъ» или «граница».

Разъяснивъ понятіе о предѣлѣ, одно изъ самыхъ важныхъ въ математикѣ, настолько подробно, насколько мы это здѣсь себѣ можемъ позволить, резюмируемъ главнѣйшую суть сказаннаго слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленіе. Предѣломъ перемѣнной величины называется постоянная величина, къ которой первая стремится такъ, что разность между обѣими можетъ быть по абсолютной величинѣ своей сдѣлана произвольно малою.

§ 631. **Понятіе о безконечномъ рядѣ и сходимости его.** Послѣ каждаго послѣдняго образованнаго члена всякаго ряда можно образовать еще новый и продолжать такъ безъ конца.

Опредѣленіе. Рядъ, въ которомъ мы представляемъ себѣ число членовъ продолженнымъ безъ конца, называется безконечнымъ.

Опредѣленіе. Рядъ называется сходящимся, если при безграничномъ возрастаніи числа членовъ его сумма ихъ имѣетъ все-таки конечный предѣлъ.

§ 632 **Не сходящіяся суммы прогрессій.** Изъ формулъ:

$$t=a+(n-1)d$$

и

$$s=\frac{n}{2}(a+t)$$

мы видимъ, что при увеличении n абсолютное значеніе какъ членовъ, такъ и суммы возрастаетъ и увеличивается безгранично, если безгранично увеличивается n. Слѣдовательно, сумма безконечной ариѳметической прогрессіи не можетъ быть сходящеюся.

Если въ геометрической прогрессіи $q=1$, то сумма n членовъ ея будетъ слѣдующая:

$$s=\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{\text{всего } n \text{ слагаемыхъ}}$$
$$na$$

Абсолютное значеніе послѣдняго выраженія можетъ быть, сдѣлано произвольно большимъ. Если мы, напр., пожелаемъ, чтобы было:

$$|s|>|m|,$$

то достаточно взять

$$n>\left|\frac{m}{a}\right|,$$

чтобы это было достигнуто.

Сказанное выше о членахъ и суммѣ ариѳметической прогрессіи дополнимъ замѣчаніемъ, что и для нихъ подобнымъ же образомъ можетъ быть легко найдено, при какихъ значеніяхъ n они по абсолютному значенію своему будутъ больше любого заданнаго абсолютнаго числа.

Возвращаясь же къ разсмотрѣнному особому случаю геометрической прогрессіи, мы сказанное относительно его могли бы также замѣнить словами, что при безграничномъ увеличеніи n и абсолютное значеніе s будетъ увеличиваться безгранично.

Если же въ геометрической прогрессіи $q>1$, то, начиная со второго, всѣ члены ея будутъ больше a, слѣдовательно, сумма членовъ ея и подавно будетъ безгранично увеличиваться въ томъ случаѣ, когда будетъ безъ конца увеличиваться число ихъ n.

Если $q=-1$, то сумма членовъ прогрессіи будетъ:

$$s=a-a+a-a+\ldots,$$

слѣдовательно, равна 0 при четномъ конечномъ n и равна a при нечетномъ конечномъ n; въ случаѣ же $n=\infty$ эта сумма выражается символомъ $\infty-\infty$, означающимъ неопредѣленность.

Если, наконецъ, $q<-1$, напр., если

$$q=-q_1,$$

гдѣ $q_1>1$, то нечетныя степени q будутъ отрицательны, четныя же положительны, и потому сумма n членовъ ея будетъ имѣть такой видъ:

$$s=a-aq_1+aq_1^2-aq_1^3+\ldots+a(-q_1)^{n-2}+a(-q_1)^{n-1}.$$

Преобразовавъ это выраженіе слѣдующимъ образомъ:

$$s=(a+aq_1^2+aq_1^4+\ \dots\ +aq_1^{n-2})-q_1(a+aq_1^2+aq_1^4+\ \dots\ +aq_1^{n-2})$$
$$=(1-q_1)(a+aq_1^2+aq_1^4+\ \dots\ +aq_1^{n-2})$$

для случая, что n четное число; а для случая, что n нечетное число, слѣдующимъ образомъ:

$$s=a+aq_1^2+aq_1^4+\ \dots\ +aq_1^{n-3}+aq_1^{n-1}-q_1(a+aq_1^2+aq_1^4+\ \dots\ +aq_1^{n-3})$$
$$=(1-q_1)(a+aq_1^2+aq_1^4+\ \dots\ +aq_1^{n-3})+aq_1^{n-1},$$

мы видимъ, что и теперь тоже при безграничномъ возрастаніи n сумма s всѣхъ членовъ прогрессіи должна по абсолютной величинѣ своей безгранично увеличиваться, ибо въ формулахъ для s второе выраженіе въ скобнахъ есть сумма геометрической прогрессіи со знаменателемъ q_1^2, который больше 1.

Результатомъ нашихъ разсужденій оказывается, что сумма безконечной геометрической прогрессіи не можетъ быть сходящеюся, если знаменатель этой прогрессіи по абсолютной величинѣ своей равенъ 1 или больше 1.

Но иначе обстоитъ дѣло, если абсолютное значеніе знаменателя геометрической прогрессіи меньше 1.

§ 633 **Сходимость суммы безконечной убывающей геометрической прогрессіи.** Чтобы показать, что такая сумма представляетъ сходящійся рядъ, необходимо предварительно доказать слѣдующія два предложенія:

Теорема 1 Степень абсолютнаго числа меньшаго, чѣмъ 1, можетъ быть сдѣлана меньше всякаго заданнаго абсолютнаго числа, какъ бы мало оно ни было.

Док. По теоремѣ, приведенной въ § 130, какъ слѣдствіе изъ 3-ьей изъ доказанныхъ тамъ теоремъ, степень съ абсолютнымъ основаніемъ меньшимъ, чѣмъ 1, уменьшается въ томъ случаѣ, если показатель ея, увеличивается; а что этимъ способомъ такая степень можетъ быть сдѣлана произвольно малою (по абсолютной величинѣ, конечно), это выяснимъ такимъ образомъ:

Всякое абсолютное число, которое меньше 1, можно представить въ видѣ частнаго $\frac{1}{1+б}$, предполагая $б$ абсолютнымъ числомъ. Если поэтому q^x будетъ такая степень, о которой говорится въ теоремѣ, то и q можно

замѣнить выраженіемъ $\frac{1}{1+б}$, въ какомъ случаѣ будетъ

$$q^n=\left(\frac{1}{1+б}\right)^n=\frac{1}{(1+б)^n}.$$

Но на стр. 266 было доказано, что

$$(1+б)^n>1+nб.$$

Замѣняя въ послѣдней дроби знаменателя $(1+б)^n$ меньшимъ числомъ $1+nб$, мы получимъ больше, чѣмъ имѣли, такъ что должно быть

$$q^n<\frac{1}{1+nб}.$$

Увеличивая n, мы правую часть этого неравенства можемъ сдѣлать произвольно малою по абсолютной величинѣ. Если мы, напр., пожелаемъ, чтобы она была равною $\frac{1}{m}$, то для этого нужно взять

$$n=\frac{m-1}{б}.$$

Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ q^n можно сдѣлать, какъ утверждалось, меньше всякаго заданнаго произвольно малаго абсолютнаго числа.

Теорема 2. Члены безконечной убывающей геометрической прогрессіи безгранично уменьшаются.

Док. Въ предыдущей теоремѣ мы доказали, что степень абсолютнаго числа меньшаго, чѣмъ 1, можетъ быть сдѣлана меньше всякой дроби $\frac{1}{m}$. Если, слѣдовательно, q означаетъ знаменателя убывающей геометрической прогрессіи, то и абсолютное значеніе q^{n-1} можно сдѣлать меньше $\frac{1}{m}$. Достаточно теперь взять, предполагая w тоже абсолютнымъ числомъ,

$$m=|wa|,$$

чтобы было

$$|q^{n-1}|<\frac{1}{|wa|},$$

слѣдовательно,

$$|aq^{n-1}|<\left|\frac{a}{wa}\right|,$$

т. е.

$$|aq^{n-1}| < \frac{1}{w}.$$

Такъ мы видимъ, что какъ бы велико ни было w, слѣдовательно, какъ бы мала ни была дробь $\frac{1}{w}$, мы, продолжая убывающую геометрическую прогрессію, всегда можемъ дойти до членовъ, которыхъ абсолютное значеніе будетъ меньше этой дроби. А это въ другихъ словахъ и утверждалось теоремою

Теперь же мы можемъ приступить и къ разсмотрѣнію называемой въ заголовкѣ этого параграфа сходимости:

Теорема. Сумма членовъ безконечной убывающей геометрической прогрессіи есть сходящійся рядъ.

Док. Преобразовавъ формулу для суммы членовъ геометрической прогрессіи слѣдующимъ образомъ:

$$s = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

мы видимъ, что чѣмъ больше въ убывающей прогрессіи членовъ, тѣмъ меньше становится по абсолютной величинѣ вычитаемое $\frac{a}{1-q} \cdot q^n$.

Выше было доказано, что мы q^n можемъ по абсолютной величинѣ сдѣлать меньше произвольно малой дроби $\frac{1}{m}$. Полагая

$$m = \left|\frac{wa}{1-q}\right|$$

и подставивъ это выраженіе вмѣсто m въ неравенство

$$|q^n| < \frac{1}{m},$$

мы получаемъ:

$$|q^n| < \left|\frac{1-q}{wa}\right|.$$

Умноживъ же послѣднее неравенство на $\left|\frac{a}{1-q}\right|$, мы находимъ:

$$\left|\frac{a}{1-q}\, q^n\right| < \frac{1}{w}.$$

Такъ мы убѣждаемся, что достаточно взять

$$m = \left| \frac{wa}{1-q} \right|,$$

чтобы разность между

$\frac{a}{1-q}$ и $\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ была меньше произвольно малой дроби $\frac{1}{w}$. А такъ какъ для всякой данной прогрессіи $\frac{a}{1-q}$ есть постоянная величина, то и ясно, что если прогрессія убывающая, то сумма членовъ ея

$$s = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

при безграничномъ увеличеніи n стремится къ предѣлу $\frac{a}{1-q}$

Такимъ образомъ мы не только доказали утвержденіе, что сумма членовъ безконечной убывающей геометрической прогрессіи имѣетъ предѣлъ, но и нашли при этомъ формулу для этого предѣла.

§ 634. **Сумма безконечной убывающей геометрической прогрессіи.**

Опредѣленіе. Предѣлъ, къ которому стремится сумма членовъ безконечной убывающей геометрической прогрессіи по мѣрѣ безграничнаго возрастанія числа членовъ ея, называется суммою членовъ такой прогрессіи или просто суммою ея. **205**

Теорема. Сумма безконечной убывающей геометрической прогрессіи равна частному отъ дѣленія перваго члена на разность между 1 и знаменателемъ прогрессіи. **206**

Док. Обозначивъ значеніе этой суммы буквою s, мы по опредѣленію такой суммы и непосредственно по послѣдней теоремѣ имѣемъ:

$$s = \lim \left[\frac{a(1-q^n)}{1-q} \right]_{n=\infty} = \frac{a}{1-q}.$$

Полученію формулою выражается то же самое, что въ словахъ утверждается теоремою.

Примѣры.

1) Всякая чистая періодическая десятичная дробь есть безконечная

убывающая геометрическая прогрессія, превращеніе же ея въ простую дробь есть суммированіе этого ряда.

0,(2) есть, напр., сумма членовъ безконечной убывающей геометрической прогрессіи:

$$:: \frac{2}{10},\ \frac{2}{100},\ \frac{2}{1000},\ \dots,$$

слѣд., по послѣдней теоремѣ,должно быть:

$$0,(2)=\frac{0,2}{1-0,1}=\frac{2}{9}.$$

0,(185) есть сумма безконечной убывающей геометрической прогрессіи, первый членъ которой равенъ 0,185, а знаменатель 0,001, такъ что, по той же теоремѣ, должно быть:

$$0,(185)=\frac{0,185}{1-0,001}=\frac{185}{999}=\frac{5}{27}.$$

2) Сумма безконечной геометрической прогрессіи

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2;$$

сумма же безконечной геометрической прогрессіи

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

3) З а д а ч а.

Найти сумму безконечной геометрической прогрессіи

$$:: \sqrt{2},\ \frac{1}{1+\sqrt{2}},\ \dots$$

Рѣшеніе.

Чтобы найти знаменателя прогрессіи, раздѣлимъ второй членъ ея на первый:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}:\sqrt{2}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

По **теоремѣ 206** значеніе этой суммы должно быть:

$$s = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}}}$$

Но полученное выраженіе должно еще упростить, при чемъ мы находимъ:

$$s = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}} = 2$$

4) З а д а ч а.

Найти сумму безконечной прогрессіи

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ \dots\ ,$$

при условіи, что

$$0 < x < 1.$$

Рѣшеніе.

Такъ какъ знаменатель прогрессіи x и она по условію задачи безконечная убывающая, то по теоремѣ **206**, искомая сумма должна быть:

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

Примѣчаніе.

Если мы по правиламъ, изложеннымъ въ главѣ XIII части I, произведемъ дѣленіе 1 на $1-x$, то получимъ рядъ, который мы только-что суммировали.

ГЛАВА III.

Сложные проценты, срочные взносы и срочныя уплаты.

§ 635. **Понятіе о сложныхъ процентахъ. Процентный множитель.** О сложныхъ процентахъ говорятъ въ тѣхъ случаяхъ, когда процентныя деньги, приносимыя капиталомъ, прибавляются къ послѣднему въ опредѣленные сроки и поступаютъ съ нимъ вмѣстѣ въ дальнѣйшій ростъ.

Если причисленіе наросшихъ процентныхъ денегъ производится одинъ разъ въ годъ, то процентныя деньги съ капитала a, отданнаго въ ростъ изъ $p^0{}_0$ годовыхъ, должны быть выражены формулою $\frac{ap}{100}$.

Слѣдовательно, первоначальный капиталъ a по прошествіи перваго года вслѣдствіе прибавляющихся къ нему процентныхъ денегъ превратится въ сумму

$$A_1 = a + \frac{ap}{100}$$
$$= a\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Содержащееся въ полученной формулѣ правило вычисленія суммы, въ которую превращается капиталъ въ 1 годъ, можетъ быть, удобно выражено, если для сомножителя $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ ввести особое названіе:

207 **Опредѣленіе.** Сумму 1 и одной сотой части процентной таксы будемъ называть процентнымъ множителемъ.

Правило. Для вычисленія суммы, въ которую превращается капиталъ вслѣдствіе прибавленія къ нему процентныхъ денегъ за 1 годъ (или за другой расчетный срокъ), нужно первоначальный капиталъ умножить на процентнаго множителя.

По этому правилу нужно, напр., для вычисленія названной въ немъ суммы первоначальный капиталъ умножить

на 1,01,	если процентная	такса		1%,
» 1,04,	»	»	»	4%,
» 1,055,	»	»	»	$5\frac{1}{2}$%,
» 1,0275,	»	»	»	$2\frac{3}{4}$%,
» 1,0625,	»	»	»	$6\frac{1}{4}$%,
» 1,031245,	»	»	»	3,1245%.

§ 636. **Вычисленіе суммы, въ которую капиталъ превращается въ t лѣтъ.** Если мы назовемъ A_1, A_2, A_3, ..., A_{t-1}, A_t суммы, въ которыя отданный въ ростъ по p% первоначальный капиталъ a превращается вслѣдствіе прибавляющихся къ нему процентныхъ денегъ и процентовъ на проценты,

по истеченіи 1, 2, 3, ..., $(t-1)$ и t лѣтъ, то по выведенному въ предыдущемъ параграфѣ правилу должно быть:

$$A_1=a\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

$$A_2=A_1\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

откуда послѣ подстановки:

$$A_2=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2;$$

$$A_3=A_2\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

а послѣ подстановки:

$$A_3=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3.$$

и т. д.

По аналогіи мы заключаемъ, что должно быть.

$$A_{t-1}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t-1}$$

Выводя же отсюда:

$$A_t=A_{t-1}\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

$$=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t-1}\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

$$=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t,$$

мы способомъ заключенія отъ $(t-1)$ къ t доказали, что выражаемое полученною формулою правило должно быть правильно для всякаго цѣлаго числа лѣтъ t:

Правило. **Для вычисленія суммы, въ которую въ t лѣтъ превращается капиталъ, дающій проценты и на проценты, нужно первоначальный капиталъ умножить на t-ую степень процентнаго множителя.** **208**

Формула: $$A_t=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$ **208**[a]

§ 637. **Примѣнимость послѣдней формулы.** Формула 208[a] примѣнима не только въ области денежныхъ предпріятій, но и во многихъ другихъ случаяхъ, напр., для вычисленія увеличенія народонаселенія, роста лѣса и т. п. Въ этихъ послѣднихъ случаяхъ формулу можно примѣнять, хотя бы число лѣтъ t и не было цѣлое. Ею слѣдовало бы пользоваться всегда и при

вычисленіяхъ, относящихся къ финансовымъ операціямъ, такъ какъ обычный при денежныхъ оборотахъ способъ процентныхъ вычисленій не можетъ считаться правильнымъ. Напр., если считать 100 рублей, отданныхъ въ ростъ изъ 6% годовыхъ, возросшими въ полгода до 103 рублей, то по истеченіи еще полугода капиталъ вмѣстѣ съ процентными деньгами на 103 рубля составитъ больше тѣхъ 106 рублей, въ которые бы онъ долженъ былъ превратиться по прошествіи года.

Вообще для всякаго получающаго на свой капиталъ прибыль въ видѣ процентныхъ денегъ тѣмъ больше выгоды, чѣмъ чаще производится присоединеніе ихъ къ капиталу, при обычаѣ процентную таксу устанавливать годовую, процентныя же деньги, причитающіяся за дробныя части года считать пропорціональными времени.

Способъ вычисленія, соотвѣтствующій названному обычаю, можетъ быть выраженъ формулою, которую мы находимъ слѣдующимъ образомъ:

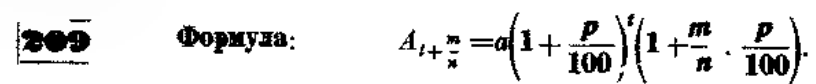
§ 638. **Вычисленіе суммы, въ которую капиталъ превращается въ $\left(t+\frac{m}{n}\right)$ лѣтъ.** Мы имѣемъ теперь дѣло со случаемъ, когда процентныя деньги прибавляются къ капиталу всякій разъ по прошествіи года и требуется узнать, во что этотъ капиталъ, при обычномъ вычисленіи процентныхъ денегъ, превратится въ $\left(t+\frac{m}{n}\right)$ лѣтъ, гдѣ t цѣлое число и $\frac{m}{n}$ правильная дробь. Въ t лѣтъ онъ превратится въ сумму

$$A_t = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Процентныя же деньги, которыя получатся съ капитала A_t въ $\frac{m}{n}$ года, выражаются формулою $\frac{m}{n}\cdot\frac{A_t p}{100}$, такъ что по истеченіи всего времени въ $\left(t+\frac{m}{n}\right)$ лѣтъ капиталъ a возрастетъ до суммы

$$A_{t+\frac{m}{n}} = A_t + \frac{m}{n}\cdot\frac{A_t p}{100}$$
$$= A_t\left(1+\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{100}\right).$$

Замѣнивъ въ этомъ результатѣ A_t приведеннымъ выше выраженіемъ, мы получаемъ формулу для вычисленія суммы, въ которую капиталъ превращается съ процентами на проценты въ $\left(t+\frac{m}{n}\right)$ лѣтъ при обычномъ порядкѣ вычисленія процентныхъ денегъ:



209 **Формула:** $$A_{t+\frac{m}{n}} = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t\left(1+\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{100}\right).$$

§ 639. **Замѣчанія относительно вычисленія времени и процентной таксы.** Если требуется вычислить время, въ которое нѣкоторый данный капиталъ при данной процентной таксѣ превратится съ процентами и на проценты въ нѣкоторую данную сумму, то для рѣшенія такой задачи нужно найти t изъ уравненія **208**^{a}. Если при этомъ окажется, что t число не цѣлое, то можно еще привести результатъ въ соотвѣтствіе съ обычнымъ способомъ вычисленія процентныхъ денегъ и достигнуть въ этомъ смыслѣ нѣсколько большей точности отвѣта. Нужно только для этого также еще воспользоваться уравненіемъ **209**, подставить въ него вмѣсто t цѣлую часть полученнаго для t числа и рѣшить его затѣмъ относительно $\frac{m}{n}$

Ниже приводится примѣръ такого вычисленія.

Рѣшить уравненіе **209** относительно p въ общемъ видѣ вообще нельзя, такъ какъ оно $(t+1)$-ой степени относительно этой буквы. Но и въ частныхъ случаяхъ степень этого уравненія будетъ почти всегда такъ высока, что мы его рѣшить не будемъ въ состояніи Мы достигнемъ, однако, точности, вполнѣ достаточной для коммерческихъ вычисленій, если и въ случаяхъ дробнаго значенія времени опредѣлимъ искомую процентную таксу изъ уравненія **208**^{a}. Въ коммерческихъ оборотахъ притомъ процентная такса обыкновенно бываетъ такое число, что легко можно по приближенному значенію путемъ повѣрки найти и очень близкое къ нему точное.

§ 640. **Прибавленіе процентныхъ денегъ къ капиталу болѣе одного раза въ годъ.** Если присоединеніе процентныхъ денегъ къ капиталу производится въ годъ нѣсколько разъ, напр., два раза, то можно сказать, что деньги отданы въ ростъ изъ $\frac{p}{2}$ процентовъ полугодовыхъ, при чемъ расчетныхъ сроковъ, т. е. *полугодій*, всѣхъ будетъ $2t$.

Если это прибавленіе прибыли будетъ происходить k разъ въ годъ, то въ каждую $\frac{1}{k}$ года капиталъ принесетъ $\frac{p}{k}$ % прибыли, сроковъ же вычисленія и присоединенія прибылей къ капиталу будетъ въ этомъ случаѣ всего kt. Значитъ сумма, въ которую такимъ образомъ превратится въ t лѣтъ капиталъ, должна быть та же, въ которую бы онъ превратился, если бы число лѣтъ стало въ k разъ больше, а процентная такса въ k разъ меньше.

Слѣдовательно, сумма A_t', въ которую превращается капиталъ a, отданный въ ростъ изъ p% годовыхъ съ условіемъ, чтобы прибыль прибавлялась къ капиталу k разъ въ годъ и чтобы увеличенный на нее капиталъ всегда сейчасъ же весь начиналъ приносить доходъ, должна вычисляться слѣдующимъ образомъ:

Формула $$A_t' = a\left(1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{p}{100}\right)^{kt}.$$  **210**

Полагая въ этой формулѣ

$$k=1,$$

мы получаемъ формулу 208*, которая такимъ образомъ является частнымъ случаемъ этой послѣдней.

§ 641. **Замѣчаніе относительно вычисленія послѣднихъ формулъ при помощи логариѳмовъ.** Эти формулы являются относительно t логариѳмическими уравненіями. Но если по нимъ приходится отыскивать и другія встрѣчающіяся въ нихъ величины, то такія вычисленія безъ помощи логариѳмовъ или будутъ едва выполнимыми (извлеченіе корня t-ой степени) или потребуютъ затраты очень большого количества времени (возвышеніе процентнаго множителя въ t-ую степень). Съ другой же стороны примѣненіе логариѳмическихъ таблицъ для такихъ вычисленій можетъ явиться источникомъ значительныхъ погрѣшностей, такъ какъ таблицы эти содержатъ приближенныя значенія логариѳмовъ, а погрѣшности этихъ значеній, если взять для примѣра пятизначные логариѳмы, доходятъ до 0,000005. При вычисленіи названной степени процентнаго множителя нужно логариѳмъ послѣдняго умножать на t, при чемъ и погрѣшность эта дѣлается въ t разъ больше. Представимъ себѣ, что $t=200$. Въ такомъ случаѣ погрѣшность логариѳма t-ой степени процентнаго множителя можетъ дойти до 0,001, вслѣдствіе чего должна получиться талая ошибка въ отвѣтѣ, которую нельзя считать допустимою. Но встрѣчаются задачи, въ которыхъ данное число лѣтъ t бываетъ и больше. Указанной ошибки можно избѣжать, имѣя въ своемъ распоряженіи логариѳмы процентныхъ множителей, вычисленные съ соотвѣтствующею большею точностью, чѣмъ логариѳмы въ примѣняемыхъ таблицахъ.

Чтобы удовлетворить потребности въ такихъ болѣе точныхъ логариѳмахъ, мы помѣщаемъ здѣсь табличку десятизначныхъ десятичныхъ логариѳмовъ процентныхъ множителей, соотвѣтствующихъ процентнымъ таксамъ отъ $\frac{1}{2}$% до 6%, называя въ ней этихъ множителей для сокращенія буквою q.

Десятизначные десятичные логариѳмы процентныхъ множителей.

q	log q	q	loq g
$1{,}00_5$	0,00216 60618	$1{,}03_5$	0,01494 03498
1,01	0,00432 13738	$1{,}03_{75}$	0,01598 81054
$1{,}01_{25}$	0,00539 50319	1,04	0,01703 33393
$1{,}01_5$	0,00646 60422	$1{,}04_{25}$	0,01807 60636
$1{,}01_{75}$	0,00753 44179	$1{,}04_5$	0,01911 62904
1,02	0,00860 01718	$1{,}04_{75}$	0.02015 40316
$1{,}02_{25}$	0,00966 33167	1,05	0,02118 92991
$1{,}02_5$	0,01072 38654	$1{,}05_{25}$	0,02222 21045
$1{,}02_{75}$	0,01178 18305	$1{,}05_5$	0,02325 24596
1,03	0,01283 72247	$1{,}05_{75}$	0,02428 03760
$1{,}03_{25}$	0,01389 00603	1,06	0,02530 58653

§ 642. **Примѣры.**

Задача 1.

По переписи 1897 года въ Саратовской губерніи оказалось 2419850 жителей, и извѣстно, что за послѣднее полустолѣтіе приростъ населенія въ ней составлялъ $1\frac{1}{2}\%$ въ годъ. Предполагая, что и далѣе въ этой губерніи народонаселеніе будетъ увеличиваться въ той же мѣрѣ, вычислить, сколько въ ней будетъ жителей въ 2000 году.

Рѣшеніе.

Искомое число жителей, которое назовемъ x, можетъ быть найдено путемъ непосредственнаго примѣненія формулы **208**ª. Такъ какъ промежутокъ времени отъ 1897 до 2000 года составляетъ 103 года, то для даннаго случая названная формула приметъ видъ:

$$x = 2419850 \quad 1{,}015^{103}.$$

Если мы вычисленіе неизвѣстной величины будемъ производить при помощи семизначныхъ логариѳмическихъ таблицъ, то логариѳмъ процентнаго множителя 1,015 при этомъ нужно будетъ взять по крайней мѣрѣ девятизначный, такъ какъ его придется умножить на 103, при чемъ и погрѣшность его увеличится въ 103 раза.

Дѣйствія могутъ быть расположены такъ:

$$\log x = \log 2419850 + 103 \log 1{,}015$$

$$\log 2419850 = 6{,}38378845$$

$$\log 1.015 = 0{,}00646 \quad 60422 \qquad 103 \log 1{,}015 = 0{,}66600235$$

$$\log x = 7{,}0497908$$

$$x = 11214780$$

Отвѣтъ.

Если все время останется въ силѣ данное въ задачѣ условіе относительно увеличенія населенія, то въ 2000-мъ году въ Саратовской губерніи будетъ **11214780** жителей.

Задача 2.

При таксаціи лѣса объемъ его былъ опредѣленъ въ 37850 кубическихъ саженей. Считая, что ежегодный приростъ этого лѣса составляетъ $2\frac{3}{4}\%$, вычислить, во сколько лѣтъ онъ увеличится до 60000 куб. саженей.

Рѣшеніе.

Примѣняя формулу **208**ª, мы условія задачи можемъ выразить слѣдующимъ уравненіемъ:

$$60000 = 37850 \,.\, 1.0275^{x}.$$

Изъ него мы получаемъ:

$$x=\frac{\log 60000-\log 37850}{\log 1,0275}=16,985.$$

Значитъ приблизительно въ 17 лѣтъ лѣсъ увеличится до указанныхъ размѣровъ.

Задача 3.

Чрезъ сколько времени капиталъ въ 2480 рублей былъ взятъ обратно изъ банка, если онъ, будучи отданъ въ ростъ изъ 4% годовыхъ и при условіи, что прибыль прибавлялась къ капиталу одинъ разъ въ годъ, возросъ вмѣстѣ съ процентами и на проценты до 3495 рублей 87 коп.?

Рѣшеніе.

Для опредѣленія цѣлой части искомаго времени нужно воспользоваться формулою **208**[a], которая въ данномъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$3495,87=2480\,.\,1,04^x.$$

Изъ этого уравненія мы находимъ:

$$x=\frac{\log 3495,87-\log 2480}{\log 1,04}=\frac{3,543554-3,39445}{0,01703}=\frac{0,149104}{0,01703}.$$

Въ послѣднемъ частномъ цѣлыхъ содержится 8.

Для отысканія недостающей еще дроби въ искомомъ числѣ лѣтъ, которую назовемъ y, мы должны примѣнить формулу **209**, получая такимъ образомъ уравненіе:

$$3459.87=2480\,.\,1,04^8\,(1+0.04y).$$

Изъ него мы находимъ:

$$y=25\,.\left(\frac{3495,87}{2480\,.\,1,04^8}-1\right).$$

Вычисленіе этого выраженія удобнѣе всего произвести и расположить слѣдующимъ образомъ:

$$\log\frac{3495,87}{2480\,.\,1,04^8}=\log 3495,87-\log 2480-8\log 1,04.$$

Выше уже найдено было:

$$\log 3495.87-\log 2480=0,149104$$

Отсюда вычтемъ: $8\log 1,04=0,136267,$

так что $\log\frac{3495,87}{2480\,.\,1,04^8}=0,01284.$

$$\text{слѣд.}, \frac{3495,87}{2480 \cdot 1,04^8} = 1,03$$

$$y = 25 \cdot (1,03 - 1) = \frac{3}{4}.$$

Отвѣтъ.

Капиталъ былъ взятъ обратно изъ банка чрезъ 8 лѣтъ 9 мѣсяцевъ.

З а д а ч а 4.

Нѣкто имѣетъ возможность помѣстить свои деньги или изъ 8% годовыхъ съ условіемъ присоединенія процентныхъ денегъ къ капиталу ежемѣсячно, или изъ $8\frac{1}{4}$% съ условіемъ прибавленія процентныхъ денегъ къ капиталу одинъ разъ въ годъ. Которое изъ предпріятій выгоднѣе?

Рѣшеніе.

Въ первомъ случаѣ помѣщенныя въ предпріятіе деньги a возрасли бы въ t лѣтъ вмѣстѣ съ процентами и на проценты до суммы, выражаемой [210] формулою $a\left(1+\frac{1}{12} \cdot \frac{8}{100}\right)^{12t}$ или $a \cdot (1,006667^{12})^t$, а во второмъ случаѣ до суммы, выражаемой [208[a]] формулою $a \cdot \left(1+\frac{8,25}{100}\right)^t$ или $a \cdot 1,0825^t$. Формулы, посредствомъ сравненія которыхъ другъ съ другомъ можетъ быть рѣшенъ разсматриваемый вопросъ, отличаются одна отъ другой только основаніями $1,006667^{12}$ и $1,0825$ t-ыхъ степеней. Слѣдовательно, то изъ предпріятій будетъ выгоднѣе, которому соотвѣтствуетъ большее изъ этихъ основаній.

Вычисленіе $1,006667^{12}$ расположимъ такъ:

$$\log 1,006667^{12} = 12 \cdot 0,0028858$$
$$0,0346296$$
$$1,006667^{12} = 1,083003.$$

Такъ какъ другое основаніе равно только 1,0825, то оказывается, что первое изъ предпріятій нѣсколько выгоднѣе второго.

§ 643. **Общая формула для срочныхъ взносовъ и срочныхъ уплатъ.** Если капиталъ a, отданный въ ростъ изъ p процентовъ годовыхъ и приносящій проценты и на проценты, въ концѣ каждаго года увеличивается не только на процентныя деньги, но кромѣ того еще и на нѣкоторый взносъ b, то по прошествіи перваго года онъ превратится въ сумму

$$K_1 = a\left(1+\frac{p}{100}\right)+b,$$

которую мы, обозначивъ процентнаго множителя $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ буквою q можемъ также выразить формулою

$$K_1=aq+b.$$

По прошествіи двухъ лѣтъ капиталъ вмѣстѣ съ прибылью и вторымъ взносомъ b составитъ сумму

$$\begin{aligned}K_2&=K_1q+b\\&=(aq+b)q+b\\&=aq^2+bq+b.\end{aligned}$$

Къ началу четвертаго года такимъ же образомъ составится капиталъ

$$\begin{aligned}K_3&=K_2q+b\\&=(aq^2+bq+b)q+b\\&=aq^3+bq^2+bq+b.\end{aligned}$$

По аналогіи мы заключаемъ, что къ началу t-го года долженъ составиться капиталъ

$$K_{t-1}=aq^{t-1}+bq^{t-2}+bq^{t-3}+\ldots+bq^2+bq+b.$$

Выводя же отсюда, что по прошествіи и этого года, т. е. по истеченіи всѣхъ t лѣтъ, долженъ образоваться капиталъ

$$\begin{aligned}K_t&=K_{t-1}q+b\\&=(aq^{t-1}+bq^{t-2}+bq^{t-3}+\ldots+bq^2+bq+b)q+b\\&=aq^t+bq^{t-1}+bq^{t-2}+\ldots+bq^3+bq^2+bq+b,\end{aligned}$$

мы способомъ заключенія отъ $(t-1)$ къ t доказали, что выражаемое полученною формулою правило должно быть правильно для всякаго цѣлаго числа лѣтъ t.

Но эта формула можетъ еще быть преобразована въ другую болѣе простую.

Въ ней всѣ члены кромѣ перваго содержатъ множителя b. Вынеся его за скобки и написавъ затѣмъ члены, заключенные въ нихъ, въ обратномъ порядкѣ, мы находимъ:

$$\begin{aligned}K_t&=aq^t+b(q^{t-1}+q^{t-2}+\ldots+q^2+q+1)\\&=aq^t+b(1+q+q^2+\ldots+q^{t-2}+q^{t-1}).\end{aligned}$$

Выраженіе въ скобкахъ есть сумма t членовъ геометрической прогрессіи, которой первый членъ есть 1 и знаменатель которой равенъ t.

Слѣдовательно, къ этому выраженію можетъ быть примѣнена формула F въ § 627. Послѣ же этого преобразовываемая формула принимаетъ видъ

$$K_t = aq^t + b \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

Отрицательное b въ этой формулѣ означало бы, что капиталъ въ концѣ каждаго года уменьшается на сумму денегъ b, другими словами, что должникъ (лицо, получившее сумму a) уплачиваетъ заимодавцу (вкладчику) въ концѣ каждаго года сумму b.

Оба разсмотрѣнные случая могутъ быть выражены слѣдующею общею формулою для срочныхъ взносовъ и срочныхъ уплатъ:

Формула: $$K_t = aq^t \pm b \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$ **211**

§ 644. **Накопленіе капитала одними взносами въ началѣ каждаго года.** Если капиталъ наращается путемъ одинаковыхъ взносовъ, дѣлаемыхъ въ началѣ каждаго года, то для вычисленія его нужно въ послѣдней формулѣ взять знакъ + между обоими ея членами, a равнымъ b и кромѣ того прибавить отрицательный членъ $-b$, такъ какъ предполагается, что въ концѣ послѣдняго года взноса не дѣлается. Такимъ образомъ получается для накопленнаго указаннымъ способомъ капитала:

$$C_t = bq^t + b \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} - b$$

$$= b(q^t - 1) + b \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

$$= \frac{b(q^t - 1)(q - 1) + b(q^t - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{b(q^t - 1)(q - 1 + 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{bq(q^t - 1)}{q - 1}$$

Это и есть частная формула для срочныхъ взносовъ, т. е. формула для вычисленія капитала, накапливаемаго одними срочными взносами, дѣлаемыми въ началѣ каждаго года.

Формула: $$C_t = \frac{bq(q^t - 1)}{q - 1}.$$ **212**

§ 645. **Погашеніе долга срочными уплатами.** Если долгъ a долженъ быть въ t лѣтъ погашенъ путемъ одинаковыхъ взносовъ, въ размѣрѣ b каждый, уплачиваемыхъ заимодавцу въ концѣ каждаго года, то для рѣшенія могущихъ при этомъ возникнуть вопросовъ нужно въ формулѣ 211



взять знакъ — между обоими членами и K_t равнымъ 0. Въ частности очень легко получается формула для срочныхъ уплатъ, т. е. для вычисленія размѣра b уплаты, которую нужно производить въ концѣ каждаго года для погашенія долга. Рѣшивъ уравненіе

$$0=aq^t-b\cdot\frac{q^t-1}{q-1}$$

относительно b, мы ее и получаемъ:

213 **Формула:** $$b=\frac{aq^t(q-1)}{q^t-1}.$$

§ 646. **Примѣры.**

Задача 1.

Лицу, получившему наслѣдство въ 8111 рублей 30 коп., предложили помѣстить эти деньги въ банкъ изъ $5\frac{1}{2}\%$ годовыхъ. Названный наслѣдникъ не только воспользовался этимъ предложеніемъ, внеся упомянутую сумму въ банкъ въ началѣ года, но рѣшилъ прибавлять еще въ концѣ каждаго года на тѣхъ же условіяхъ изъ своихъ доходовъ по 1500 рублей къ нарастающему капиталу до тѣхъ поръ, пока изъ всѣхъ вкладовъ вмѣстѣ съ процентами и на проценты не образуется капиталъ въ 40000 рублей, на который бы онъ могъ пріобрѣсти имѣніе.

Когда настанетъ этотъ моментъ?

Рѣшеніе.

Уравненіе, дающее рѣшеніе этой задачи, мы имѣемъ въ формулѣ **211**, при чемъ мы по смыслу задачи должны предъ вторымъ членомъ въ правой части взять знакъ $+$. Рѣшеніе уравненія

$$K_t=aq^t+b\cdot\frac{q^t-1}{q-1}$$

относительно t состоитъ въ слѣдующихъ преобразованіяхъ, понятныхъ и безъ дальнѣйшихъ объясненій:

$$K_t(q-1)=a(q-1)q^t+bq^t-b$$

$$K_t(q-1)+b=[a(q-1)+b]q^t$$

$$q^t=\frac{K_t(q-1)+b}{a(q-1)+b}$$

$$t\log q=\log[K_t(q-1)+b]-\log[a(q-1)+b]$$

$$t=\frac{\log[K_t(q-1)+b]-\log[a(q-1)+b]}{\log q}.$$

Подставляя въ полученное въ общемъ видѣ рѣшеніе задачи 40000 вмѣсто K_t, 1,055 вмѣсто q, 1500 вмѣсто b и 8111,3 вмѣсто a, мы находимъ

$$t=12.$$

Отвѣтъ.

Чрезъ 12 лѣтъ всѣ вклады въ банкъ вмѣстѣ съ процентами и на проценты составятъ капиталъ въ 40000 рублей.

З а д а ч а 2.

Нѣкто желаетъ обезпечить своему четырехлѣтнему сыну въ будущемъ средства для высшаго образованія и намѣренъ съ этою цѣлью уплачивать въ общество страхованія капиталовъ и рентъ въ началѣ каждаго года нѣкоторый взносъ съ тѣмъ, чтобы по прошествіи 15 лѣтъ сынъ въ теченіе 6 лѣтъ получалъ въ концѣ каждой четверти года по 150 рублей.

Какой взносъ отцу придется дѣлать ежегодно, если общество платитъ за поступающія къ нему въ ростъ суммы въ годъ 4%?

Рѣшеніе.

Положимъ, что искомый ежегодный взносъ равенъ x рублямъ. Въ такомъ случаѣ капиталъ, который образуется изъ взносовъ и процентовъ на нихъ и на проценты, составитъ, по формулѣ **212**,

$$\frac{x \cdot 1{,}04 \cdot (1{,}04^{15}-1)}{0{,}04} \text{ рублей.}$$

Такъ какъ уплаты сыну предполагается производить 4 раза въ годъ, то всѣхъ уплатъ будетъ 24. Если условлена процентная такса въ 4% въ годъ, то считаютъ, что это составляетъ 1% въ четверть года. Поэтому мы, выражая условіе относительно уплатъ сыну, должны будемъ пользоваться формулою **213** такъ, какъ будто бы число лѣтъ было 24, а процентная такса всего 1%, слѣдовательно, считать $t=24$, $q=1{,}01$ и, конечно, $b=150$. При этомъ мы a должны будемъ замѣнить приведенною выше формулою для образовавшагося въ 15 лѣтъ капитала. На основаніи такого разсужденія мы получаемъ слѣдующее уравненіе:

$$\frac{x \cdot 1{,}04 \cdot (1{,}04^{15}-1)}{0{,}04} \cdot \frac{1{,}01^{24} \cdot 0{,}01}{1{,}01^{24}-1}=150.$$

Рѣшивъ его, мы находимъ:

$$x=153{,}02.$$

Отвѣтъ.

Ежегодный взносъ отца въ общество составляетъ 153 рубля 2 коп.

Б. Непрерывныя дроби и ихъ примѣненія.

ГЛАВА IV.

Основныя понятія и общія предложенія.

§ 647. **Понятіе о непрерывной дроби.** Положимъ, что P и Q означаютъ абсолютныя цѣлыя взаимно-простыя числа, и представимъ себѣ, что надъ ними производится тотъ рядъ дѣйствій, который извѣстенъ подъ названіемъ *послѣдовательныхъ дѣленій* [§ 101]. Предположимъ при этомъ, что остатокъ 0 получается при n-омъ дѣленіи. Получающіяся при дѣленіяхъ частныя назовемъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$, получающіеся же остатки r_1, r_2 $r_3, \ldots, r_{n-1}$ (слѣдующій остатокъ 0), и замѣтимъ, что такъ какъ P и Q предположены числами взаимно-простыми, т. е. имѣющими общаго наибольшаго дѣлителя 1, то остатокъ r_{n-1}, на который производится послѣднее дѣленіе, долженъ быть равенъ 1, а вслѣдствіе этого

$$r_{n-2}=a_n.$$

При перечисленныхъ условіяхъ зависимость между упоминавшимися величинами можетъ быть выражена слѣдующими n равенствами:

$$\frac{P}{Q}=a_1+\frac{r_1}{Q}$$

$$\frac{Q}{r_1}=a_2+\frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{r_1}{r_2}=a_3+\frac{r_3}{r_2}$$

$$\frac{r_2}{r_3}=a_4+\frac{r_4}{r_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}}=a_{n-1}+\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=a_n.$$

Изъ второго изъ этихъ уравненій получается

$$\frac{r_1}{Q}=\cfrac{1}{a_2+\cfrac{r_2}{r_1}}$$

изъ третьяго

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{a_3+\frac{r_3}{r_2}}$$

и т. д., и, наконецъ, изъ $(n-1)$-аго

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-3}}=\frac{1}{a_{n-1}+\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}}$$

и изъ n-аго

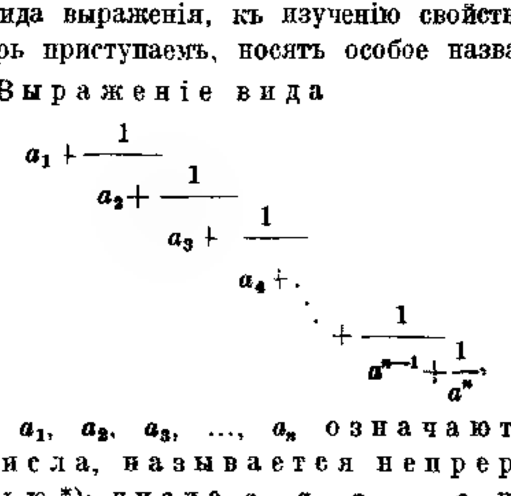
$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=\frac{1}{a_n}.$$

Подставивъ одно послѣ другого эти выраженія вмѣсто дробей $\frac{r_1}{Q}$, $\frac{r_2}{r_1}$, и т. д. въ первое уравненіе, мы находимъ:

$$\frac{P}{Q}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots+\cfrac{1}{a^{n-1}+\cfrac{1}{a^n}}}}}.$$

Полученнаго вида выраженія, къ изученію свойствъ и примѣненій которыхъ мы теперь приступаемъ, носятъ особое названіе:

Опредѣленіе. Выраженіе вида  214



$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots+\cfrac{1}{a^{n-1}+\cfrac{1}{a^n}}}}},$$

въ которомъ a_1, a_2, a_3, ..., a_n означаютъ абсолютныя цѣлыя числа, называется непрерывною или цѣпною дробью *); числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n называются

---

*) Такая дробь есть частный случай *общаго вида* непрерывной дроби:

$$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cfrac{f}{g+\dots}}}$$

Въ виду особыхъ свойствъ, которыми обладаетъ именно этотъ случай, его только и принято разсматривать въ общихъ курсахъ.

частными знаменателями или неполными частными, дроби же $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ ея звеньями или составляющими дробями.

Если $P<Q$ то $a_1=0$; изъ остальныхъ же неполныхъ частныхъ ни одно никогда не можетъ быть равнымъ 0.

§ 648. **Сокращенное изображенiе непрерывной дроби.** Существуетъ сокращенное изображенiе непрерывной дроби, состоящее въ томъ, что частные знаменатели, отдѣленные другъ отъ друга запятыми, ставятся въ скобки. Такъ, приведенная выше непрерывная дробь, равная $\frac{P}{Q}$, можетъ быть изображена символомъ

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n).$$

§ 649. **Превращенiе простой дроби въ непрерывную.** Изъ разсужденiй § 647 должно быть ясно, что названное превращенiе въ сущности сводится къ производству тѣхъ же дѣленiй, которыя бы слѣдовало произвести, если бы нужно было отыскать общаго наибольшаго дѣлителя для числителя и знаменателя обыкновенной дроби. Порядокъ этихъ дѣленiй указывается уже n равенствами, приведенными въ названномъ параграфѣ. Но для ускоренiя вычисленiй можно дѣйствiя располагать по слѣдующей довольно удобной схемѣ, въ которой уже значенiе буквъ въ достаточной степени разъясняетъ расположенiе дѣйствiй:

	a_1	a_2	a_3	a_4	...	.	a_n
P	Q	r_1	r_2	r_3	..	r_{n-2}	r_{n-1}
a_1Q	a_2r_1	a_3r_2	a_4r_3	.	...	a_nr_{n-1}	
r_1	r_2	r_3	r_4	.	...	0	

Чтобы, однако, не оставалось сомнѣнiй, замѣтимъ все-таки еще, что начинать нужно выполненiе дѣйствiй по этой схемѣ съ занесенiя въ первую и вторую графу во второй строкѣ числителя и знаменателя данной дроби, цѣлую часть частнаго отъ дѣленiя числителя на знаменателя написать въ первой строкѣ во второй графѣ, произведенiе дѣлителя на частное подписать въ первой графѣ подъ числителемъ, а въ четвертой строкѣ въ той же графѣ написать остатокъ отъ вычитанiя названнаго произведенiя изъ числителя, а затѣмъ этотъ остатокъ занести въ третью графу во второй строкѣ и дѣлить на него число, стоящее влѣво отъ него тѣмъ же способомъ, которымъ было произведено первое дѣленiе, помѣщая только, конечно, всѣ получающiяся числа одною графою правѣе, и продолжать такъ до полу-

ченія остатка 0. Послѣ такого окончанія вычисленій въ первой строкѣ окажутся всѣ неполныя частныя, почему достаточно эти числа въ первой строкѣ написать въ скобкахъ, отдѣливъ ихъ запятыми другъ отъ друга, чтобы имѣть искомую непрерывную дробь, вмѣсто чего, конечно, можно написать непрерывную дробь и въ несокращенномъ видѣ.

Превратимъ по предложенной схемѣ въ непрерывныя дроби одну неправильную и одну правильную дробь

Примѣры.

1) Превращеніе дроби $\frac{138}{37}$ въ непрерывную дробь должно быть расположено такъ:

	3	1	2	1	2	3
138	37	27	10	7	3	1
111	27	20	7	6	3	
27	10	7	3	1	0	

Такимъ образомъ мы узнаемъ, что

$$\frac{138}{37}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}},$$

вмѣсто чего можно также писать:

$$\frac{138}{37}=(3,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3)$$

2) Чтобы превратить по приведенному правилу дробь $\frac{16}{89}$ въ непрерывную, нужно дѣйствія расположить такъ:

	0	5	1	1	3	2
16	89	16	9	7	2	1
0	80	9	7	6	2	
16	9	7	2	1	0	

Такъ оказывается, что

$$\frac{16}{89}=(0,\ 5,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2),$$

вмѣсто чего можно также писать:

$$\frac{16}{89}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}.$$

§ 650. **Возможность только одного вида развертыванія въ непрерывную дробь.** Допустивъ, что возможно дробь превратить въ непрерывную не только при помощи послѣдовательныхъ дѣленій, но и какъ-нибудь иначе, мы имѣли бы право допустить вмѣстѣ съ тѣмъ и возможность существованія еще другихъ видовъ непрерывныхъ дробей (т. е. съ другими неполными частными или же и съ тѣми же неполными частными, но расположенными въ другомъ порядкѣ), которые бы также оказались равными данной дроби.

Возможно ли это или нѣтъ, это рѣшается слѣдующимъ предложеніемъ:

215 **Теорема.** Есть всегда только одна непрерывная дробь, равная данной дроби.

Док. Допустимъ, что данная дробь $\frac{p}{q}$ можетъ быть превращена не только въ непрерывную дробь $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, но еще и въ непрерывную дробь $(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_t)$.

Но такъ какъ цѣлая часть частнаго $\frac{p}{q}$ есть во всякомъ частномъ случаѣ нѣкоторое вполнѣ опредѣленное цѣлое число, то должно быть

$$a_1=b_1.$$

Перенеся теперь въ равенствахъ

$$\frac{p}{q}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$$

и

$$\frac{p}{q}=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_t)$$

первые члены правыхъ частей въ лѣвыя части и произведя затѣмъ въ лѣвыхъ частяхъ вычитанія, мы получаемъ:

$$\frac{p-a_1q}{q}=\frac{1}{(a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n)}$$

и

$$\frac{p-b_1q}{q}=\frac{1}{(b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_t)};$$

а отсюда мы заключаемъ, что должно быть:

$$\frac{q}{p-a_1q}=(a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n)$$

$$\frac{q}{p-b_1q}=(b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_t).$$

Лѣвыя части этихъ равенствъ означаютъ одно и то же число, ибо $a_1=b_1$. И здѣсь опять цѣлая часть названнаго числа въ каждомъ частномъ случаѣ есть нѣкоторое вполнѣ опредѣленное цѣлое число. Слѣдовательно, должно быть и

$$a_2=b_2.$$

Продолжая разсуждать такимъ же образомъ, мы убѣждаемся, что должно быть также

$$a_3=b_3$$

и

$$a_4=b_4$$

и т. д., и, наконецъ,

$$a_n=b_t$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$n=t,$$

т. е., что обѣ непрерывныя дроби, равныя $\frac{p}{q}$, тождественны. А изъ этого и слѣдуетъ правильность утвержденія.

§ 651. **Подходящія дроби.** Если мы въ непрерывной дроби

$$A=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}$$

отбросимъ послѣднее звено ея или два послѣднихъ звена или три и т. д., то получимъ непрерывныя дроби, которыхъ значенія отличаются, конечно, отъ значенія A и выражаютъ послѣднее только приближенно съ большею или меньшею степенью точности. Эти приближенныя значенія играютъ очень существенную роль въ теоріи непрерывныхъ дробей и при примѣненіи послѣднихъ и носятъ особое названіе.

216 **Опредѣленіе.** Подходящею дробью данной непрерывной дроби называется значеніе такой непрерывной дроби, которая получается изъ данной вслѣдствіе того, что послѣднія звенья ея, начиная отъ какого-либо мѣста, отбрасываются.

Первая подходящая дробь приведенной выше непрерывной дроби A есть a_1, вторая $a_1+\frac{1}{a_2}=\frac{a_1a_2+1}{a_2}$, третья $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}=\frac{a_1a_2a_3+a_3+a_1}{a_2a_3+1}=$ $\frac{(a_1a_2+1)a_3+a_1}{a_2a_3+1}$ и т. д. Говорятъ и объ n-ой подходящей дроби, называя ее и послѣднею, но только въ переносномъ смыслѣ, такъ какъ подъ этими обозначеніями понимаютъ не приближенное уже какое-либо значеніе, а значеніе самой данной дроби A.

Во избѣжаніе же повтореній разъ навсегда условимся, что если мы будемъ говорить о непрерывной дроби и такъ или иначе о такихъ подходящихъ дробяхъ ея, которыя больше или меньше ея, то послѣдняя въ указанномъ смыслѣ подходящая дробь при этомъ не будетъ имѣться въ виду.

§ 652. **Правило вычисленія подходящихъ дробей изъ предыдущихъ.** Значеніе каждой подходящей дроби можетъ быть найдено путемъ выполненія указанныхъ дѣйствій, но можетъ быть также вычислено изъ значеній предыдущихъ двухъ на основаніи слѣдующаго предложенія:

217 **Теорема.** Чтобы найти $\left\{\begin{matrix}\text{числителя}\\ \text{знаменателя}\end{matrix}\right\}$ подходящей дроби, нужно $\left\{\begin{matrix}\text{числителя}\\ \text{знаменателя}\end{matrix}\right\}$ предыдущей подходящей дроби умножить на неполное частное, на которомъ данная непрерывная дробь обрывается, и къ этому произведенію прибавить $\left\{\begin{matrix}\text{числителя}\\ \text{знаменателя}\end{matrix}\right\}$ предпредыдущей подходящей дроби.

Предп. $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}},\ \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}},\ \frac{p_k}{q_k}$

три послѣдовательныя подходящія дроби непрерывной дроби

$$A=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_k+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Утв.

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$
$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$$

Док. Назовемъ $\frac{p_1}{q_1}$ первую подходящую дробь дроби A, $\frac{p_2}{q_2}$ вторую и т. д., такъ что j-ая будетъ

$$\frac{p_j}{q_j} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{a_j}}}$$

Слѣдующая же послѣ нея будетъ

$$\frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{a_j + \cfrac{1}{a_{j+1}}}}}.$$

Сравнивая послѣднюю изъ нихъ съ предыдущею, мы видимъ, что изъ j-ой получится $(j+1)$-ая, если мы въ этой j-ой a_j замѣнимъ выраженіемъ $a_j + \frac{1}{a_{j+1}}$.

Допустивъ теперь, что доказываемая теорема справедлива для j-ой подходящей дроби, покажемъ, не примѣняя правила, выражаемаго этою теоремою, что оно остается тѣмъ же и для $(j+1)$-ой. Слѣдовательно, мы допускаемъ, что

$$p_j = a_j p_{j-1} + p_{j-2}$$
$$q_j = a_j q_{j-1} + q_{j-2},$$

въ какомъ случаѣ

$$\frac{p_j}{q_j} = \frac{a_j p_{j-1} + p_{j-2}}{a_j q_{j-1} + q_{j-2}}.$$

Выше мы указали на то, что въ j-ой подходящей дроби нужно замѣнить a_j выраженіемъ $a_j + \frac{1}{a_{j+1}}$, чтобы получить $(j+1)$-ую подходящую дробь. Слѣдовательно, должно быть:

$$\frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} = \frac{\left(a_j + \frac{1}{a_{j+1}}\right) p_{j-1} + p_{j-2}}{\left(a_j + \frac{1}{a_{j+1}}\right) q_{j-1} + q_{j-2}} = \frac{a_j p_{j-1} + \frac{p_{j-1}}{a_{j+1}} + p_{j-2}}{a_j q_{j-1} + \frac{q_{j-1}}{a_{j+1}} + q_{j-2}}$$

$$= \frac{a_{j+1} a_j p_{j-1} + p_{j-1} + a_{j+1} p_{j-2}}{a_{j+1} a_j q_{j-1} + q_{j-1} + a_{j+1} q_{j-2}} = \frac{a_{j+1}(a_j p_{j-1} + p_{j-2}) + p_{j-1}}{a_{j+1}(a_j q_{j-1} + q_{j-2}) + q_{j-1}}$$

Но такъ какъ

$$a_j p_{j-1} + p_{j-2} = p_j$$
$$a_j q_{j-1} + q_{j-2} = q_j,$$

то

$$\frac{p_{j+1}}{q_{j+1}} = \frac{a_{j+1} p_j + p_{j-1}}{a_{j+1} q_j + q_{j-1}}.$$

Что это выраженіе для $\frac{p_{j+1}}{q_{j+1}}$ составлено по тому же закону, по которому образовано выраженіе для $\frac{p_j}{q_j}$, хотя мы для вывода полученнаго выраженія этимъ закономъ и не пользовались, это станетъ еще болѣе явнымъ, если мы $j+1$ замѣнимъ буквою k, слѣдовательно, j выраженіемъ $k-1$. Послѣ такой подстановки мы получаемъ:

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

А такъ какъ p_k означаетъ числителя k-ой подходящей дроби, а q_k знаменателя ея, то мы имѣемъ право писать:

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$
$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$$

Такъ мы отчетливо, какъ нельзя болѣе, видимъ, что числитель и знаменатель k-ой подходящей дроби совершенно такія же выраженія, какія выше допущены были правильными для j-ой, то есть, что теорема справедлива для $(j+1)$-ой подходящей дроби, если она справедлива для j-ой.

Такъ какъ первая и вторая подходящія дроби дроби A суть $\frac{a_1}{1}$ и $\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$, то

$$p_1 = a_1$$
$$q_1 = 1$$
$$p_2 = a_1 a_2 + 1$$
$$q_2 = a_2;$$

Третья же подходящая дробь равна $\frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_3 a_2 + 1}$, слѣдовательно,

$$p_3 = a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1$$
$$q_3 = a_3 a_2 + 1.$$

Подставивъ въ эти равенства p_2 вмѣсто $(a_1 a_2 + 1)$, p_1 вмѣсто a_1, q_2 вмѣсто a_2 и q_1 вмѣсто 1, мы получаемъ:

$$p_3 = a_3 p_2 + p_1$$
$$q_3 = a_3 q_2 + q_1$$

и убѣждаемся такимъ образомъ, что доказываемая теорема справедлива для 3-ьей подходящей дроби. Слѣдовательно, она справедлива и для 4-ой, будучи же справедливою для 4-ой, она должна быть справедливою и для 5-ой, и т. д. безъ конца, т. е., она должна быть справедливою вообще; что и требовалось доказать

§ 653. **Превращеніе непрерывной дроби въ простую.** Чтобы превратить непрерывную дробь въ простую, можно выполнить указанныя ею дѣйствія, какъ это видно на слѣдующемъ примѣрѣ

$$2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}}$$

$$2+\frac{1}{6\frac{3}{4}}=2+\frac{4}{27}=\frac{58}{27}.$$

Но удобнѣе и скорѣе можно произвести это превращеніе при помощи подходящихъ дробей, образуя ихъ по правилу 217 и принявъ во вниманіе, что послѣдняя подходящая дробь равна значенію данной непрерывной дроби.

Для примѣра превратимъ въ простыя дроби непрерывныя дроби, полученныя нами въ § 649.

Для непрерывной дроби

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}$$

подходящія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{3}{1};\ \frac{4}{1};\ \frac{2\,.\,4+3}{2\,.\,1+1}=\frac{11}{3};$$

$$\frac{1\,.\,11+4}{1\,.\,3+1}=\frac{15}{4};\ \frac{2\,.\,15+11}{2\,.\,4+3}=\frac{41}{11};\ \frac{3\,.\,41+15}{3\,.\,11+4}=\frac{138}{37}.$$

Такимъ образомъ мы находимъ тотъ именно результатъ, который и должны были получить:

$$(3,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3)=\frac{138}{37}.$$

При превращеніи непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}$$

въ простую не будемъ опять подробно указывать дѣйствій, которыя должно производить, когда вычисляются подходящія дроби. Указанный правиломъ **217** порядокъ этотъ очень легко запомнить, дѣйствія же только въ исключительныхъ случаяхъ нельзя произвести въ умѣ. Достаточно поэтому подходящія дроби писать одну послѣ другой въ рядъ, надписывая для большаго удобства надъ поставленными между ними запятыми надъ каждой то неполное частное, на которое предстоитъ умножить числителя и знаменателя дроби, стоящей предъ запятою. Этотъ рядъ составляется, слѣдовательно, въ такомъ порядкѣ: первая подходящая дробь, вторая подходящая дробь (къ вычисленію которыхъ правило **217** еще не можетъ быть примѣнено), надъ запятою третье неполное частное, третья подходящая дробь, надъ запятою четвертое неполное частное, четвертая подходящая дробь, и т. д.

При этомъ необходимо, однако, еще замѣтить, что если данная дробь правильная, то первымъ неполнымъ частнымъ должно считать 0.

Описанный рядъ можно принять за с х е м у д л я п р е в р а щ е н і я п р о с т о й д р о б и в ъ н е п р е р ы в н у ю п р и п о м о щ и п о д х о д я щ и х ъ д р о б е й.

По ней и произведемъ превращеніе данной дроби въ непрерывную:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{5}\overset{1}{,}\Big|\ \frac{1}{6}\overset{1}{,}\ \frac{2}{11}\overset{3}{,}\ \frac{7}{39}\overset{2}{,}\ \frac{16}{89};$$

а чтобы представить полный образецъ превращенія, добавимъ еще и отвѣтъ, который мы напередъ уже знали:

$$(0,\ 5,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2)=\frac{16}{89}.$$

§ 654. Важное для предстоящихъ выводовъ предложеніе.

218 **Теорема.** Е с л и $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и $\frac{p_k}{q_k}$ д в ѣ п о с л ѣ д о в а т е л ь н ы я п о д х о д я щ і я д р о б и, т о

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k.$$

Док. Назвавъ $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, какъ прежде, $(k-2)$-ую подходящую дробь непрерывной дроби $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, мы по теоремѣ **217** имѣемъ:

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$
$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на q_{k-1}, а второе на p_{k-1}, и вычтя преобразованныя такимъ образомъ равенства эти второе изъ перваго, мы исключимъ изъ нихъ a_k и получаемъ:

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = p_{k-2} q_{k-1} - p_{k-1} q_{k-2},$$

вмѣсто чего можемъ также написать:

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = -(p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1}).$$

Выраженіе въ скобкахъ въ правой части послѣдняго равенства образовано по тому же правилу, по какому составлено выраженіе въ лѣвой части.

Это означаетъ, что если мы числителей и знаменателей двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей умножимъ крестъ на крестъ и произведенія эти вычтемъ одно изъ другого, то разность получится всегда по абсолютной величинѣ одна и та же.

Но легко убѣдиться, что

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1 = (-1)^2;$$

слѣдовательно, на основаніи того, что мы только-что доказали въ общемъ видѣ, должно быть:

$$p_3 q_2 - p_2 q_3 = -1 = (-1)^3$$

и

$$p_4 q_3 - p_3 q_4 = +1 = (-1)^4$$

и т. д.,
вообще, значитъ, какъ утверждалось:

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k.$$

§ 655. **Несократимость подходящихъ дробей.**

Теорема. П о д х о д я щ і я д р о б и н е с о к р а т и м ы. 

Док. Если бы числитель и знаменатель подходящей дроби $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ или же числитель и знаменатель подходящей дроби $\frac{p_k}{q_k}$ имѣли какого-либо

общаго дѣлителя, то на него должна бы была дѣлиться и разность $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k$ [§99]. Но въ такомъ случаѣ эта разность не могла бы быть равною +1 или —1, какъ этого требуетъ предыдущая теорема. А разъ члены названныхъ дробей не могутъ имѣть общихъ дѣлителей, кромѣ 1, то и сокращены эти дроби быть не могутъ.

Совершенно такимъ же образомъ мы изъ равенства

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k$$

заключаемъ слѣдующее:

220 **Слѣдствіе.** Числители двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей должны быть числа взаимно-простыя, такъ же и знаменатели ихъ.

Если поэтому при вычисленіи подходящихъ дробей получится сокращающаяся дробь, или числители двухъ послѣдовательныхъ дробей или же знаменатели ихъ окажутся числами не взаимно-простыми, то это всегда будетъ признакомъ сдѣланной ошибки.

Доказанную въ этомъ параграфѣ теорему и слѣдствіе изъ нея пояснимъ еще слѣдующимъ примѣромъ.

Превращая дробь $\frac{4753}{2134}$ въ непрерывную по данной схемѣ, слѣдовательно, такимъ образомъ:

	2	4	2	2
4753	2134	485	194	97
4268	1940	388	194	
485	194	97	0	

мы находимъ:

$$\frac{4753}{2134} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Превращая же обратно полученную непрерывную дробь въ простую тоже по данной схемѣ, значитъ такъ:

$$\frac{2}{1},\ \frac{9}{4},\ \overset{2}{\smile}\ \frac{20}{9},\ \overset{2}{\smile}\ \frac{49}{22},$$

мы находимъ, что

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{49}{22}.$$

Такимъ образомъ мы обнаруживаемъ, что данная дробь $\frac{4753}{2134}$ допускаетъ сокращеніе; а на какое число, это мы должны были уже замѣтить при превращеніи ея въ непрерывную, такъ какъ послѣдній дѣлитель оказался равнымъ не 1, а 97.

Обративъ же вниманіе на рядъ, содержащій подходящія дроби, мы видимъ подтвержденными всѣ доказанныя и поясняемыя здѣсь истины.

§ 656. **Разность двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей.**

Теорема. Разность двухъ послѣдовательныхъ 
подходящихъ дробей равна 1, дѣленной на произведеніе знаменателей ихъ.

Док. Назвавъ, какъ прежде, двѣ послѣдовательныя подходящія дроби $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и $\frac{p_k}{q_k}$, мы имѣемъ:

$$\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=\frac{p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k}{q_kq_{k-1}}.$$

Но по теоремѣ **218**

$$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^k.$$

Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=(-1)^k\cdot\frac{1}{q_kq_{k-1}}.$$

Примѣчаніе.

$(-1)^k$ мы вынесли множителемъ передъ дробь, чтобы указать, что въ случаяхъ опредѣленныхъ чиселъ это будетъ только знакъ $+$ или $-$ передъ нею.

§ 657. **Знакъ разности двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей.**

Если

$$\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=(-1)^k\cdot\frac{1}{q_kq_{k-1}},$$

то

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = (-1)^k \cdot \frac{1}{q_k q_{k-1}},$$

вмѣсто чего можно также писать:

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{-1} \cdot \frac{1}{q_k q_{k-1}},$$

значить

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{q_k q_{k-1}}.$$

Изъ этого и перваго равенства мы можемъ вывести такое правило относительно знака разности двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей:

Правило. Вычитаемъ ли мы подходящую дробь изъ слѣдующей или предыдущей такой же дроби, разность будетъ положительна, если уменьшаемое подходящая дробь четнаго порядка, и отрицательна, если уменьшаемое подходящая дробь нечетнаго порядка.

§ 658. **Постепенное приближеніе подходящихъ дробей къ значенію непрерывной.** Въ разсмотрѣнныхъ до сихъ поръ примѣрахъ можно было замѣтить, что, вычисляя для непрерывной дроби по правилу **217** одну за другой подходящія дроби, мы всякій разъ получаемъ рядъ чиселъ, которыя все болѣе и болѣе приближаются къ значенію этой непрерывной дроби; и мы уже упоминали, что послѣдняя подходящая дробь равна этому значенію. Что подходящія дроби вообще и всегда обладаютъ указаннымъ свойствомъ, это видно изъ слѣдующаго предложенія:

 **Теорема.** Значеніе непрерывной дроби ближе къ каждой подходящей дроби ея, чѣмъ къ предыдущей и заключено между ними.

Док. Назовемъ

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}},\ \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}},\ \frac{p_k}{q_k},$$

какъ прежде, (k—2)-ую, (k—1)-ую и k-ую подходящія дроби непрерывной дроби

$$A = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{k-1},\ a_k,\ \ldots,\ a_n)$$

и непрерывную дробь

$$(a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots,\ a_n)$$

буквою b.

По теоремѣ **217**

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}.$$

Если мы здѣсь a_{k+1} замѣнимъ величиною b, то должны будемъ получить A, такъ что значеніе A можетъ быть представлено въ видѣ

$$A = \frac{bp_k + p_{k-1}}{bq_k + q_{k-1}}.$$

Теперь разности между послѣдовательными подходящими дробями $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и $\frac{p_k}{q_k}$ и непрерывною дробью A могутъ быть изображены слѣдующимъ образомъ:

$$d = A - \frac{p_k}{q_k} = \frac{bp_k + p_{k-1}}{bq_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = -\frac{(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)}{q_k(bq_k + q_{k-1})} = -\frac{(-1)^k}{q_k(bq_k + q_{k-1})} \text{ (по теор. 218)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{q_k(bq_k + q_{k-1})};$$

$$d_1 = A - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{bp_k + p_{k-1}}{bq_k + q_{k-1}} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{b(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)}{q_{k-1}(bq_k + q_{k-1})} = \frac{b \cdot (-1)^k}{q_{k-1}(bq_k + q_{k-1})}.$$

Изъ выраженій, полученныхъ для d и d_1, мы видимъ, такъ какъ всѣ буквы въ нихъ означаютъ положительныя числа, что d и d_1 имѣютъ противоположные знаки, что, слѣдовательно, одна изъ подходящихъ дробей $\frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ больше A, а другая меньше A.

Этимъ и доказана вторая часть утвержденія.

А такъ какъ $b > 1$ и по закону послѣдовательныхъ вычисленій числителей и знаменателей подходящихъ дробей [217]

$$q_k > q_{k-1},$$

то абсолютное значеніе числителя въ выраженіи для d меньше абсолютнаго значенія числителя въ выраженіи для d_1, знаменатель же въ первомъ выраженіи больше, чѣмъ во второмъ. Изъ этого же слѣдуетъ, что

$$|\, d \,| < |\, d_1 \,|,$$

чѣмъ доказана и первая часть утвержденія.

§ 659. **Подходящія дроби нечетнаго и четнаго порядка.**

Теорема. Всѣ подходящія дроби нечетнаго порядка меньше непрерывной дроби и постепенно увеличиваются, всѣ же подходящія дроби четнаго порядка больше ея и постепенно уменьшаются. 

Док. Доказывая предыдущую теорему, мы между прочимъ выяснили, что изъ двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей всегда одна меньше, а другая больше значенія непрерывной дроби. Изобразивъ непрерывную дробь въ общемъ видѣ, какъ прежде, слѣдующимъ образомъ:

$$A=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}},$$

мы видимъ, что первая подходящая дробь ея, a_1 или $\frac{a_1}{1}$, меньше ея. Слѣдовательно, вторая подходящая дробь ея должна быть, по предыдущей теоремѣ, больше ея, третья меньше, четвертая опять больше, и т. д., то есть, какъ и утверждалось, всѣ подходящія дроби нечетнаго порядка должны быть меньше, а всѣ подходящія дроби четнаго порядка больше ея.

Согласно предыдущей же теоремѣ, и подходящія дроби нечетнаго порядка и подходящія дроби четнаго порядка постепенно приближаются къ значенію непрерывной дроби. А это возможно только при такомъ условіи, что первыя изъ нихъ постепенно увеличиваются, а послѣднія постепенно уменьшаются. Этимъ доказана и остальная часть утвержденія.

Слѣдствіе 1. Между первыми двумя подходящими дробями заключены всѣ остальныя и значеніе самой непрерывной дроби.

Слѣдствіе 2. Между подходящими дробями непрерывной дроби не можетъ быть заключено ни одного цѣлаго числа.

§ 660. Степень точности подходящихъ дробей.

224 **Теорема.** Значеніе непрерывной дроби отличается отъ всякой подходящей дроби ея менѣе, чѣмъ на 1, дѣленную на произведеніе знаменателя этой подходящей дроби на знаменателя слѣдующей.

Предп. $\frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ двѣ послѣдовательныя подходящія дроби непрерывной дроби.

$$A=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots a_n).$$

Утв.

$$\left|A-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_kq_{k+1}}.$$

Док. По теоремѣ **222** A заключается между $\frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$. Слѣдовательно,

$$\left| A - \frac{p_k}{q_k} \right| < \left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right|$$

Но $\left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}$ по теор. **221**.

Подставляя, мы убѣждаемся, что и дѣйствительно

$$\left| A - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что и подавно подходящею дробью достигается такая степень точности:

Слѣдствіе. Значеніе непрерывной дроби отличается отъ какой-либо подходящей дроби ея меньше, чѣмъ на обратную величину квадрата знаменателя этой подходящей дроби. **225**

§ 661. **Преимущества приближеній, достигаемыхъ подходящими дробями.**

Теорема. У всякой дроби, которая меньше отличается отъ значенія непрерывной дроби, чѣмъ подходящая дробь, и знаменатель и числитель больше, чѣмъ у послѣдней. **226**

Предп. Дробь $\frac{x}{y}$ меньше отличается отъ значенія непрерывной дроби A, чѣмъ подходящая дробь $\frac{p_k}{q_k}$.

Утв.

$$y > q_k$$
$$x > p_k.$$

Док. Подходящая дробь $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, предшествующая $\frac{p_k}{q_k}$, должна, по теоремѣ **222**, больше отличаться отъ A, чѣмъ $\frac{p_k}{q_k}$. Слѣдовательно, $\frac{x}{y}$ заключается между $\frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, и поэтому абсолютное значеніе разности $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$

больше абсолютнаго значенія разности $\frac{x}{y}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и обѣ онѣ имѣютъ одинаковые знаки. Первая изъ нихъ равна $\frac{p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k}{q_kq_{k-1}}=\frac{(-1)^k}{q_kq_{k-1}}$ [теор. 221], вторая же выраженію $\frac{xq_{k-1}-yp_{k-1}}{yq_{k-1}}$. При четномъ k упомянутое неравенство разностей могло бы быть выражено такъ:

$$\frac{(-1)^k}{q_kq_{k-1}}>\frac{xq_{k-1}-yp_{k-1}}{yq_{k-1}}$$

или же и слѣдующимъ образомъ, остающимся справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда k нечетное число:

$$\frac{1}{q_kq_{k-1}}>\frac{xq_{k-1}-yp_{k-1}}{yq_{k-1}}.(-1)^k.$$

Умноживъ это неравенство на выраженіе $q_{k-1}y$, которое всегда положительно, мы находимъ:

$$\frac{y}{q_k}>(xq_{k-1}-yp_{k-1}).(-1)^k.$$

Множитель $(xq_{k-1}-yp_{k-1})$ въ правой части полученнаго неравенства не равенъ 0, ибо могъ бы быть равнымъ 0 только при условіи, что $\frac{x}{y}=\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, не допускаемомъ предположеніемъ. Все же произведеніе въ правой части положительно, такъ какъ при четномъ k оба сомножителя положительны, при нечетномъ k оба отрицательны. А такъ какъ всѣ буквы въ неравенствѣ означаютъ цѣлыя числа, то правая часть его не меньше 1. Слѣдовательно,

$$\frac{y}{q_k}>1,$$

а поэтому

$$y>q_k.$$

Такимъ же образомъ доказывается, что

$$x>p_k,$$

стоитъ только начать съ того, что $\frac{y}{x}$ заключается между $\frac{q_k}{p_k}$ и $\frac{q_{k-1}}{p_{k-1}}$ и повторить съ соотвѣтствующими измѣненіями разсужденія, которыми выяснена была справедливость первой части утвержденія.

227 **Слѣдствіе.** Подходящая дробь ближе къ значенію непрерывной дроби, чѣмъ всякая другая дробь съ меньшимъ или тѣмъ же знаменателемъ.

§ 662. **Замѣчанія о примѣненіи подходящихъ дробей.** Вычисляемыя одна послѣ другой подходящія дроби все ближе и ближе подходятъ по величинѣ своей къ значенію непрерывной дроби. Онѣ являются такимъ образомъ приближенными значеніями послѣдней, которыми часто предпочитаютъ пользоваться вмѣсто ея дѣйствительнаго значенія. Степень достигаемой точности при этомъ можетъ быть опредѣлена по теоремѣ **224** или слѣдствію изъ нея [**225**]: согласно ей подходящая дробь $\frac{p_k}{q_k}$ выражаетъ непрерывную дробь съ точностью до $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$; пока же частный знаменатель q_{k+1} не вычисленъ, можно сказать только, что $\frac{p_k}{q_k}$ выражаетъ непрерывную дробь съ точностью нѣсколько большею, чѣмъ до $\frac{1}{q_k^2}$.

Подходящія дроби суть, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго параграфа, наиудобнѣйшія приближенныя значенія непрерывной дроби въ томъ смыслѣ, что никакою другою дробью съ меньшимъ числителемъ или знаменателемъ нельзя достигнуть той степени приближенія, какую даетъ подходящая дробь. Какъ интересный примѣръ приведемъ, что извѣстныя приближенныя значенія Архимеда $\left(\frac{22}{7}\right)$ и Меція $\left(\frac{355}{113}\right)$ для ирраціональнаго отношенія π окружности къ ея діаметру оказываются подходящими дробями непрерывной дроби, выражающей это отношеніе. Превративъ число 3,141 592 653 6, выражающее π съ точностью до $\frac{1}{10^{10}}$ (съ избыткомъ) въ непрерывную дробь, мы находимъ:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

а отсюда подходящія дроби

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \ldots$$

Изъ нихъ $\frac{22}{7}$ выражаетъ π съ точностью до $\frac{1}{7.106} = \frac{1}{742}$, дробь же $\frac{355}{113}$ съ точностью до $\frac{1}{113.(292.113+106)} = \frac{1}{3740526}$, т. е. большею, чѣмъ до одной трехмилліонной.

Но строго говоря, мы, принимая во вниманіе способъ вычисленія, имѣли бы право только сказать, что съ этою точностью вычислена приведенная выше десятичная дробь. Если же мы отнесли сказанное прямо къ π, то имѣли на это такое основаніе.

Увеличивая степень точности тѣхъ десятичныхъ дробей, которыми мы выражаемъ π (или же и другое какое-либо ирраціональное число), и превращая всякую *приближенную* десятичную дробь въ непрерывную, мы получимъ рядъ послѣдняго рода дробей, выражающихъ это ирраціональное число все точнѣе и точнѣе въ той же мѣрѣ, какъ и эти десятичныя дроби. Въ первыхъ непрерывныхъ дробяхъ, получаемыхъ, такимъ образомъ, одинаковымъ будетъ только первое неполное частное, въ слѣдующихъ общимъ будетъ и второе, затѣмъ и третье и т. д. Постепенно число такихъ *общихъ* неполныхъ частныхъ все растетъ и растетъ, такъ что этимъ способомъ устанавливается *одна* непрерывная дробь съ возрастающимъ все болѣе и болѣе числомъ звеньевъ. Изъ способа же полученія такой непрерывной дроби мы должны заключить, что послѣ каждаго опредѣлившагося уже звена должно ожидать еще одно, и такъ безъ конца, и что съ увеличеніемъ числа послѣднихъ степень точности, съ которою эта непрерывная дробь выражаетъ ирраціональное число должна увеличиваться.

Въ слѣдующей главѣ будетъ выяснено, что дѣйствительно понятіе о непрерывной дроби съ пользою можетъ быть расширено такъ, что дѣлается возможнымъ при помощи подходящихъ дробей выражать ирраціональныя числа съ любою степенью точности.

Неполныя частныя, которыми мы воспользовались для вычисленія подходящихъ дробей, выражающихъ приближенно π, принадлежатъ къ числу такихъ уже установившихся общихъ, о которыхъ была рѣчь выше. Поэтому мы и имѣли право говорить, что именно π выражается приведенными тамъ подходящими дробями съ указанною степенью точности.

ГЛАВА V.

Безконечныя непрерывныя дроби.

§ 663. **Опредѣленіе.** Непрерывная дробь, въ которой мы представляемъ себѣ послѣ каждаго неполнаго частнаго существующимъ еще одно, и такъ безъ конца, можетъ быть въ сжатой формѣ опредѣлена такъ:


228 **Опредѣленіе.** Безконечною называется непрерывная дробь съ безконечнымъ числомъ звеньевъ.

§ 664. **Существенная разница между конечными и безконечными непрерывными дробями.** Эта разница выясняется слѣдующими предложеніями, которымъ, во избѣжаніе повтореній, предпошлемъ замѣчаніе, что и здѣсь всякое число, превращаемое въ непрерывную дробь или равное таковой, должно считаться абсолютнымъ (или положительнымъ).

Теорема 1. Конечная непрерывная дробь равна всегда раціональной дроби.

Док. Въ предыдущей главѣ было выяснено, что превративъ конечную непрерывную дробь при помощи подходящихъ дробей въ простую, мы получимъ всегда несократимую дробь. Изъ этого и слѣдуетъ справедливость утвержденія.

Цѣлое число непрерывная дробь означала бы только въ томъ частномъ случаѣ, когда бы она состояла всего только изъ перваго цѣлаго члена и не имѣла ни одного звена, слѣдовательно, перестала бы вообще быть непрерывной дробью.

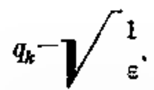
Слѣдствіе. Цѣлое число не можетъ быть превращено въ некрерывную дробь.

Теорема 2. Раціональная дробь можетъ быть превращена только въ конечную непрерывную дробь.

Док. Превращеніе раціональной дроби въ непрерывную состоитъ въ производствѣ послѣдовательныхъ дѣленій [§ 649], которыя всегда кончаются остаткомъ 0. Слѣдовательно, всякая раціональная дробь превращается въ конечную, которая притомъ всегда и единственная, такъ какъ [§ 650] развертываніе раціональной дроби въ непрерывную возможно только въ одномъ видѣ. Этимъ и доказана справедливость утвержденія

Теорема 3. Безконечною непрерывною дробью опредѣляется ирраціональное число.

Док. Положимъ, что дана нѣкоторая безконечная непрерывная дробь, т. е., что извѣстенъ способъ вычисленія каждаго неполнаго частнаго ея. Ея подходящія дроби нечетнаго порядка составятъ безграничный рядъ чиселъ, постепенно все возрастающихъ, подходящія же дроби ея четнаго порядка безграничный рядъ чиселъ, постепенно все уменьшающихся [теор. 223]. По закону послѣдовательнаго вычисленія подходящихъ дробей знаменатели ихъ дѣлаются все больше и больше, почему разность $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$ между двумя послѣдовательными такими дробями дѣлается все меньше и меньше. Изъ двухъ же послѣдовательныхъ подходящихъ дробей всегда одна принадлежитъ къ одному изъ названныхъ рядовъ, а другая къ другому. Слѣдовательно, въ этихъ рядахъ есть сколько угодно чиселъ такого свойства, что разность между числомъ изъ одного ряда и числомъ изъ другого ряда можетъ быть сдѣлана произвольно малою по абсолютной величинѣ своей. Если мы, напр., пожелаемъ, чтобы эта разность была меньше любого даннаго числа ε, то достаточно взять



$$q_k - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

чтобы было

$$\frac{1}{q_k^2}-\varepsilon,$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{q_k q_{k+1}}<\varepsilon \text{ [теор. 225]}.$$

Изъ всего сказаннаго видно, что для всякой безконечной непрерывной дроби рядъ подходящихъ дробей нечетнаго порядка и рядъ подходящихъ дробей четнаго порядка составляютъ два ряда чиселъ, обладающихъ всѣми свойствами двухъ сходящихся послѣдовательностей [см. опредѣленіе въ § 209].

По теоремѣ же, доказанной въ § 210, такія двѣ послѣдовательности всегда опредѣляютъ сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ, слѣдовательно, нѣкоторое вещественное число.

Цѣлымъ это число въ данномъ случаѣ быть не можетъ по слѣдствію 2 изъ теоремы **223**

Дробью оно быть не можетъ по предыдущей теоремѣ. Слѣдовательно, оно можетъ быть только ирраціональнымъ числомъ.

А такъ какъ названныя два ряда подходящихъ дробей, составляющихъ двѣ сходящіяся послѣдовательности, опредѣляются данною безконечною непрерывною дробью, то мы и имѣемъ право сказать, какъ утверждалось, что безконечною непрерывною дробью опредѣляется ирраціональное число.

Примѣры.

1) Значеніе безконечной непрерывной дроби, которой неполныя частныя составляютъ рядъ натуральныхъ чиселъ, есть ирраціональное число.

2) Ирраціональное же число означаетъ безконечная непрерывная дробь, въ которой неполныя частныя суть числа натуральнаго ряда 1, затѣмъ 1, 2, 2, 1, затѣмъ числа отъ 1 до 3 и отъ 3 до 1 въ обратномъ порядкѣ, послѣ этого отъ 1 до 4 и отъ 4 до 1 въ обратномъ порядкѣ, и т. д. безъ конца, то есть непрерывная дробь

$$(1,1,2,2,1,1,2,3,3,2,1,1,2,3,4,4,3,2,1,1,2,\ldots)$$

3) Такого же рода число означаетъ безконечная непрерывная дробь, данная условіемъ, чтобы k-ое неполное частное ея (т. е. каждое) вычислялось по формулѣ $1-k+k^2$, значитъ непрерывная дробь $(1, 3, 7, 13, 21, 31, \ldots)$.

Такимъ образомъ можно придумать сколько угодно безконечныхъ непрерывныхъ дробей, т. е. сколько угодно законовъ вычисленія неполныхъ частныхъ ихъ; и каждая такая безконечная непрерывная дробь будетъ означать нѣкоторое опредѣленное ирраціональное число.

Теорема 4. Ирраціональное число не можетъ равняться конечной непрерывной дроби.

Док. Всякая конечная непрерывная дробь можетъ быть превращена въ простую дробь, слѣдовательно, въ раціональное число, которое не можетъ быть равнымъ ирраціональному. Изъ этого и слѣдуетъ справедливость утвержденія.

Теорема 5. Всякое ирраціональное число можетъ быть превращено въ безконечную непрерывную дробь.

Док. Если ирраціональное число дано, т. е., если извѣстно его происхожденіе, то бываютъ извѣстны и послѣдовательныя два цѣлыя числа, между которыми оно заключено. Положимъ, что данное ирраціональное число есть α, а цѣлыя числа, заключающія его a_1 и a_1+1. Въ такомъ случаѣ α можно представить въ видѣ

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

гдѣ x_1 можетъ быть только ирраціональнымъ числомъ, бо́льшимъ притомъ, чѣмъ 1. Способомъ, зависящимъ отъ происхожденія числа α (а если этотъ способъ окажется слишкомъ неудобнымъ, то и способомъ, изложеннымъ въ § 207), можетъ быть опредѣлено, между какими послѣдовательными цѣлыми числами заключается x_1. Назвавъ меньшее изъ нихъ a_2, мы α можемъ представить въ видѣ:

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}},$$

гдѣ x_2 опять ирраціональное число большее, чѣмъ 1. Опредѣливъ теперь тѣ два послѣдовательныя цѣлыя числа, между которыми заключается x_2, и продолжая вообще примѣнять все тѣ же описанные пріемы, мы и будемъ получать одно послѣ другого неполныя частныя, которыхъ число, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущей теоремы, должно быть безконечно велико.

§ 665. **Примѣръ превращенія ирраціональнаго логариѳма въ непрерывную дробь.** Содержащіяся въ доказательствѣ послѣдней теоремы указанія относительно превращенія ирраціональнаго числа въ непрерывную дробь примѣнимъ сначала къ ирраціональному логариѳму.

Положимъ, что требуется преобразовать такимъ образомъ $\log_2 5$. Назвавъ это число x, мы изъ равенства

$$x = \log_2 5$$

по опредѣленію логариѳма находимъ болѣе удобный видъ условія, которому должно удовлетворять x, въ уравненіи

$$2^x = 5. \qquad (1)$$

Изъ него мы легко находимъ, что x заключается между 2 и 3.

Полагая поэтому

$$x=2+\frac{1}{x_1} \qquad (\alpha),$$

мы уравненіе (1) можемъ представить въ видѣ:

$$2^{2+\frac{1}{x_1}}=5,$$

который еще замѣняемъ слѣдующими:

$$2^2 \cdot 2^{\frac{1}{x_1}}=5$$

$$2^{\frac{1}{x_1}}=\frac{5}{4}$$

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{x_1} \qquad (2).$$

Путемъ испытаній можно убѣдиться, что показатель x_1 долженъ заключаться между 3 и 4.

Полагая поэтому

$$x_1=3+\frac{1}{x_2} \qquad (\beta),$$

мы уравненіе (2) можемъ представить въ видѣ:

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{x_2}},$$

который замѣняемъ слѣдующими:

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x_2}}$$

$$\frac{128}{125}=\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x_2}}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{x_2}=\frac{5}{4} \qquad (3).$$

Теперь мы ,опять путемъ испытаній, можемъ убѣдиться, что x_2 больше 9, но меньше 10, и полагаемъ поэтому

$$x_2=9+\frac{1}{x_3} \qquad (\gamma).$$

Подставивъ это выраженіе вмѣсто x_2 въ уравненіе (3) и продолжая вычисленія тѣмъ же изложеннымъ съ достаточною подробностью способомъ, мы находимъ

$$x_3=2+\frac{1}{x_4} \qquad (\delta),$$

а затѣмъ такимъ же образомъ:

$$x_4=2+\frac{1}{x_5} \qquad (\varepsilon).$$

и т. д.

Посредствомъ послѣдокательной подстановки въ уравненіе (α) полученныхъ для x_1, x_2, x_3 и т. д. выраженій (β), (γ), (δ) и т. д. мы находимъ:

$$x=\log_2 5=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

Подходящія дроби этой непрерывной дроби суть:

$$\frac{2}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{65}{28},\ \frac{137}{59},\ \frac{339}{146},\ldots .$$

Слѣдовательно, послѣдняя изъ этихъ дробей, т. е. $\frac{339}{146}$, выражаетъ $\log_2 5$ съ точностью лучшею, чѣмъ до $\frac{1}{146^2}=\frac{1}{21316}$ [225].

§ 666. **Превращеніе ирраціональнаго квадратнаго корня въ непрерывную дробь** покажемъ на примѣрѣ преобразованія въ таковую $\sqrt{23}$.

Этотъ ирраціональный корень заключается между 4 и 5. Поэтому мы полагаемъ

$$\sqrt{23}=4+\frac{1}{x_1}$$

и находимъ отсюда

$$\frac{1}{x_1}=\sqrt{23}-4.$$

слѣд.,

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{23}-4}=\frac{\sqrt{23}+4}{(\sqrt{23}+4)(\sqrt{23}-4)}=\frac{\sqrt{23}+4}{7}.$$

Такъ какъ значеніе послѣдняго выраженія заключается между 1 и 2, то мы полагаемъ далѣе

$$\frac{\sqrt{23}+4}{7}=1+\frac{1}{x_2}$$

и опредѣляемъ изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія x_2 путемъ тѣхъ же пріемовъ, при помощи которыхъ мы нашли x_1. Такъ какъ теперь уже должно быть совершенно ясно, какъ должно продолжать требуемое преобразованіе, то мы произведемъ дальнѣйшія вычисленія безъ объясненій, но расположивъ ихъ вмѣстѣ съ произведенными уже вычисленіями въ порядкѣ, который хорошо запомнить какъ схему для превращенія ирраціональнаго квадратнаго корня въ непрерывную дробь:

$$\sqrt{23}=4+\frac{1}{x_1}.$$

$$\frac{1}{x_1}=\sqrt{23}-4;\ x_1=\frac{1}{\sqrt{23}-4}=\frac{\sqrt{23}+4}{(\sqrt{23}-4)(\sqrt{23}+4)}=\frac{\sqrt{23}+4}{7}=1+\frac{1}{x_2}.$$

$$\frac{1}{x_2}=\frac{\sqrt{23}-3}{7};\ x_2=\frac{7}{\sqrt{23}-3}=\frac{7(\sqrt{23}+3)}{14}=\frac{\sqrt{23}+3}{2}=3+\frac{1}{x_3};$$

$$\frac{1}{x_3}=\frac{\sqrt{23}-3}{2};\ x_3=\frac{2}{\sqrt{23}-3}=\frac{2(\sqrt{23}+3)}{14}=\frac{\sqrt{23}+3}{7}=1+\frac{1}{x_4}$$

$$\frac{1}{x_4}=\frac{\sqrt{23}-4}{7};\ x_4=\frac{7}{\sqrt{23}-4}=\frac{7(\sqrt{23}+4)}{7}=\sqrt{23}+4=8+\frac{1}{x_5};$$

$$\frac{1}{x_5}=\sqrt{23}-4;\ x_5=x_1$$

Такъ какъ оказалось, что $x_5=x_1$, то неполныя частныя 1. 3. 1, 8 должны будутъ все снова и снова повторяться. Непрерывная же дробь, которую требовалось отыскать, оказалась слѣдующею:

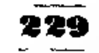
$$\sqrt{23}=4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\ldots}}}}}}}}$$

Такимъ образомъ въ данномъ случаѣ съ особенною отчетливостью видно, что непрерывная дробь, въ которую мы превратили ирраціональное число, безконечна.

Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ мы познакомились съ особымъ видомъ безконечной непрерывной дроби, напоминающимъ періодическія десятичныя

дроби. Разсмотрѣнію такого рода непрерывныхъ дробей въ общемъ видѣ мы предпослали этотъ частный случай для облегченія пониманія предстоящаго изложенія. Для той же цѣли покажемъ также сначала на частномъ примѣрѣ, что значеніе безконечной непрерывной дроби съ періодически повторяющимися неполными частными можетъ быть выражено въ конечной формѣ, предпославъ только этому примѣру опредѣленіе понятій, о которыхъ теперь идетъ рѣчь

§ 667. **Періодическая непрерывная дробь.**

Опредѣленіе. Періодическою называется безконечная непрерывная дробь, въ которой, начиная съ какого-либо мѣста, повторяются все одни и тѣ же неполныя частныя въ одномъ и томъ же порядкѣ. Она называется чистою періодическою, если группа повторяющихся неполныхъ частныхъ начинается съ перваго, и смѣшанною періодическою, если эта группа начинается не съ перваго неполнаго частнаго. 

Такъ, напр.,

$$8+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\ldots}}}}}}$$

есть чистая періодическая непрерывная дробь, а

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}}}$$

смѣшанная.

§ 668. **Примѣръ опредѣленія значенія періодической непрерывной дроби.** Намъ удастся показать нагляднѣе всего, въ чемъ состоитъ отысканіе

такого значенія, если мы превратимъ обратно въ ирраціональный квадратный корень ту періодическую непрерывную дробь, которую мы получили выше для $\sqrt{23}$.

Если мы значеніе названной дроби (4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8,...) обозначимъ буквою x, значеніе же непрерывной дроби, состоящей только изъ повторяющихся неполныхъ частныхъ, буквою y, то мы можемъ сказать, что

$$x=4+\frac{1}{y},$$

а

$$y=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{y}}}}.$$

Подходящія дроби послѣдней непрерывной дроби суть:

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{44}{35},\ \frac{44y+5}{35y+4}.$$

Послѣдняя изъ нихъ, очевидно, равна y. А изъ уравненія

$$y=\frac{44y+5}{35y+4}$$

мы можемъ найти значеніе названнаго неизвѣстнаго. Рѣшая это уравненіе обычнымъ способомъ, мы находимъ:

$$35y^2+4y=44y+5$$

$$35y^2-40y-5=0$$

$$7y^2-8y-1=0$$

$$y=\frac{4\pm\sqrt{23}}{7}.$$

Такъ какъ разсматриваемая непрерывная дробь содержитъ только положительныя звенья, то изъ полученныхъ корней для насъ годится только

$$y=\frac{4+\sqrt{23}}{7}.$$

Подставивъ это значеніе вмѣсто y въ выраженіе для x, мы находимъ:

$$x=4+\frac{7}{4+\sqrt{23}}=4+\frac{7(\sqrt{23}-4)}{(\sqrt{23})^2-4^2}=4+\frac{7(\sqrt{23}-4)}{7}=\sqrt{23}.$$

Тогда какъ безконечная непрерывная дробь, въ которую мы превратили

въ § 665 $log_2 5$, не допускаетъ обратнаго превращенія ея въ первоначальный видъ ирраціональнаго числа, выражаемаго ею, въ данномъ случаѣ это оказалось возможнымъ.

Объ указанномъ свойствѣ періодическихъ непрерывныхъ дробей, которое мы пояснили разсмотрѣннымъ примѣромъ, мы и будемъ теперь говорить въ общемъ видѣ.

§ 669. Видъ ирраціональныхъ чиселъ, въ которыя превращаются періодическія непрерывныя дроби.

Теорема. Всякая періодическая непрерывная дробь равна положительному числу вида $a+b\sqrt{c}$, гдѣ c означаетъ положительное цѣлое число, но не квадратъ, a раціональное число и b раціональное число, но не 0.

Док. Если непрерывная дробь чистая періодическая, то мы ее можемъ въ общемъ видѣ представить такимъ образомъ:

$$y = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{y}}}}},$$

указывая этимъ, что послѣ a_k опять начинается періодъ неполныхъ частныхъ. Назвавъ, какъ прежде, $(k-1)$-ую и k-ую подходящія дроби $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ и $\frac{p_k}{q_k}$ и образовавъ по закону послѣдовательнаго вычисленія подходящихъ дробей $(k+1)$-ую, но съ замѣною въ ней $(k+1)$-аго неполнаго частнаго y-омъ, мы имѣемъ.

$$y = \frac{p_k y + p_{k-1}}{q_k y + q_{k-1}},$$

а отсюда

$$q_k y^2 - (p_k - q_{k-1}) y - p_{k-1} = 0.$$

Такъ какъ p_{k-1} и q_k положительны, то изъ знака — передъ свободнымъ членомъ полученнаго уравненія мы заключаемъ, что корни этого уравненія вещественны и одинъ изъ нихъ положительный, а другой отрицательный.

Первый изъ нихъ

$$y = \frac{p_k - q_{k-1}}{2q_k} + \frac{1}{2q_k}\sqrt{(p_k - q_{k-1})^2 + 4p_{k-1}q_k}$$

и есть значеніе непрерывной дроби, которое по 3-ьей изъ теоремъ, доказанныхъ въ § 664, должно быть ирраціональнымъ.

Назвавъ въ полученномъ для y выраженіи первый членъ a, множителя передъ радикаломъ b, а подкоренное число c, мы этими буквами обозначили числа названныхъ въ теоремѣ свойствъ и видимъ, что теорема доказана для случая, что періодическая непрерывная дробь чистая.

Если она смѣшанная, то мы ее можемъ въ общемъ видѣ изобразить такъ:

$$x=b_1+\cfrac{1}{b_2+\cdots+\cfrac{1}{b_h+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_k+\cfrac{1}{a_1+\cdots}}}}}}$$

или вмѣсто этого такъ:

$$x=b_1+\cfrac{1}{b_2+\cdots+\cfrac{1}{b_h+\cfrac{1}{y}}},$$

понимая подъ y чистую періодическую непрерывную дробь

$$y=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_k+\cfrac{1}{y}}}.$$

Назвавъ $(h-1)$-ую и h-ую подходящія дроби непрерывной дроби, равной x, $\frac{p_{h-1}}{q_{h-1}}$ и $\frac{p_h}{q_h}$, мы для x находимъ, какъ выше для y,

$$x=\frac{p_h y+p_{h-1}}{q_h y+q_{h-1}}.$$

Подставивъ сюда $a+b\sqrt{c}$ вмѣсто y и уничтоживъ ирраціональность въ знаменателѣ, мы получимъ опять выраженіе вида $a+b\sqrt{c}$, которое по приведенной уже теоремѣ также должно быть ирраціональнымъ.

Такъ теорема доказана и для случая, что непрерывная дробь смѣшанная періодическая

§ 670. **Примѣры превращенія періодической непрерывной дроби въ сложное ирраціональное выраженіе.** Положимъ, что требуется найти значеніе періодической непрерывной дроби

$$(2,\ 2,\ 8,\ \underbrace{13,\ 8,\ 1,\ 2,\ 1,\ 8},\ 13,\ 8,\ldots),$$

въ которой періодъ обозначенъ витою скобкою. Обозначивъ значеніе этой дроби буквою x, а значеніе чистой періодической непрерывной дроби (13, 8, 1, 2, 1, 8, 13, 8, ...) буквою y, мы имѣемъ,

$$x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{y}}},$$

$$y=13+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{y}}}}}}.$$

Подходящія дроби для y слѣдующія,

$$\frac{13}{1},\ \frac{105}{8},\ \frac{118}{9},\ \frac{341}{26},\ \frac{459}{35},\ \frac{4013}{306},\ \frac{4013y+459}{306y+35}.$$

Слѣдовательно, y получается изъ уравненія:

$$y=\frac{4013y+459}{306y+35},$$

которое сначала приводится къ виду:

$$306y^2-3978y-459=0,$$

а послѣ дѣленія на 153 къ такому::

$$2y^2-26y-3=0.$$

Положительный корень этого уравненія, который въ данномъ случаѣ только и годится, есть

$$y=\frac{13+5\sqrt{7}}{2}.$$

Подходящія дроби для x слѣдующія:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{42}{17},\ \frac{42y+5}{17y+2}.$$

Слѣдовательно,

$$x=\frac{42y+5}{17y+2}.$$

Подставивъ сюда полученное для y значеніе и уничтоживъ ирраціональность въ знаменателѣ, мы находимъ:

$$x=3-\frac{1}{5}\sqrt{7}.$$

Такимъ же образомъ смѣшанная періодическая непрерывная дробь

$$(3, 1, 2, 1, 5, 4, 5, 4, \ldots),$$

въ которой періодъ состоитъ изъ неполныхъ частныхъ 5 и 4, превращается въ равное ей ирраціональное число

$$\frac{361+\sqrt{30}}{98}.$$

§ 671. **Превратимость въ періодическую непрерывную дробь ирраціональнаго квадратнаго корня и численныхъ выраженій низшихъ разрядовъ, которыя содержатъ такой корень.** Указываемая этимъ заголовкомъ истина относится какъ къ ирраціональнымъ квадратнымъ корнямъ, которыхъ подкоренное число цѣлое, такъ и къ такимъ, у которыхъ это число дробное. Но удобнѣе доказать эту истину сначала только для перваго случая. Второй же будетъ содержаться какъ частный случай во второй изъ доказываемыхъ нами здѣсь теоремъ.

Теорема 1. Всякій ирраціональный квадратный корень изъ цѣлаго числа равенъ періодической непрерывной дроби.

Док. Положимъ, что N есть цѣлое число, но не квадратъ цѣлаго числа. Въ такомъ случаѣ $\sqrt{N}$ будетъ ирраціональное число, которое назовемъ x. Назвавъ a_1 меньшее изъ обоихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, между которыми заключается $\sqrt{N}$, положимъ

$$x=\sqrt{N}=a_1+\frac{1}{x_1},$$

въ какомъ случаѣ, конечно, должно быть

$$x_1>1.$$

Разсуждая теперь, какъ и въ примѣрѣ въ § 666, мы имѣемъ

$$\frac{1}{x_1} = \sqrt{N} - a_1,$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{N} - a_1} = \frac{\sqrt{N} + a_1}{N - a_1^2} = \frac{\sqrt{N} + a_1}{r_1} = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

гдѣ

$$x_2 > 1,$$

a_2 означаетъ меньшее изъ обоихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, между которыми заключается $x_1 = \frac{\sqrt{N} + a_1}{r_1}$, а

$$r_1 = N - a_1^2$$

должно быть цѣлое положительное число.

Для неполнаго частнаго x_2 мы изъ выведеннаго выше уравненія имѣемъ:

$$\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{N} + a_1}{r_1} - a_2;$$

$$x_2 = \frac{r_1}{\sqrt{N} - (a_2 r_1 - a_1)} = \frac{r_1[\sqrt{N} + (a_2 r_1 - a_1)]}{N - (a_2 r_1 - a_1)^2} = \frac{\sqrt{N} + (a_2 r_1 - a_1)}{\left\{\frac{N - (a_2 r_1 - a_1)^2}{r_1}\right\}} = \frac{\sqrt{N} + c_2}{\left\{\frac{N - c_2^2}{r_1}\right\}}$$

$$= \frac{\sqrt{N} + c_2}{r_2} = a_3 + \frac{1}{x_3},$$

гдѣ

$$x_3 > 0,$$

a_3 означаетъ меньшее изъ обоихъ послѣдовательныхъ чиселъ, между которыми заключается x_2, а

$$c_2 = a_2 r_1 - a_1$$

и

$$r_2 = \frac{N - c_2^2}{r_1} = \frac{N - (a_2 r_1 - a_1)^2}{r_1}$$

суть цѣлыя положительныя числа, какъ видно изъ слѣдующаго:

Такъ какъ

$$2a_1 + 1 > \sqrt{N} + a_1 > 2a_1,$$

то при опредѣленіи неполнаго частнаго a_2 это число слѣдуетъ брать такимъ, чтобы было

$$2a_1 \geqq a_2 r_1 \geqq a_1 + 1,$$

ибо иначе не можетъ быть, какъ это требуется,

$$1 > \frac{1}{r_2} > 0.$$

Слѣдовательно,

$$a_2 r_1 - a_1 \geqq 1,$$

значитъ $a_2 r_1 - a_1$ положительное число, и, конечно, цѣлое, такъ какъ всѣ буквы въ этомъ выраженiи означаютъ цѣлыя числа.

А r_2 положительное цѣлое число, потому что

$$\frac{\sqrt{N} + a_1}{r_1} > a_2,$$

слѣд.,

$$\sqrt{N} + a_1 > a_2 r_1$$
$$\sqrt{N} > a_2 r_1 - a_1$$
$$N > (a_2 r_1 - a_1)^2,$$

и выраженiе для r_2 можетъ быть преобразовано такъ:

$$r_2 = \frac{N - a_2^2 r_1^2 + 2a_1 a_2 r_1 - a_1^2}{r_1}$$
$$= \frac{(N - a_1^2) + 2a_1 a_2 r_1 - a_2^2 r_1^2}{r_1}$$
$$= \frac{r_1 + 2a_1 a_2 r_1 - a_2^2 r_1^2}{r_1}$$
$$= 1 + 2a_1 a_2 - a_2^2 r_1$$

Подобно тому, какъ выше получены были x_1 и x_2, мы для x_3 имѣемъ:

$$\frac{1}{x_3} = \frac{\sqrt{N} + c_2}{r_2} - a_3;$$

$$x_3 = \frac{r_2}{\sqrt{N} - (a_3 r_2 - c_2)}$$
$$= \frac{r_2[\sqrt{N} + (a_3 r_2 - c_2)]}{N - (a_3 r_2 - c_2)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{N} + (a_3 r_2 - c_2)}{\left\{\frac{N - (a_3 r_2 - c_2)^2}{r_2}\right\}}$$

$$=\frac{\sqrt{N}+c_3}{\left\{\frac{N-c_3^2}{r_2}\right\}}$$

$$=\frac{\sqrt{N}+c_3}{r_3}=a_4+\frac{1}{x_4},$$

гдѣ

$$x_4>1$$

и гдѣ a_4 означаетъ меньшее изъ обоихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, между которыми заключается x_3,

$$c_3=a_3r_2-c_2$$

по совершенно аналогичной причинѣ, какъ и $a_2r_1-a_1$, должно быть положительное число, а

$$r_3=\frac{N-c_3^2}{r_2}$$

положительное и цѣлое число потому, что

$$\frac{\sqrt{N}+c_2}{r_2}>a_3,$$

слѣд.,

$$\sqrt{N}+c_2>a_3r_2$$
$$\sqrt{N}>a_3r_2-c_2$$
$$N>(a_3r_2-c_2)^2,$$

и выраженіе для r_3 можетъ быть преобразовано такъ:

$$r_3=\frac{N-a_3^2r_2^2+2a_3c_2r_2-c_2^2}{r_2}$$
$$=\frac{(N-c_2^2)+2a_3c_2r_2-a_3^2r_2^2}{r_2}$$
$$=\frac{r_1r_2+2a_3c_2r_2-a_3^2r_2^2}{r_2}$$
$$=r_1+2a_3c_2-a_3^2r_2.$$

Совершенно такимъ же образомъ, какъ получено было x_3, можетъ быть найдено, что

$$x_4=\frac{\sqrt{N}+c_4}{r_4}=a_5+\frac{1}{x_5},$$

гдѣ

$$x_5 > 1,$$

a_5 означаетъ меньшее изъ обоихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, между которыми заключается x_4, и гдѣ c_4 и r_4 означаютъ положительныя цѣлыя числа, равныя слѣдующимъ выраженiямъ:

$$c_4 = a_4 r_3 - c_3$$

и

$$r_4 = \frac{N - c_4^2}{r_3}.$$

Законъ, по которому должно продолжать и вообще производить превращенiе $\sqrt{N}$ въ непрерывную дробь, теперь ясенъ и можетъ быть выраженъ при помощи обобщенныхъ формулъ, если мы скажемъ, что вообще должно быть:

$$x_k = \frac{\sqrt{N} + c_k}{r_k} = a_{k+1} + \frac{1}{x_{k+1}}$$

$$c_k = a_k r_{k-1} - c_{k-1}$$

$$r_k = \frac{N - c_k^2}{r_{k-1}}$$

(NB: эти формулы будутъ примѣнимы и для x_1 и x_2, если считать $c_0 = 0$, $r_0 = 1$, слѣд., $c_1 = a_1$),

гдѣ

$$x_{k+1} > 1,$$

a_{k+1} означаетъ меньшее изъ обоихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, между которыми заключается x_k, и гдѣ c_k и r_k, какъ доказано, всегда будутъ положительныя цѣлыя числа.

Изъ уравненiя

$$r_k = \frac{N - c_k^2}{r_{k-1}}$$

мы находимъ:

$$c_k^2 = N - r_k r_{k-1},$$

изъ чего видно, что всегда будетъ

$$c_k < \sqrt{N}$$

А такъ какъ c_k цѣлое число и a_1 наибольшее цѣлое число, квадратъ котораго меньше N, то ясно, что c_k не можетъ быть больше a_1, т. е., что единственно возможныя значенiя c_k суть числа натуральнаго ряда отъ 1 до a_1 включительно.

Какъ

$$c_k = a_k r_{k-1} - c_{k-1},$$

такъ должно быть

$$c_{k+1} = a_{k+1} r_k - c_k,$$

слѣдовательно,

$$a_{k+1} r_k = c_k + c_{k+1}$$

$$r_k = \frac{c_k + c_{k+1}}{a_{k+1}}.$$

Такъ какъ въ послѣднемъ выраженіи каждый изъ членовъ въ числителѣ не больше a_1, знаменатель же положительное цѣлое число, то цѣлое число r_k не можетъ быть больше $2a_1$.

Такимъ образомъ теперь выяснено, что въ выраженіи

$$x_k = \frac{\sqrt{N} + c_k}{r_k}$$

c_k можетъ имѣть только a_1 различныхъ значеній, а r_k различныхъ значеній только $2a_1$, такъ что различныхъ сочетаній c_k съ r_k возможно всего не больше, чѣмъ $a_1 \,.\, 2a_1$, то есть $2a_1^2$.

Слѣдовательно, не позднѣе, какъ послѣ $2a_1^2$ различныхъ выраженій для x_k, должно повториться совершенно такое же, какое уже было. А вмѣстѣ съ тѣмъ должно начаться повтореніе неполныхъ частныхъ въ прежней послѣдовательности, начиная съ повторившагося x_k.

Этимъ и доказано, какъ требовалось, что ирраціональный квадратный корень изъ цѣлаго числа превращается въ періодическую непрерывную дробь.

Слѣдствіе. Если N цѣлое число, но не квадратъ, то число неполныхъ частныхъ, составляющихъ періодъ въ непрерывной дроби, равной $\sqrt{N}$, не больше удвоеннаго ближайшаго къ N цѣлаго квадрата меньшаго, чѣмъ N

Замѣчаніе.

Изъ доказательства послѣдней теоремы слѣдуетъ еще, что когда ирраціональный квадратный корень изложеннымъ способомъ превращается въ непрерывную дробь, то *при всякомъ уничтоженіи въ знаменателѣ ирраціональности дробь должна сокращаться на первоначальнаго числителя*, что важно имѣть въ виду при вычисленіяхъ подобнаго рода.

Теорема 2. Всякое численное выраженіе, въ которомъ встрѣчается (но не въ показателѣ) ирраціональный квадратный корень и въ которомъ числа соединены между собою знаками первыхъ 5 дѣйствій, можетъ быть превращено въ періодическую непрерывную дробь.

Док. Путемъ выполненія указанныхъ дѣйствій, уничтоженія ирраціональности въ знаменателѣ и т. д. всякое такое численное выраженіе, о которомъ говорится въ теоремѣ, можетъ быть приведено къ виду $a+b\sqrt{c}$, гдѣ c положительное цѣлое число, но не квадратъ, b цѣлое или дробное число, но не 0, и a цѣлое число или дробь, или же также къ виду $\frac{k+\sqrt{M}}{l}$, гдѣ M положительное цѣлое число, но не квадратъ, l цѣлое число, но не 0, и k цѣлое число Представимъ себѣ здѣсь означенное численное выраженіе приведеннымъ къ послѣднему виду и разсмотримъ только случай, когда оно положительно, такъ какъ превращеніе отрицательнаго числа въ непрерывную дробь состояло бы въ превращеніи въ таковую абсолютнаго значенія его и снабженіи затѣмъ результата отрицательнымъ знакомъ.

Назвавъ a_1 меньшее изъ обоихъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, между которыми заключается $\frac{k+\sqrt{M}}{l}$, положимъ

$$x=\frac{k+\sqrt{M}}{l}=a_1+\frac{1}{x_1},$$

гдѣ $x_1>1$.

Ходъ отысканія слѣдующихъ неполныхъ частныхъ можетъ быть указанъ слѣдующими равенствами, которыя послѣ доказательства послѣдней теоремы должны быть понятны и безъ объясненія:

$$\frac{1}{x_1}=\frac{\sqrt{M}-(a_1l-k)}{l};$$

$$x_1=\frac{l[\sqrt{M}+(a_1l-k)]}{M-(a_1l-k)^2}=\frac{l\sqrt{M}+l(a_1l-k)}{M-(a_1l-k)^2}=\frac{\sqrt{Ml^2}+c_1}{r_1}=\frac{\sqrt{N}+c_1}{r_1}=a_2+\frac{1}{x_2};$$

$$\frac{1}{x_2}=\frac{\sqrt{N}-(a_2r_1-c_1)}{r_1};$$

$$x_2=\frac{r_1[\sqrt{N}+(a_2r_1-c_1)]}{N-(a_2r_1-c_1)^2}=\frac{r_1[\sqrt{N}+(a_2r_1-c_1)]}{N-c_1^2-a_2^2r_1^2+2a_2c_1r_1}$$

$$=\frac{r_1[\sqrt{N}+(a_2r_1-c_1)]}{Ml^2-l^2(a_1l-k)^2-a_2^2r_1^2+2a_2c_1r_1}=\frac{r_1[\sqrt{N}+(a_2r_1-c_1)]}{l^2[M-(a_1l-k)^2]-a_2^2r_1^2+2a_2c_1r_1}$$

$$=\frac{\sqrt{N}+(a_2r_1-c_1)}{\left\{\frac{l^2r_1-a_2^2r_1^2+2a_2c_1r_1}{r_1}\right\}}=\frac{\sqrt{N}+c_2}{r_2}=a_3+\frac{1}{x_3}.$$

Теперь уже видно, что достаточно продолжить разсужденія такимъ же образомъ, какъ въ предыдущемъ доказательствѣ, чтобы выяснилось, что

непрерывная дробь, равная численному выраженію, которое можетъ быть приведено къ виду $\frac{k+\sqrt{M}}{l}$, должна быть періодической

ГЛАВА VI

Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій при помощи непрерывныхъ дробей.

§ 672 **Почему непрерывныя дроби примѣнимы къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій.** Замѣтимъ предварительно, что всякое неопредѣленное уравненіе первой степени съ 2 неизвѣстными, допускающее цѣлыя рѣшенія, можетъ быть приведено или къ виду

$$ax+by=c$$

или къ виду

$$ax-by=c,$$

гдѣ a и b означаютъ абсолютныя цѣлыя числа и притомъ взаимно-простыя, а c относительное цѣлое число.

Превративъ дробь $\frac{a}{b}$ въ непрерывную и вычисливъ подходящія дроби послѣдней $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}$, мы по теоремѣ **218** имѣемъ.

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$$

или, такъ какъ послѣдняя подходящая дробь есть значеніе непрерывной дроби [§ 651] и поэтому $p_n=a$ и $q_n=b$,

$$aq_{n-1}-bp_{n-1}=(-1)^n.$$

Сравнивъ послѣднее равенство, которое во всякомъ частномъ случаѣ будетъ тождествомъ, съ неопредѣленнымъ уравненіемъ

$$ax\pm by=c,$$

въ которомъ a, b и c означаютъ числа указаннаго выше рода, мы можемъ замѣтить, что это уравненіе можно сдѣлать тождественнымъ съ названнымъ равенствомъ, если послѣднее умножить на $(-1)^n c$, а въ первомъ взять

$$x=(-1)^n cq_{n-1}$$
$$y=\mp(-1)^n cp_{n-1}.$$

Эти значенія для x и y, превращая неопредѣленное уравненіе въ тождество, составляютъ одно рѣшеніе его. А какъ, зная одно рѣшеніе, можно найти общее рѣшеніе и положительныя цѣлыя рѣшенія, это было уже въ свое время подробно разсмотрѣно.

§ 673. **Выводъ.** Изъ изложеннаго мы заключаемъ слѣдующее:

Правило 1. *Чтобы рѣшить неопредѣленное уравненіе*

$$ax \pm by = c$$

при помощи непрерывныхъ дробей, нужно $\frac{a}{b}$ *превратить въ непрерывную дробь и вычислить всѣ подходящія дроби послѣдней. Если предпослѣдняя подходящая дробь равна* $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, *то одно рѣшеніе уравненія есть*

$$x = (-1)^n c q_{n-1}$$
$$y = \mp(-1)^n c p_{n-1};$$

общее же рѣшеніе и положительныя цѣлыя рѣшенія должно отыскивать, какъ и при примѣненіи другихъ способовъ рѣшенія.

Безъ примѣненія же формулъ сказанное можетъ быть выражено такъ:

Правило 2. *Чтобы рѣшить неопредѣленное уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными, нужно отношеніе коэффиціентовъ предъ неизвѣстными превратить въ непрерывную дробь и вычислить подходящія дроби послѣдней. Тогда въ случаѣ, если* ***послѣдняя подходящая дробь четнаго порядка,*** *систему корней, удовлетворяющихъ уравненію, составятъ произведеніе знаменателя предпослѣдней подходящей дроби на свободный членъ, какъ значеніе того неизвѣстнаго, коэффиціентъ предъ которымъ, будучи предварительно сдѣланъ положительнымъ, взятъ былъ предыдущимъ членомъ названнаго отношенія, и какъ значеніе другого неизвѣстнаго произведеніе числителя предпослѣдней подходящей дроби на абсолютную величину свободнаго члена, взятое со знакомъ противоположнымъ тому, который бы имѣло произведеніе свободнаго члена на коэффиціентъ предъ этимъ другимъ неизвѣстнымъ, въ томъ же случаѣ, когда послѣдняя подходящая дробь* ***нечетнаго порядка****, систему корней составятъ тѣ же произведенія, но* ***съ обратными знаками.*** *Общее же рѣшеніе и положительныя цѣлыя рѣшенія должно отыскивать, какъ и при примѣненіи другихъ способовъ рѣшенія.*

Замѣчаніе.

Опредѣленіе знаковъ корней значительно облегчается, если помнить,

что при нахожденіи системы корней разсмотрѣннымъ здѣсь способомъ знаки ихъ должны быть различными у уравненія съ равнозначными коэффиціентами и одинаковыми у уравненія съ разнозначными коэффиціентами.

Примѣры.

Задача 1

Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$57x+17y=7.$$

Рѣшеніе

Превративъ $\frac{57}{17}$ въ непрерывную дробь, мы имѣемъ.

$$\frac{57}{17}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}.$$

Подходящія дроби ея суть:

$$\frac{3}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{57}{17};$$

слѣд., $(-1)^n=(-1)^4=+1$, а потому одно рѣшеніе уравненія составляють значенія неизвѣстныхъ

$$x=3\,.\,7=21$$
$$y=-10\,.\,7=-70,$$

а общій видъ рѣшенія можетъ быть изображенъ такимъ образомъ:

$$x=21-17t$$
$$y=-70+57t.$$

При $t=1$ получаются наименьшія по абсолютной величинѣ цѣлыя числа, удовлетворяющія данному уравненію:

$$x=4$$
$$y=-13,$$

а потому предпочтительнѣе представить рѣшеніе въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ:

$$x=4-17m$$
$$y=-13+57m.$$

Положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній данное уравненіе не допускаетъ.

Задача 2.

Найти цѣлыя рѣшенія уравненія

$$49x-15y=11.$$

Рѣшеніе.

$$\frac{49}{15}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}.$$

Подходящія дроби:

$$\frac{3}{1},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{49}{15}$$

Послѣдняя подходящая дробь 4-ая, значить четнаго порядка; поэтому мы имѣемъ по правилу 2:

$$x=4\,.\,11=44$$
$$y=13\,.\,11=143.$$

Общій видъ рѣшенія:

$$x=44+15t$$
$$y=143+49t.$$

При $t=-2$ получаются наименьшія положительныя цѣлыя числа, удовлетворяющія уравненію, а именно

$$x=14$$
$$y=45,$$

а при $t=-3$ наименьшія возможныя по абсолютной величинѣ цѣлыя числа:

$$x=-1$$
$$y=-4.$$

Поэтому общее рѣшеніе лучше представить въ видѣ:

$$x=14+15k$$
$$y=45+49k$$

или въ видѣ:

$$x=-1+15l$$
$$y=-4+49l$$

Примѣчаніе.

При $k=0$ и при каждомъ положительномъ цѣломъ k, равно какъ при каждомъ положительномъ цѣломъ l получаются положительныя цѣлыя рѣшенія.

Задача 3.

Найти цѣлыя значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія уравненію:

$$19x-71y=15$$

Рѣшеніе.

Перемѣнимъ знаки въ данномъ уравненіи:

$$71y-19x=-15.$$

Превратимъ $\frac{71}{19}$ въ непрерывную дробь:

$$\frac{71}{19}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}.$$

Вычислимъ подходящія дроби:

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{4}{1}, \quad \frac{11}{3}, \quad \frac{15}{4}, \quad \frac{71}{19}.$$

Слѣд., $(-1)^n=(-1)^5=-1$; и поэтому:

$$y=(-4)\,.\,(-15)=60$$
$$x=(-15)\,.\,(-15)=225.$$

Общее рѣшеніе:

$$x=225+71t$$
$$y=60+19t.$$

При $t=-3$ мы получаемъ:

$$x=12$$
$$y=3,$$

откуда наилучшій видъ общаго рѣшенія:

$$x=12+71m$$
$$y=3+19m$$

В. Соединенія и ихъ примѣненія.

ГЛАВА VII.

Перестановки, размѣщенія и сочетанія.

§ 674. **Понятіе о соединеніи и элементѣ.** Изъ данныхъ предметовъ можно образовывать группы. Если въ послѣднихъ будутъ встрѣчаться всѣ предметы, то онѣ могутъ отличаться другъ отъ друга только порядкомъ расположенія предметовъ. Если же при составленіи группъ будетъ браться въ каждую только часть предметовъ, то онѣ могутъ отличаться другъ отъ друга и числомъ предметовъ въ нихъ и выборомъ послѣднихъ и порядкомъ ихъ расположенія.

230 **Опредѣленіе.** При изученіи способовъ составленія предметовъ въ группы и опредѣленіи возможнаго числа послѣднихъ предметы эти называются *элементами.*

Чтобы отличать элементы другъ отъ друга, ихъ обозначаютъ буквами или нумерами. Въ послѣднемъ случаѣ числа нужно понимать какъ порядковыя имена числительныя. Тотъ элементъ называется высшимъ, который обозначенъ бо́льшимъ такимъ числительнымъ или отстоитъ въ данномъ рядѣ элементовъ дальше отъ начала.

231 **Опредѣленіе.** Всякая группа элементовъ называется *соединеніемъ.*

§ 675. **Перестановки.**

232 **Опредѣленіе.** Соединенія, содержащія всѣ данные элементы и отличающіяся другъ отъ друга только порядкомъ расположенія ихъ, называются *перестановками.*

Чтобы получить *всѣ* возможныя перестановки данныхъ элементовъ, можно ихъ образовывать одну послѣ другой въ лексикографическомъ порядкѣ, т. е. въ такомъ, въ какомъ располагаются слова въ словаряхъ. Этотъ порядокъ можно выразить слѣдующимъ правиломъ:

Замѣняется всегда послѣдній изъ элементовъ, имѣющій послѣ себя высшій, ближайшимъ по порядку изъ слѣдующихъ послѣ него высшихъ элементовъ, а послѣ него пишутся остальные элементы *) *въ возрастающемъ* (*алфавитномъ*) *порядкѣ.*

*) NB: конечно, если имѣются.

Пользуясь этимъ правиломъ, мы находимъ, напр., что всѣ возможныя перестановки элементовъ *abcd* суть слѣдующія:

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

§ 676. **Число перестановокъ.**

Теорема. Число перестановокъ, которыя можно образовать изъ n элементовъ, равно произведенію натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n. 233

Док. При образованіи всѣхъ перестановокъ n элементовъ по правилу, приведенному въ предыдущемъ параграфѣ, сначала занимаетъ первое мѣсто первый элементъ, затѣмъ второй, и т. д. до n -аго, при чемъ послѣ каждаго изъ нихъ пишутся всѣ перестановки остальныхъ $(n-1)$ элементовъ. Изъ этого слѣдуетъ, что n элементовъ допускаютъ въ n разъ больше перестановокъ, чѣмъ $(n-1)$ элементовъ.

Если число всѣхъ перестановокъ, которыя можно образовать изъ n элементовъ, обозначимъ знакомъ P_n, число перестановокъ, допускаемыхъ $(n-1)$ элементами, знакомъ P_{n-1}, и т. д., то сказанное можно выразить равенствомъ:

$$P_n = n \,.\, P_{n-1}.$$

Такимъ же образомъ должно быть:

$$\begin{aligned} P_{n-1} &= (n-1)P_{n-2} \\ P_{n-2} &= (n-2)P_{n-3} \\ &\;\;\vdots \\ P_3 &= 3P_2 \\ P_2 &= 2P_1 \end{aligned}$$

и, наконецъ,

$$P_1 = 1,$$

такъ какъ одинъ элементъ можетъ считаться дающимъ только одну перестановку. Подставляя въ первое изъ этихъ уравненій послѣдовательно выраженія для P_{n-1}, P_{n-2} и т. д. изъ остальныхъ, мы получаемъ:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1,$$

чѣмъ теорема и доказана.

§ 677. **Упрощенный видъ формулы для числа перестановокъ.** Для обозначенія произведенія всѣхъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n существуетъ ***символъ n!***, который ***читаютъ „факторіалъ n.“*** Пользуясь этимъ сокращеннымъ изображеніемъ такого произведенія, мы можемъ формулу для числа перестановокъ, которыя можно образовать изъ n элементовъ, написать такъ:

233a **Формула:** $P_n = n!$

§ 678. **Перестановки съ повтореніями.** Послѣдняя формула справедлива только для того случая, когда всѣ n переставляемыхъ элементовъ различны. Если же изъ нихъ часть, напр., x элементовъ будутъ одинаковыми между собою, то число всѣхъ возможныхъ перестановокъ будетъ нѣсколько меньше; такъ какъ всѣ тѣ перестановки, въ которыхъ встрѣчаются на однихъ и тѣхъ же мѣстахъ, но переставленные между собою, эти x элементовъ, станутъ тождественными. Слѣдовательно, въ названномъ случаѣ всѣхъ перестановокъ станетъ въ $x!$ разъ меньше, т. е., ихъ всего будетъ $\frac{n!}{x!}$. Если кромѣ того будутъ одинаковыми между собою еще y другихъ элементовъ, то число всѣхъ возможныхъ перестановокъ будетъ $\frac{n!}{x!y!}$ и т. д.

Такъ, напр., элементы

$$abbbbccddde f$$

допускаютъ

$$\frac{12!}{4!\,2!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.4.1.2.1.2.3} = 1663200$$

перестановокъ.

Перестановки элементовъ, среди которыхъ есть одинаковые, называются перестановками съ повтореніями.

§ 679. **Размѣщенія.**

234 **Опредѣленіе.** Соединенія называются *размѣщеніями*, если въ нихъ принимаются въ соображеніе и число элементовъ въ каждомъ и порядокъ расположенія ихъ.

Размѣщенія, содержащія каждое k элементовъ изъ данныхъ n, называются размѣщеніями n элементовъ по k.

Размѣщенія n элементовъ по n суть перестановки этихъ элементовъ.

Размѣщенія данныхъ элементовъ по одному суть самые эти элементы.

Для образованія размѣщеній по 2 элемента, нужно соединить каждый изъ данныхъ элементовъ съ каждымъ другимъ. Размѣщенія по 3 можно составить, приписывая къ каждому элементу всѣ размѣщенія остальныхъ элементовъ по 2, размѣщенія по 4 можно образовать, приписывая къ каждому элементу всѣ размѣщенія остальныхъ элементовъ по 3, и т. д.

Образованіе по этому правилу размѣщеній элементовъ 1 2 3 4 5 по два видно, если ихъ написать въ слѣдующемъ порядкѣ:

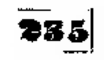
12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54:

размѣщеній же тѣхъ же элементовъ по три —при слѣдующемъ расположеніи ихъ:

123	213	312	412	512
124	214	314	413	513
125	215	315	415	514
132	231	321	421	521
134	234	324	423	523
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
154	254	354	453	543.

По этой же схемѣ удобно писать и размѣщенія этихъ элементовъ по 4, если ихъ образовывать по тому же правилу.

§ 680. **Число размѣщеній.**

Теорема. Число размѣщеній n элементовъ по k равно произведенію k послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ n есть наибольшее. 

Док. Въ основаніе доказательства этой теоремы удобнѣе положить другой способъ образованія размѣщеній, чѣмъ описанный выше. Можно образовать всѣ размѣщенія по k элементовъ изъ размѣщеній по $(k-1)$, приписывая по порядку къ каждому изъ послѣднихъ каждый недостающій еще въ немъ элементъ. Если данныхъ элементовъ n, то такихъ недостающихъ элементовъ будетъ $n-(k-1)=n-k+1$. Поэтому изъ каждаго изъ размѣщеній по $(k-1)$ элементовъ можетъ быть образовано $(n-k+1)$ размѣщеній по k. Если числа размѣщеній n элементовъ по 1, по 2, ..., по k назовемъ A_n^1, A_n^2, ..., A_n^k, то сказанное можно выразить равенствомъ:

$$A_n^k = (n-k+1)\,A_n^{k-1}.$$

Такимъ же образомъ должно быть:

$$A_n^{k-1}=(n-k+2)A_n^{k-2}.$$
$$A_n^{k-2}=(n-k+3)A_n^{k-3}.$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$A_n^3=(n-2)A_n^3$$
$$A_n^2=(n-1)A_n^1,$$

и, наконецъ,
$$A_n^1=n.$$

Подставляя въ первое изъ этихъ уравненій послѣдовательно выраженія для A_n^{k-1}, A_n^{k-2},..., A_n^3, A_n^3 и A_n^1 изъ остальныхъ, мы получаемъ:

$$A_n^k=(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-2)(n-1)n,$$

чѣмъ теорема и доказана.

Удобнѣе для запоминанія эта формула для числа размѣщеній n элементовъ по k можетъ быть написана такъ:

235^a **Формула.** $\boldsymbol{A_n^k=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}$

(начиная отъ n, k множителей, изъ которыхъ каждый на 1 меньше предыдущаго).

§ 681. **Размѣщенія съ повтореніями.** Если размѣщенія образуются такимъ образомъ, что всякій данный элементъ въ нихъ можетъ повторяться и два и три раза и т. д., то ихъ называютъ размѣщеніями съ повтореніями.

Чтобы образовать размѣщенія по два съ повтореніями, нужно каждый изъ данныхъ элементовъ соединить съ каждымъ. Поэтому n элементовъ допустятъ n^2 такихъ размѣщеній Для образованія размѣщеній по три съ повтореніями можно къ каждому изъ такихъ же размѣщеній по два приписать каждый элементъ, почему такихъ размѣщеній n элементовъ по 3 будетъ въ n разъ больше, чѣмъ названныхъ размѣщеній по 2, то есть, ихъ всего будетъ n^3.

Напр., изъ элементовъ a b c могутъ быть образованы слѣдующія 3^2 размѣщеній по 2 съ повтореніями:

aa	*ba*	*ca*
ab	*bb*	*cb*
ac	*bc*	*cc*;

а изъ нихъ слѣдующія 3^3 размѣщеній по 3 съ повтореніями:

aaa	*baa*	*caa*
aab	*bab*	*cab*
aac	*bac*	*cac*
aba	*bba*	*cba*

abb	*bbb*	*cbb*
abc	*bbc*	*cbc*
aca	*bca*	*cca*
acb	*bcb*	*ccb*
acc	*bcc*	*ccc*

Вообще размѣщенія по k элементовъ съ повтореніями можно получить изъ такихъ же размѣщеній по $(k-1)$, если къ каждому изъ послѣднихъ приписать каждый элементъ. Поэтому первыхъ въ n разъ больше, чѣмъ послѣднихъ. А такъ какъ разсматриваемыхъ размѣщеній по 3 всего n^3, то такихъ размѣщеній по 4 всего $n \cdot n^3 = n^4$, по 5 всего $n \cdot n^4 = n^5$ и т. д. Слѣдовательно, вообще число размѣщеній n элементовъ по k съ повтореніями равно n^k.

Размѣщенія съ повтореніями можно изъ n элементовъ образовать и по $(n+1)$ и по $(n+2)$ и т. д., т. е. вообще и по числу элементовъ большему, чѣмъ ихъ дано.

§ 682 Сочетанія.

Опредѣленіе. Соединенія, отличающіяся другъ отъ друга только составомъ элементовъ, называются *сочетаніями*. 236

Сочетанія, содержащія каждое k элементовъ изъ данныхъ n, называются сочетаніями n элементовъ по k.

Въ сочетаніяхъ на порядокъ расположенія элементовъ не обращается вниманія; поэтому всѣ соединенія, содержащія одни и тѣ же элементы, составляютъ одно сочетаніе.

Сочетанія данныхъ элементовъ по одному суть самые эти элементы.

Чтобы образовать всѣ сочетанія данныхъ элементовъ по 2, можно соединить каждый элементъ съ каждымъ высшимъ. Сочетанія по 3 можно составить, приписывая къ каждому элементу всѣ сочетанія всѣхъ высшихъ, чѣмъ онъ, элементовъ по 2; сочетанія по 4 можно образовать, приписывая къ каждому элементу всѣ сочетанія всѣхъ высшихъ, чѣмъ онъ, элементовъ по 3, и т. д.

Такъ, напр., составленныя по этому правилу сочетанія элементовъ *abcdef* по 2 и по 3 будутъ слѣдующія:

ab				
ac	*bc*			
ad	*bd*	*cd*		
ae	*bc*	*ce*	*de*	
af	*bf*	*cf*	*df*	*ef*
abc				
abd				
abe				
abf				
acd	*bcd*			
ace	*bce*			
acf	*bcf*			
ade	*bde*	*cde*		
adf	*bdf*	*cdf*		
aef	*bef*	*cef*	*def*	

§ 683. **Число сочетаній.**

237 **Теорема.** Число сочетаній n элементовъ по k равно дѣленному на факторіалъ k произведенію k послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ n есть наибольшее.

Док. Образовавъ всѣ сочетанія n элементовъ по k, а затѣмъ въ каждомъ сочетаніи всѣ перестановки, мы получимъ *всѣ размѣщенія* данныхъ элементовъ по k. При этомъ въ каждомъ сочетаніи можно будетъ произвести по $k!$ размѣщеній, такъ что вообще число размѣщеній n элементовъ по k должно быть въ $k!$ разъ больше числа сочетаній n элементовъ по k.

Назвавъ послѣднее число C_n^k, а первое, какъ прежде, A_n^k, мы сказанное можемъ выразить равенствомъ:

$$A_n^k = k!\ C_n^k$$

Отсюда же слѣдуетъ, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.(k-1)\,k}$$

(въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ по k множителей), чѣмъ теорема и доказана.

§ 684. **Упрощенный видъ формулы для числа сочетаній.** Для обозначенія частнаго отъ дѣленія произведенія k послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ n есть наибольшее, на произведеніе всѣхъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до k (другими словами, на факторіалъ k), существуетъ ***символъ*** $\binom{n}{k}$, который читается ***„n надъ k“*** *).

Пользуясь этимъ сокращеннымъ изображеніемъ такого частнаго, мы можемъ формулу для числа сочетаній n элементовъ по k написать такъ:

237a **Формула:**

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

§ 685. **Сочетанія съ повтореніями.** Если сочетанія образуются такимъ образомъ, что всякій данный элементъ въ нихъ можетъ повторяться, то ихъ называютъ сочетаніями съ повтореніями.

Правило для образованія сочетаній съ повтореніями отличается отъ даннаго выше правила образованія простыхъ сочетаній только тѣмъ, что теперь каждый элементъ соединяется не только съ высшими, но еще и съ самимъ собою.

---

*) Онъ впервые встрѣчается въ трудахъ знаменитаго математика Эйлера, изданныхъ С.-Петербургскою Академіею Наукъ.

Такъ, напр., изъ элементовъ 1 2 3 4 могутъ быть образованы слѣдующія сочетанія по два и по три съ повтореніями:

11			
12	22		
13	23	33	
14	24	34	44

111			
112			
113			
114			
122	222		
123	223		
124	224		
133	233	333	
134	234	334	
144	244	344	444.

Если бы мы въ каждомъ изъ образованныхъ здѣсь сочетаній по два второй элементъ повысили на 1, то получили бы всѣ сочетанія элементовъ 12345 безъ повтореній. Повысивъ же въ каждомъ изъ составленныхъ здѣсь сочетаній по три второй элементъ на 1, а третій на 2, мы получили бы всѣ сочетанія элементовъ 1 2 3 4 5 6 по три безъ повтореній. Изъ сказаннаго можно уже заключить, что вообще изъ сочетаній n элементовъ по k съ повтореніями получатся всѣ сочетанія $(n+k-1)$ элементовъ по k безъ повтореній, если въ каждомъ сочетаніи перваго рода второй элементъ будетъ повышенъ на 1, третій на 2, ..., k-ый на $k-1$.

Слѣдовательно, n элементовъ допускаютъ столько сочетаній по k съ повтореніями, сколько $(n+k-1)$ элементовъ допускаютъ сочетаній по k безъ повтореній, значитъ $\binom{n+k-1}{k}$ или $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}$ сочетаній (NB: въ послѣднемъ выраженіи также въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ по k множителей).

§ 686. Равенство выраженій $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{n-k}$. Къ такого рода формуламъ, которыми мы выразили числа сочетаній безъ повтореній и съ повтореніями, намъ еще придется возвращаться и при этомъ пользоваться нѣкоторыми свойствами такихъ выраженій, съ которыми мы теперь и познакомимся:

Теорема: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

238

Док. Если мы дробь $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,k}$, которая обозначается символомъ $\binom{n}{k}$, расширимъ на $(n-k)!$, то получается

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).(n-k)(n-k-1)\ldots2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\ldots.(n-k-1)(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Если мы полученное выраженіе сократимъ на $k!$, то въ дѣлимомъ останутся, начиная отъ n, $(n-k)$ сомножителей, изъ которыхъ каждый на 1 меньше

предыдущаго, а въ дѣлителѣ произведеніе всѣхъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $(n-k)$ включительно, то есть, получится выраженіе, которое можетъ быть обозначено символомъ

$$\binom{n}{n-k}$$

Такъ и въ самомъ дѣлѣ оказывается, что

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

— —

Доказанная теорема можетъ во многихъ случаяхъ облегчить также вычисленіе числа сочетаній. Такъ, напр., число сочетаній 30 элементовъ по 27, равное $\binom{30}{27}$, удобнѣе вычислить по формулѣ $\binom{30}{3}$, такъ какъ

$$\binom{30}{27}=\binom{30}{30-27}=\binom{30}{3}.$$

§ 687. **Введеніе символовъ** $\binom{n}{1}$ **и** $\binom{n}{0}$. Сокративъ выраженіе, обозначаемое символомъ $\binom{n}{n-1}$, мы получимъ n. По теоремѣ же, доказанной въ предыдущемъ параграфѣ, должно быть:

$$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1};$$

и для того, чтобы эта теорема оставалась въ силѣ и для этого случая, желательно введеніе символа $\binom{n}{1}$ въ значеніи n.

При повѣркѣ оказывается, что примѣненіе этого символа въ такомъ смыслѣ и въ другихъ случаяхъ нигдѣ не создаетъ противорѣчій.

По той же теоремѣ **238** должно бы быть:

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}$$

Но $\binom{n}{n}$, какъ легко убѣдиться, равняется 1. И оказывается, что и символъ $\binom{n}{0}$ примѣнимъ ко всѣмъ теоремамъ, относящимся къ выраженіямъ вида $\binom{n}{k}$, если понимать подъ нимъ 1.

На основаніи изложеннаго мы и расширяемъ смыслъ разсматриваемыхъ выраженій слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленіе 1: $\binom{n}{1}=n$.

Опредѣленіе 2: $\binom{n}{0}=1$.

Такимъ же образомъ легко убѣдиться, что выраженіе $\binom{n}{k}$ должно означать 0, если $k>n$, или если $k<0$.

§ 688. **Сумма выраженій** $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{k+1}$.

Теорема: 239

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Док. Названная сумма можетъ быть преобразована слѣдующимъ образомъ:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1\cdot 2\ldots k(k+1)}=$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right)=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{k+1+n-k}{k+1}=$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k+1)}.$$

Такъ какъ полученное выраженіе есть не что иное, какъ $\binom{n+1}{k+1}$, то оказывается, что и въ самомъ дѣлѣ

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

ГЛАВА VIII.

Биномъ Ньютона.

§ 689. **Произведеніе двучленовъ съ одинаковымъ первымъ членомъ.** Въ § 62 содержатся теоремы, выражающія правила возвышенія двучлена въ квадратъ и кубъ. Теперь же мы въ состояніи выразить и общую теорему, составляющую правило возвышенія двучлена во всякую степень, и доказать

ее для случая, когда показатель цѣлый и притомъ положительный. Но сдѣлаемъ то и другое только послѣ того, когда найдемъ это общее правило.

Для этой цѣли произведемъ умноженіе ряда биномовъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же первый членъ и отличающихся другъ отъ друга вторыми членами.

Произведеніе двухъ такихъ биномовъ мы можемъ представить въ такомъ видѣ: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

Продолжать же умноженія намъ будетъ удобнѣе, если мы скобки въ полученномъ уже выраженіи, равно какъ и каждую пару скобокъ въ дальнѣйшихъ результатахъ замѣнимъ вертикальною чертою слѣдующимъ образомъ:

$$(x+a)(x+b)=x^2+\begin{array}{l|}a\\+b\end{array}\,x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\begin{array}{l|}a\\+b\\+c\end{array}\,x^2+\begin{array}{l|}ab\\+ac\\+bc\end{array}\,x+abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=$$

$$x^4+\begin{array}{l|}a\\+b\\+c\\+d\end{array}\,x^3+\begin{array}{l|}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\,x^2+\begin{array}{l|}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}\,x+abcd$$

Послѣднее выраженіе намъ теперь слѣдовало бы умножить на $x+e$. Производя сначала умноженіе на x, мы получили бы выраженіе такого же вида и съ тѣми же коэффиціентами, въ которомъ бы только степень x была вездѣ на 1 выше. Члены же, получающіеся отъ умноженія на e, мы должны бы были подписывать подъ подобными или же еще лучше сразу же вставлять въ столбцы подобныхъ членовъ въ лексикографическомъ порядкѣ, какъ это уже сдѣлано было въ предыдущихъ умноженіяхъ. Можно было бы по желанію послѣднее произведеніе умножить еще на $x+f$ и т. д. Но и изъ приведенныхъ результатовъ умноженій видно, что всѣ многочлены, получающіеся отъ умноженія ряда биномовъ съ одинаковымъ первымъ членомъ (x), построены по одному и тому же закону: они всѣ расположены по убывающимъ степенямъ одинаковаго во всѣхъ сомножителяхъ члена (x), при чемъ высшій членъ всегда имѣетъ коэффиціентъ 1 и показателя, равнаго числу перемноженныхъ биномовъ; коэффиціентъ второго члена есть сумма неравныхъ членовъ (a, b, c,...) въ сомножителяхъ; коэффиціентъ третьяго члена есть сумма всѣхъ произведеній этихъ неравныхъ членовъ, взятыхъ по два; слѣдующій коэффиціентъ есть сумма всѣхъ произведеній тѣхъ же членовъ, взятыхъ по три, и т. д.; и, наконецъ, послѣдній членъ многочлена есть произведеніе всѣхъ этихъ неравныхъ членовъ сомножителей.

§ 690. **Выводъ формулы для n-ой степени бинома.** Разсмотрѣнное въ предыдущемъ параграфѣ произведеніе биномовъ превратится въ $(x+y)^n$, если мы такихъ двучленовъ возьмемъ n и притомъ

$$a=b=c=\ldots=y.$$

Въ такомъ случаѣ коэффиціентъ $(a+b+c+d+\ldots)$ превратится въ ny; коэффиціентъ $(ab+ac+ad+\ldots)$ въ сумму столькихъ слагаемыхъ y^2, сколько n членовъ $a, b, c, d, \ldots$ допускаютъ сочетаній по два, т. е., этотъ коэффиціентъ будетъ равенъ $\binom{n}{2}y^2$, такимъ же образомъ слѣдующій коэффиціентъ превратится въ сумму столькихъ слагаемыхъ y^3, сколько тѣ же члены допускаютъ сочетаній по три, т. е. въ $\binom{n}{3}y^3$, и т. д.

Резюмируя все сказанное, мы можемъ составить правило для возвышенія двучлена въ n-ую степень, которое должно выразиться слѣдующею формулою:

$$(x+y)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+$$

$$\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\ldots+\binom{n}{n-2}x^2y^{n-2}+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n.$$

Должно, однако, замѣтить, что наше разсужденіе доказательствомъ теоремы, выражаемой послѣднимъ равенствомъ, считаться не можетъ. Оно намъ, строго говоря, только помогло найти *вѣроятное* правило разложенія степени бинома въ многочленъ. Доказанною же для положительнаго цѣлаго показателя мы будемъ имѣть право считать теорему только послѣ того, какъ мы справедливость ея провѣримъ заключеніемъ отъ n къ $n+1$. Но такая провѣрка можетъ быть произведена удобнѣе, если мы предварительно обратимъ вниманіе на нѣкоторыя свойства полученнаго многочлена, которыя притомъ важно помнить вообще.

§ 691. **Нѣкоторыя свойства послѣдняго многочлена.** Въ случаѣ положительнаго цѣлаго n, который мы только и разсматриваемъ, этотъ многочленъ долженъ закончиться членомъ $\binom{n}{n}y^n$, такъ какъ слѣдующіе члены могли бы имѣть только коэффиціенты $\binom{n}{n+1}$, $\binom{n}{n+2}$ и т. д., которые всѣ, какъ разъяснено было въ § 687, равняются 0.

Въ томъ же и въ предшествующемъ ему параграфѣ было выяснено, что $\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-2}=\binom{n}{2}$, $\binom{n}{n-3}=\binom{n}{3}$ и т. д. А изъ этого слѣдуетъ, что въ названномъ многочленѣ первый членъ и послѣдній, второй и

предпослѣдній, вообще *каждые два члена, равно отстоящіе отъ крайнихъ, имѣютъ всегда одинаковые коэффиціенты.*

Всѣхъ членовъ въ разложеніи $n+1$, и въ нихъ показатели буквы x, начиная съ n, послѣдовательно на 1 уменьшаются, показатели же буквы y, начиная съ 0, послѣдовательно на 1 увеличиваются, при чемъ *сумма* этихъ *показателей во всѣхъ членахъ остается равною* n.

Теорема, къ доказательству которой мы теперь можемъ перейти, извѣстна подъ слѣдующимъ названіемъ:

§ 692. Биномъ Ньютона.

240 **Теорема.** $(x+y)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\ldots+\binom{n}{3}x^3y^{n-3}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\binom{n}{1}xy^{n-1}+y^n.$

Док. Допустимъ, что теорема справедлива для показателя m, то есть, что

$$(x+y)^m=x^m+\binom{m}{1}x^{m-1}y+\binom{m}{2}x^{m-2}y^2+\binom{m}{3}x^{m-3}y^3+\ldots+\binom{m}{3}x^3y^{m-3}+\binom{m}{2}x^2y^{m-2}+\binom{m}{1}xy^{m-1}+y^m \qquad \text{(I).}$$

Умножимъ это равенство на $x+y$, при чемъ въ правой части напишемъ въ первой строкѣ результатъ умноженія многочлена на x, во второй строкѣ результатъ умноженія его на y, коэффиціентъ 1 въ двухъ мѣстахъ замѣнимъ символомъ $\binom{m}{0}$ и, наконецъ, при сложеніи подобныхъ членовъ воспользуемся теоремою **239**:

$$(x+y)^m(x+y)=$$

$$x^{m+1}+\binom{m}{1}x^my+\binom{m}{2}x^{m-1}y^2+\binom{m}{3}x^{m-2}y^3+\ldots+\binom{m}{2}x^3y^{m-2}+\binom{m}{1}x^2y^{m-1}+\binom{m}{0}xy^m$$

$$+\binom{m}{0}x^my+\binom{m}{1}x^{m-1}y^2+\binom{m}{2}x^{m-2}y^3+\ldots+\binom{m}{3}x^3y^{m-2}+\binom{m}{2}x^2y^{m-1}+\binom{m}{1}xy^m+y^{m+1}$$

$$(x+y)^{m+1}=x^{m+1}+\binom{m+1}{1}x^my+\binom{m+1}{2}x^{m-1}y^2+\binom{m+1}{3}x^{m-2}y^3+\ldots+\binom{m+1}{3}x^3y^{m-2}+\binom{m+1}{2}x^2y^{m-1}+\binom{m+1}{1}xy^m+y^{m+1} \qquad \text{(II).}$$

Можно уже замѣтить, что полученное равенство выражаетъ то же правило разложенія степени бинома въ многочленъ, которое выражается равенствомъ (I), но это станетъ еще очевиднѣе, если мы положимъ

$$m+1=n,$$

слѣдовательно,

$$m=n-1.$$

и замѣнимъ въ равенствѣ (II) m вездѣ разностью $n-1$, ибо, произведя эту подстановку, мы получаемъ:

$$(x+y)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\ldots+\binom{n}{3}x^3y^{n-3}+$$
$$\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\binom{n}{1}xy^{n-1}+y^n.$$

Такъ какъ мы равенство (II) получили, только умноживъ равенство I на $x+y$, то теперь выяснено, что доказываемая теорема справедлива для показателя $m+1$, если она справедлива для показателя m. Но намъ извѣстно, что теорема справедлива для показателя 2, такъ какъ

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=x^2+\binom{2}{1}xy+y^2.$$

Слѣдовательно, она должна быть справедливою и для показателя 3 [что мы знаемъ и независимо отъ этого, такъ какъ

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+\binom{3}{1}x^2y+\binom{3}{1}xy^2+y^3];$$

будучи же справедливою для показателя 3, она должна быть справедливою и для показателя 4, и т. д., то есть вообще для всякаго цѣлаго положительнаго показателя; что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. $(x-y)^n=$

$$x^n-\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2-\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\ldots+(-1)^{n-1}xy^{n-1}+(-1)^ny^n,$$

такъ какъ четныя степени отрицательныхъ чиселъ положительны, нечетныя же отрицательны.

§ 693. **Общій членъ разложенія степени бинома.** Если мы назовемъ T_1 первый членъ разложенія n-ой степени бинома $x+y$, второй членъ T_2, третій $T_3, \ldots$, k-ый T_k, то очевидно, что должно быть:

$$T_k=\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}.$$

Если мы въ этомъ выраженіи k положимъ равнымъ 1, 2, 3 и т. д., то получимъ первый, второй, третій и т. д., вообще любой членъ разложенія Поэтому эта формула называется общимъ членомъ разложенія

Примѣчаніе.

Формула для $(k+1)$-аго члена разложенія степени бинома должна гласить:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Какъ болѣе простую на видъ, ее часто называютъ общимъ членомъ. Но въ ней нужно взять $k+1=1$, слѣд., $k=0$, чтобы получить первый членъ, $k+1=2$, слѣд., $k=1$, чтобы получить второй членъ и т. д.

§ 694. **Послѣдовательное вычисленіе членовъ разложенія степени бинома.** При разложеніи степени бинома въ многочленъ вычисленіе каждаго члена послѣдняго независимо отъ предыдущихъ составило бы лишнюю работу, такъ какъ каждый членъ очень просто можетъ быть вычисленъ изъ предыдущаго и такимъ образомъ дѣлается ненужнымъ повтореніе произведенныхъ уже умноженій. И въ самомъ дѣлѣ, сравнивая между собою k-ый и $(k+1)$-ый члены разложенія, написанные въ видѣ:

$$T_k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,.\,k}x^{n-(k+1)}y^{k-1}$$

$$T_{k+1}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1\,.\,2\,\ldots\,.\,k\,(k+1)}x^{n-k}y^k,$$

мы видимъ, что такое послѣдовательное вычисленіе членовъ разложенія одного изъ другого возможно и заключается въ слѣдующемъ:

Правило. *Чтобы получить членъ разложенія степени бинома изъ предыдущаго, нужно въ немъ показателя перваго члена бинома на 1 понизить, а показателя другого члена на 1 повысить, коэффиціентъ же умножить на полученнаго перваго показателя и раздѣлить на число, которое на 1 больше, чѣмъ полученный второй показатель.*

§ 695. **Треугольникъ Паскаля.** Для коэффиціентовъ членовъ въ разложеніяхъ степеней бинома можетъ быть составлена слѣдующая очень удобная и чрезвычайно легко вычисляемая табличка, которая можетъ быть продолжена до какого угодно показателя и которая извѣстна подъ названіемъ треугольника Паскаля:

Показатель степени бинома	Коэффиціенты:
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Въ этой табличкѣ каждый коэффиціентъ долженъ, по теоремѣ **239** равняться суммѣ обоихъ ближайшихъ стоящихъ надъ нимъ, почему весь этотъ треугольникъ вычисляется посредствомъ однихъ сложеній.

§ 696. **Предложенія, относящіяся къ суммамъ биноміальныхъ коэффиціентовъ.**

Выраженія вида $\binom{n}{k}$ называются биноміальными коэффиціентами.

Нѣкоторыя свойства ихъ указаны были въ §§ 686, 687 и 688. При помощи же биноміальной теоремы **[240]** можно обнаружить еще слѣдующія.

Теорема 1. Сумма абсолютныхъ значеній всѣхъ коэффиціентовъ въ разложеніи n-вой степени бинома равна 2^n.

Док. Полагая въ равенствѣ **240**.

$$x=y=1$$

и замѣняя коэффиціенты 1 символами $\binom{n}{0}$ и $\binom{n}{n}$, мы получаемъ:

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Въ разложеніи n-вой степени бинома какъ сумма всѣхъ коэффиціентовъ нечетнаго порядка, такъ и сумма всѣхъ коэффиціентовъ четнаго порядка равны по абсолютной величинѣ своей 2^{n-1}.

Док. Полагая въ равенствѣ, выражающемъ слѣдствіе изъ теоремы **240** [§ 692]

$$x=y=1,$$

и также замѣняя коэффиціенты 1 символами $\binom{n}{0}$ и $\binom{n}{n}$, мы находимъ:

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\ \dots\ +(-1)^n\cdot\binom{n}{n}.$$

Перенеся же въ этомъ равенствѣ отрицательные члены въ другую часть и замѣнивъ части его одну другою, мы получаемъ:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots$$

Такъ какъ обѣ суммы, которыя здѣсь стоятъ по лѣвую и по правую сторону отъ знака равенства, вмѣстѣ составляютъ 2^n, то каждая изъ нихъ равна $\frac{2^n}{2}$, то есть 2^{n-1}, что и требовалось доказать.

§ 697. **Возвышеніе многочлена въ степень.** Подобно тому, какъ возвышеніе многочленовъ въ квадратъ и кубъ могло производиться на основаніи теоремъ о возвышеніи въ эти степени двучлена [§§ 142 и 167], такъ въ болѣе высокія степени многочленъ можно возвышать, пользуясь биноміальною теоремою.

Такъ, напр.,

$$(a-b+c)^7=[(a-b)+c]^7=(a-b)^7+\frac{7}{1}.(a-b)^6c+\frac{7.6}{1.2}.(a-b)^5c^2$$

$$+\frac{7.6.5}{1.2.3}.(a-b)^4c^3+\frac{7.6.5}{1.2.3}.(a-b)^3c^4+\frac{7.6}{1.2}.(a-b)^2c^5+\frac{7}{1}.(a-b)c^6+c^7=a^7-7a^6b+$$

$$21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4-21a^2b^5+7ab^6-b^7+7a^6c-42a^5bc+\dots \text{ и т. д.}$$

ГЛАВА IX.

Опредѣлители.

§ 698. **Инверсіи и два класса перестановокъ.** Въ §§ 444, 445 и 446 мы познакомились съ происхожденіемъ такъ называемыхъ опредѣлителей или детерминантовъ, являющихся символами для особаго рода многочленовъ. Теперь мы въ состояніи разсмотрѣть ихъ въ общемъ видѣ. Но для того, чтобы сдѣлать возможнымъ *общее* опредѣленіе такого рода символа, намъ только еще необходимо предварительно познакомиться съ нѣкоторыми свойствами перестановокъ.

При основномъ порядкѣ расположенія элементовъ они слѣдуютъ одинъ послѣ другого, повышаясь. Во всякой же другой перестановкѣ послѣ нѣ-

которыхъ элементовъ слѣдуютъ низшія. Такъ, напр., въ перестановкѣ

3 1 4 5 2

послѣ элемента 3 слѣдуетъ два низшихъ, послѣ элементовъ 4 и 5 по одному низшему. Всего въ разсматриваемой перестановкѣ такихъ случаевъ послѣдовательности отъ высшаго элемента къ низшему 4, что выражаютъ также, говоря, что въ этой перестановкѣ имѣется 4 инверсіи.

Опредѣленіе 1. Инверсіею называется всякій случай, что въ перестановкѣ высшій элементъ стоитъ раньше низшаго.

Опредѣленіе 2. Смотря по тому, содержитъ ли перестановка четное число (включая 0) инверсій или нечетное, она называется перестановкою перваго (четнаго) или второго (нечетнаго) класса.

§ 699. **Замѣна въ перестановкѣ 2 элементовъ другъ другомъ.**

Теорема. Въ случаѣ замѣны 2 элементовъ другъ другомъ перестановка перваго класса превращается въ перестановку второго класса, и наоборотъ

Док. Ясно, что при замѣнѣ двухъ сосѣднихъ элементовъ другъ другомъ число инверсій измѣняется на одну. Если въ перестановкѣ

4 2 3 1 5 6 8 7

подчеркнутые элементы нужно поставить каждый на мѣсто другого, то этого можно достигнуть, переставивъ 3 впередъ за 1, за 5, за 6 и за 8, а 8 назадъ за 6, за 5 и за 1. Такъ мы видимъ, что при постепенномъ перемѣщеніи на указанное мѣсто элемента 8 два сосѣднихъ элемента придется замѣнить другъ другомъ однимъ разомъ меньше, чѣмъ при постепенномъ передвиженіи впередъ элемента 3.

Такимъ же образомъ вообще, если два элемента нужно переставить каждый на мѣсто другого и для этого приходится первый послѣдовательно передвинуть впередъ k разъ, то другой остается перемѣстить послѣдовательно назадъ $(k-1)$ разъ, такъ что при всемъ этомъ процессѣ приходится два сосѣдніе элемента замѣнить другъ другомъ $(2k-1)$, т. е. нечетное число разъ. Но настолько же, значитъ на нечетное число, при этомъ измѣняется число инверсій. А изъ этого и слѣдуетъ справедливость утвержденія.

§ 700. **Число перестановокъ того и другого класса.**

Теорема. Перестановокъ перваго класса всегда столько же, сколько перестановокъ второго класса.

Док. Всѣ перестановки данныхъ элементовъ можно получить не только способомъ, описаннымъ въ § 675, но также мѣняя каждый разъ мѣста только двухъ элементовъ. При этомъ перестановки должны всякій разъ превращаться четная въ нечетную, и наоборотъ. А изъ этого и слѣдуетъ справедливость утвержденія, такъ какъ число всѣхъ перестановокъ, которыя можно образовать изъ данныхъ элементовъ, всегда четное.

§ 701. **Опредѣленіе опредѣлителя.** Этимъ опредѣленіемъ, которое мы здѣсь даемъ, и выражается общій законъ составленія многочленовъ, о которыхъ говорилось въ §§ 444—447, и на закономѣрность образованія которыхъ указызалось въ разсмотрѣнныхъ тамъ случаяхъ.

Опредѣленіе. Опредѣлитель n-ваго порядка:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \cdot & \cdot & \nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \cdot & \nu_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \cdot & & \nu_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & & \cdot & \nu_n \end{vmatrix}$$

состоящій всегда изъ n^2 элементовъ, обозначаетъ многочленъ, каждый членъ котораго есть произведеніе n изъ этихъ элементовъ, взятыхъ непремѣнно изъ разныхъ строкъ и разныхъ столбцовъ, и имѣетъ передъ собою знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, являются ли въ немъ указатели четною или нечетною перестановкою чиселъ $1\ 2\ 3 \ldots n$, при алфавитномъ порядкѣ буквъ.

Разложеніе опредѣлителя въ многочленъ удобнѣе всего начать съ произведенія элементовъ, расположенныхъ по діагонали, т. е. съ члена

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 \ldots \nu_n,$$

называемаго діагональнымъ или главнымъ. Чтобы въ остальныхъ членахъ встрѣчались множителями элементы непремѣнно изъ *разныхъ* строкъ (горизонтальныхъ рядовъ) и *разныхъ* столбцовъ (вертикальныхъ рядовъ), не должно допускать ни въ одномъ изъ нихъ ни повторенія буквъ, ни повторенія указателей.

Будутъ получены *всѣ* члены разложенія, когда будутъ образованы всѣ перестановки указателей безъ измѣненія порядка расположенія буквъ.

Слѣдствіе. Въ разложеніи опредѣлителя $n!$ членовъ и, если онъ состоитъ только изъ положительныхъ элементовъ, то столько же членовъ положительныхъ, сколько и отрицательныхъ.

§ 702. **Теорема.** Величина опредѣлителя не измѣнится, если мы его строки сдѣлаемъ столбцами, а столбцы строками

Док. Всѣ тѣ же члены, которые получаются отъ образованія въ діагональномъ членѣ всѣхъ перестановокъ указателей безъ измѣненія порядка расположенія буквъ, получатся и въ томъ случаѣ, только въ иномъ порядкѣ, когда мы въ этомъ діагональномъ членѣ образуемъ всѣ перестановки буквъ, удерживая натуральный рядъ указателей Изъ этого слѣдуетъ, что опредѣлитель можетъ быть разложенъ въ многочленъ и этимъ послѣднимъ способомъ, равносильнымъ разложенію его въ многочленъ первымъ способомъ послѣ предварительнаго превращенія его строкъ въ столбцы, а столбцовъ въ строки. Слѣдовательно, и въ самомъ дѣлѣ, какъ утверждается теоремою.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \cdots & \nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & \nu_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \cdots & \nu_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \cdots & \nu_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \cdots & \nu_n \end{vmatrix}.$$

§ 703. **Теорема.** При замѣнѣ въ опредѣлителѣ двухъ столбцовъ или двухъ строкъ другъ другомъ мѣняется только знакъ опредѣлителя, абсолютная же величина его не измѣняется.

Док. Если мы въ опредѣлителѣ поставимъ два столбца одинъ на мѣсто другого или двѣ строки одну на мѣсто другой, то въ діагональномъ членѣ произойдетъ замѣна двухъ элементовъ другъ другомъ. Но вслѣдствіе этого, по теоремѣ, доказанной въ § 699, перестановка указателей въ названномъ главномъ членѣ разложенія опредѣлителя превратится изъ четной въ нечетную, а вмѣстѣ съ тѣмъ перемѣнится и знакъ перваго члена А такъ какъ изъ него образуются чрезъ указанныя выше перестановки всѣ остальные члены разложенія, то мѣняются и ихъ знаки, т. е , мѣняется знакъ всего опредѣлителя безъ измѣненія абсолютнаго значенія его, что и требовалось доказать.

§ 704. **Теорема.** Опредѣлитель, въ которомъ совершенно одинаковы между собою два столбца или двѣ строки, равенъ 0.

Док. Если въ опредѣлителѣ два столбца или двѣ строки совершенно одинаковы между собою, то при замѣнѣ этихъ столбцовъ или строкъ другъ другомъ ничего въ немъ не измѣнится. Между тѣмъ, по предыдущей теоремѣ, въ опредѣлителѣ при этомъ должна произойти перемѣна знака. То есть.

если мы буквою D обозначимъ значенiе такого опредѣлителя, то должно быть.

$$D=-D$$

отсюда же слѣдуетъ, что

$$2D=0,$$

значитъ, что и въ самомъ дѣлѣ

$$D=0.$$

§ 705. **Разложенiе опредѣлителя по элементамъ ряда.** Такъ какъ въ каждомъ членѣ разложенiя опредѣлителя долженъ встрѣчаться множителемъ одинъ, и только одинъ, элементъ котораго-нибудь произвольнаго ряда (т. е. строки или столбца), то всѣ члены разложенiя можно расположить по элементамъ этого послѣдняго, вынеся послѣдовательно каждый изъ этихъ элементовъ множителемъ за скобки изъ всѣхъ членовъ, въ которыхъ онъ встрѣчается. Расположенное такимъ образомъ по элементамъ, напр., первой строки, разложенiе опредѣлителя должно имѣть видъ:

$$D=\alpha_1A_1+\beta_1B_1+\gamma_1C_1+\ldots+\nu_1N_1;$$

при такомъ же расположенiи по элементамъ третьяго столбца это разложенiе будетъ имѣть видъ:

$$D=\gamma_1C_1+\gamma_2C_2+\gamma_3C_3+\ldots+\gamma_nC_n,$$

а при расположенiи по элементамъ k-ой строки видъ:

$$D=\alpha_kA_k+\beta_kB_k+\gamma_kC_k+\ldots+\nu_kN_k,$$

гдѣ A_1, B_1, C_1, C_2,.. , A_k, B_k, C_k и т. д. обозначаютъ многочлены, получающiеся въ скобкахъ послѣ указанныхъ вынесенiй за нихъ общихъ множителей. По опредѣленiю детерминанта многочленъ A_1 не долженъ содержать ни одного элемента первой строки и перваго столбца, многочленъ B_3 ни одного элемента третьей строки и второго столбца и т. д., вообще многочленъ L_k ни одного элемента k-ой строки и l-аго столбца.

Слѣдовательно, A_1 долженъ быть многочленъ, каждый членъ котораго есть произведенiе $(n-1)$ изъ остальныхъ элементовъ опредѣлителя D, т. е., A_1 есть опредѣлитель $(n-1)$-аго порядка, получающiйся изъ опредѣлителя D, если въ послѣднемъ будутъ вычеркнуты первая строка и первый столбецъ.

Равнымъ образомъ долженъ быть вообще L_k опредѣлитель $(n-1)$-аго порядка, получающiйся изъ опредѣлителя D чрезъ вычеркиванiе k-ой строки и l-аго столбца, со знакомъ, который можетъ быть опредѣленъ слѣдующимъ образомъ.

Въ опредѣлителѣ D элементъ λ_k можетъ быть перенесенъ на мѣсто элемента α_1. Достаточно для этого перенести k-ую строку, послѣдовательно

переставляя ее съ предыдущей, на мѣсто первой строки и такимъ же образомъ l-ый столбецъ на мѣсто перваго. Такъ какъ при каждомъ такомъ перемѣщеніи мѣняется знакъ опредѣлителя и перемѣщеній всѣхъ нужно для указанной цѣли сдѣлать $k-1+l-1$, то знакъ опредѣлителя послѣ этого будетъ тотъ же, который имѣетъ $(-1)^{k+l-2}$ или, что то же самое, $(-1)^{k+l}$ Слѣдовательно, знакъ послѣдняго выраженія будетъ и знакъ опредѣлителя L_k, т. е. сомножителя, на котораго при разложеніи детерминанта D по элементамъ k-ой строки и l-аго столбца умножается элементъ, находящійся въ обоихъ этихъ рядахъ.

По этому правилу должны имѣть A_1 знакъ $+$, A_2 и B_1 знакъ —, A_3 и C_1 знакъ $+$ и т. д., то есть, при разложеніи опредѣлителя n-аго порядка по элементамъ какого-либо ряда знаки опредѣлителей $(n-1)$-аго порядка, на которыхъ умножаются эти элементы, чередуются [ср. §§ 445 и 446].

Мы будемъ имѣть правило разложенія опредѣлителя въ многочленъ изложеннымъ здѣсь способомъ, если мы результатъ, къ которому мы пришли резюмируемъ слѣдующимъ образомъ:

Опредѣленіе. Снабженный знакомъ $(-1)^{k+l}$ опредѣлитель L_k, получаемый чрезъ вычеркиваніе k-ой строки и l-аго столбца даннаго опредѣлителя, называется его минoромъ (или субдетерминантомъ), соотвѣтствующимъ элементу λ_k, стоящему на мѣстѣ пересѣченія названныхъ рядовъ.

Теорема. Опредѣлитель равенъ суммѣ произведеній элементовъ ряда на соотвѣтствующіе имъ миноры

Примѣры.

1)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

2) Приводимый ниже опредѣлитель четвертаго порядка разлагается по элементамъ послѣдняго столбца слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -d_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - d_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Встрѣчающіеся здѣсь опредѣлители 3-ьяго порядка разлагаются, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, послѣ чего получаются всѣ 24 члена разложенія даннаго опредѣлителя.

§ 706. **Теорема.** Сумма произведеній элементовъ ряда на миноры соотвѣтственныхъ элементовъ параллельнаго ряда равна 0.

Док. Если бы въ опредѣлителѣ k-ая строка оказалась вполнѣ одинаковою съ какою-либо другою, напр., h-ою, то онъ по теоремѣ, доказанной **въ § 704**, былъ бы равенъ 0, а потому и выраженіе.

$$D = \alpha_k A_k + \beta_k B_k + \gamma_k C_k + \ldots + \nu_k N_k$$

должно сдѣлаться равнымъ 0, если мы въ немъ множителей $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \ldots, \nu_k$ замѣнимъ соотвѣтственными элементами какой-либо другой строки, напр. элементами α_h, β_h, γ_h, ..., ν_h, такъ что должно быть:

$$\alpha_h A_k + \beta_h B_k + \gamma_h C_k + \ldots + \nu_h N_k = 0.$$

Равнымъ образомъ и выраженіе, указывающее разложеніе опредѣлителя по элементамъ столбца, будетъ равно 0, если въ немъ элементы этого столбца окажутся соотвѣтственно умноженными на миноры, соотвѣтствующіе не этому, а другому какому-либо столбцу. Такъ, напр., должно быть:

$$\delta_1 B_1 + \delta_2 B_2 + \delta_3 B_3 + \ldots + \delta_n B_n = 0.$$

§ 707 **Общее рѣшеніе опредѣленной системы линейныхъ уравненій.** Послѣдняя теорема дѣлаетъ возможнымъ достиженіе главной цѣли, преслѣдуемой этой главою, а именно нахожденіе общаго рѣшенія опредѣленной системы линейныхъ уравненій.

Это рѣшеніе можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Всякое неизвѣстное опредѣленной системы линейныхъ уравненій равно частному, дѣлитель котораго есть опредѣлитель, имѣющій элементами всѣ коэффиціенты всѣхъ неизвѣстныхъ въ ординарномъ порядкѣ ихъ, дѣлимое же опредѣлитель, отличающійся отъ дѣлимаго только столбцомъ, содержащимъ коэффиціенты вычисляемаго неизвѣстнаго, имѣя въ немъ элементами свободные члены вмѣсто этихъ коэффиціентовъ.

Док. Положимъ, что въ системѣ, о которой говорится въ теоремѣ, n неизвѣстныхъ, и изобразимъ ее въ такомъ видѣ:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \ldots + \nu_1 x_n = p_1 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \ldots + \nu_2 x_n = p_2 \\ \alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3 + \ldots + \nu_3 x_n = p_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + \gamma_n x_3 + \ldots + \nu_n x_n = p_n. \end{cases}$$

Если мы эти уравненія умножимъ по порядку на опредѣленные въ §705 миноры A_1, A_2, A_3,..., A_n и сложимъ затѣмъ преобразованныя такимъ образомъ уравненія, то въ получающемся уравненіи у x окажется коэффиціентомъ разложенный по элементамъ перваго столбца опредѣлитель D, имѣющій элементами всѣ n^2 коэффиціентовъ всѣхъ неизвѣстныхъ, у остальныхъ неизвѣстныхъ будутъ коэффиціентами суммы произведеній, которыя, по предыдущей теоремѣ, всѣ должны быть равны 0, и, наконецъ, правую часть составитъ многочленъ, который есть не что иное, какъ разложеніе по элементамъ перваго столбца опредѣлителя, отличающагося отъ D только этимъ столбцомъ, имѣя въ немъ элементами свободные члены p_1, p_2, p_3,..,p_n вмѣсто α_1, α_2, α_3, ..,α_n.

Такимъ образомъ посредствомъ описаннаго пріема, являющагося обобщеніемъ способа, изложеннаго въ § 441, всѣ неизвѣстныя, кромѣ x_1, оказались исключенными Для неизвѣстнаго же x_1 получается:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \cdot\cdot & \nu_1 \\ p_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdot\cdot & \nu_2 \\ p_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \cdot\cdot & \nu_3 \\ \cdot & & & \cdot\cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot\cdot & \\ p_n & \beta_n & \gamma_n & \cdot & \nu_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \cdot\cdot & \nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdot & \nu_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \cdot\cdot & \nu_3 \\ & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot\cdot & \cdot \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \cdot\cdot\cdot & \nu_n \end{vmatrix}}.$$

Совершенно такимъ же образомъ окажутся исключенными всѣ неизвѣстныя, кромѣ x_2, если мы уравненія системы умножимъ по порядку на миноры B_1, B_2, B_3, ..., B_n [§ 705] и затѣмъ ихъ сложимъ. Для неизвѣстнаго же x_2 этимъ способомъ получится такая же дробь, какъ и для x_1, и съ тѣмъ же знаменателемъ, но съ опредѣлителемъ въ качествѣ числителя, отличающимся отъ знаменателя вторымъ столбцомъ, имѣя въ немъ элементами свободные члены p_1, p_2, p_3,...,p_n вмѣсто β_1, β_2, β_3,...,β_n

Для нахожденія неизвѣстнаго x_3 нужно сложить умноженныя по порядку на миноры C_1, C_2, C_3,...,C_n уравненія системы, и такимъ же образомъ могутъ быть найдены и остальныя неизвѣстныя, при чемъ и для всѣхъ этихъ неизвѣстныхъ получатся такія именно выраженія, какія найти требовалось утвержденіемъ.

Рѣшенія системъ въ §§ 444, 445 и 446 являются частными случаями полученнаго теперь общаго рѣшенія. Особенно удобнымъ дѣлается примѣненіе этого общаго правила къ рѣшенію системъ, если при вычисленіи опредѣлителей пользоваться нѣкоторыми теоремами объ опредѣлителяхъ и преобразованіяхъ ихъ ,которыя мы ниже и приводимъ.

§ 708. Слѣдствія изъ теоремы, доказанной въ § 705.

1. Если всѣ элементы какого-либо ряда въ опредѣлителѣ суть нули, то и опредѣлитель равенъ нулю.

2. Если въ опредѣлителѣ всѣ элементы ряда равны 0 кромѣ одного λ_k, то опредѣлитель равенъ $\lambda_k L_k$, т. е. произведенію этого элемента на соотвѣтствующій ему миноръ.

3. Общій множитель всѣхъ элементовъ ряда есть также общій множитель всего опредѣлителя.

Напр.:

$$\begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & f \\ g & 5h & i \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

§ 709. **Теорема.** Опредѣлитель, въ которомъ каждый элементъ какого-либо ряда есть двучленная сумма, равенъ суммѣ двухъ опредѣлителей, отличающихся отъ перваго только этимъ рядомъ, имѣя въ немъ одинъ элементами одинъ рядъ слагаемыхъ въ упомянутыхъ двучленахъ, другой элементами другой рядъ этихъ слагаемыхъ.

Утв.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots & \nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots & \nu_2 \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_k + \alpha_k' & \beta_k + \beta_k' & \gamma_k + \gamma_k' & \dots & \nu_k + \nu_k' \\ . & & . & \dots & . \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \dots & \nu_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots & \nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots & \nu_2 \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k & \dots & \nu_k \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \dots & \nu_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots & \nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots & \nu_2 \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_k' & \beta_k' & \gamma_k' & \dots & \nu_k' \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \dots & \nu_n \end{vmatrix}.$$

Док. По теоремѣ о разложенiи опредѣлителя по элементамъ ряда [§ 705] данный опредѣлитель можетъ быть развернутъ въ слѣдующiй многочленъ:

$$D=(\alpha_k+\alpha'_k)A_k+(\beta_k+\beta'_k)B_k+(\gamma_k+\gamma'_k)C_k+\ldots+(\nu_k+\nu'_k)N_k.$$

А этотъ послѣднiй можетъ быть преобразованъ еще такимъ образомъ:

$$D=(\alpha_k A_k+\beta_k B_k+\gamma_k C_k+\ldots+\nu_k N_k)+(\alpha'_k A_k+\beta'_k B_k+\gamma'_k C_k+\ldots+\nu'_k N_k).$$

Послѣднее же выраженiе равно, на основанiи той же теоремы, суммѣ обоихъ опредѣлителей въ правой части утверждаемаго равенства, изъ чего и видна справедливость утвержденiя.

710. **Теорема.** Если къ элементамъ ряда прибавить умноженные на одного и того же множителя соотвѣтственные элементы параллельнаго ряда, то величина опредѣлителя отъ этого не измѣнится.

Док. Если мы въ данномъ опредѣлителѣ D прибавимъ къ элементамъ k-ой строки умноженные на m элементы h-ой строки, назовемъ E детерминантъ, получающiйся вслѣдствiе такого преобразованiя, и разложимъ послѣднiй по элементамъ его k-ой строки, то находимъ:

$$E=(\alpha_k+m\alpha_h)A_k+(\beta_k+m\beta_h)B_k+(\gamma_k+m\gamma_h)C_k+\ldots+(\nu_k+m\nu_h)N_k,$$

а отсюда посредствомъ очень простого преобразованiя:

$$E=\alpha_k A_k+\beta_k B_k+\gamma_k C_k+\ldots+\nu_k N_k+m(\alpha_h A_k+\beta_h B_k+\gamma_h C_k+\ldots+\nu_h N_k).$$

Но по теоремѣ, доказанной въ § 706, выраженiе, заключенное въ послѣднiя скобки, должно равняться 0.

Слѣдовательно, и дѣйствительно, какъ утверждалось,

$$E=D.$$

Такимъ же образомъ доказывается и для столбцовъ допустимость указаннаго теоремою преобразованiя опредѣлителя.

§ 711. **Замѣчанiя объ упрощенiяхъ при вычисленiи значенiя опредѣлителя.** Наиудобнѣйшiй способъ вычисленiя опредѣлителя состоитъ въ такомъ примѣненiи послѣдней теоремы, при которомъ всѣ элементы какого либо ряда, кромѣ одного, превращаются въ 0. Послѣднее достигается легко, если въ рядѣ встрѣчается элементъ 1. Если же такого элемента ни въ од-

номъ рядѣ не имѣется, то при помощи той же теоремы этого всегда можно достигнуть. Описаннымъ способомъ мы вычисленіе опредѣлителя n-аго порядка можемъ при помощи 2-аго предложенія въ § 708 привести къ вычисленію опредѣлителя (n—1-аго) порядка. Продолжая же этотъ пріемъ, мы постепенно дойдемъ до опредѣлителя 2-аго порядка, значеніе котораго вычисляется совершенно легко.

§ 712. **Примѣры.**

З а д а ч а 1.

Рѣшить систему уравненій.

$$\begin{cases} 8x-2y+5z \quad 9 \\ 20x+3y-3z-16 \\ 6x-5y+7z= \quad 1 \end{cases}$$

Рѣшеніе

По теоремѣ, доказанной въ § 707

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 16 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 20 & 3 & 3 \\ 6 & -5 & 7 \end{vmatrix}}$$

Опредѣлитель, составляющій дѣлимое этого выраженія, можетъ быть вычисленъ при помощи слѣдующихъ преобразованій.

Назвавъ его A и прибавивъ второй столбецъ его къ третьему, мы получаемъ:

$$A = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 3 \\ 16 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтемъ первый столбецъ, предварительно умноженный на 5, изъ второго и тотъ же столбецъ, умноженный на 2, прибавимъ къ третьему:

$$A = \begin{vmatrix} 9 & 47 & 21 \\ 16 & -77 & 32 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Отсюда же мы по 2-ому предложенію въ § 708 имѣемъ

$$A = (-1)^{3+1} . (-1) . \begin{vmatrix} -47 & 21 \\ 77 & 32 \end{vmatrix}$$

$$= (+1)(-1).(-1). \begin{vmatrix} 47 & 21 \\ 77 & 32 \end{vmatrix}$$ [3-е предложеніе въ § 708]

$$= 47 . 32 - 77 . 21 = -113.$$

Опредѣлитель же, составляющій дѣлителя выраженія для x, можетъ быть вычисленъ такимъ образомъ:

Назвавъ его R, прибавимъ второй столбецъ его къ первому и третьему (чтобы уменьшить числа въ послѣднемъ и добыть элементъ 1 въ первомъ столбцѣ)

$$R = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 23 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Прибавивъ здѣсь первый столбецъ, умноженный на 5, ко второму, и вычтя тотъ же столбецъ, умноженный на 2, изъ третьяго, мы находимъ:

$$R = \begin{vmatrix} 6 & 28 & 9 \\ 23 & 118 & 46 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а отсюда.

$$R = (-1)^{3+1} . 1 . \begin{vmatrix} 28 & 9 \\ 118 & 46 \end{vmatrix}$$

$$= 2 . (+1) . \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 59 & 46 \end{vmatrix}$$

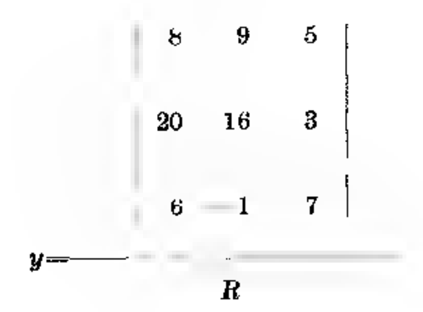
$$= 2(14 . 46 - 59 . 9)$$

$$= 2 . 113.$$

Слѣдовательно,

$$x=\frac{113}{-2\cdot 113}=-\frac{1}{2}.$$

Для второго же неизвѣстнаго мы имѣемъ:



$$y=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 20 & 16 & 3 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{R}$$

Назвавъ дѣлимое въ этомъ выраженіи B и вычтя въ этомъ опредѣлителѣ первый столбецъ изъ третьяго, мы получаемъ:

$$B=\begin{vmatrix} 8 & 9 & -3 \\ 20 & 16 & 23 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

Прибавивъ здѣсь второй столбецъ къ третьему, а затѣмъ умноживъ его еще на 6 и прибавивъ къ первому, мы находимъ:

$$B=\begin{vmatrix} 62 & 9 & 6 \\ 116 & 16 & -7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

откуда

$$B=(-1)^{3+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 62 & 6 \\ 116 & -7 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 31 & 6 \\ 58 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$=2\cdot[31\cdot(-7)-58\cdot 6]=-2\cdot 565=-10\cdot 113.$$

Слѣдовательно,

$$y=\frac{-10\cdot 113}{-2\cdot 113}=5.$$

Наконецъ, для третьяго неизвѣстнаго мы имѣемъ:

$$Z=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 20 & 3 & 16 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{R}$$

Если мы дѣлимое въ этомъ выраженіи назовемъ C и въ опредѣлителѣ, составляющемъ это дѣлимое, прибавимъ второй столбецъ къ первому, то получаемъ:

$$C=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 9 \\ 23 & 3 & 16 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Прибавивъ же теперь первый столбецъ къ третьему, умноживъ его кромѣ того еще на 5 и прибавивъ затѣмъ ко второму, мы находимъ:

$$C=\begin{vmatrix} 6 & 28 & 15 \\ 23 & 118 & 39 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а отсюда

$$C=(-1)^{3+1}\,1\,.\begin{vmatrix} 28 & 15 \\ 118 & 39 \end{vmatrix}$$

$$=2\,.\,3\,.\begin{vmatrix} 14 & 5 \\ 59 & 13 \end{vmatrix}=6\,.\,(14\,.\,13-59\,.\,5)=-6\,.\,113.$$

Слѣдовательно,

$$z=\frac{-6\,.\,113}{2\,.\,113}=3.$$

Примѣчаніе.

На практикѣ такого рода преобразованія опредѣлителей, какія мы здѣсь показали, упрощаются тѣмъ, что можно и не писать цѣликомъ всякаго

новаго опредѣлителя, равнаго прежнему, а достаточно вычеркивать измѣняемые прежніе элементы и замѣнять ихъ получаемыми новыми.

Задача 2.

Рѣшить систему уравненій

$$\left\{\begin{aligned} 7x+4y-9z+5u&=4 \\ -3x+5y+8z-15u&=20 \\ 9x-7y+12z+25u&=-4 \\ x+3y-11z+11u&=\frac{1}{5}. \end{aligned}\right.$$

Рѣшеніе.

Если мы детерминантъ, имѣющій элементами всѣ коэффиціенты неизвѣстныхъ, назовемъ R, и буквами A, B, C и D обозначимъ детерминанты, получающіеся изъ опредѣлителя R чрезъ соотвѣтствующую замѣну въ немъ коэффиціентовъ неизвѣстныхъ x, y, z и u данными въ правой части уравненій числами, то значенія неизвѣстныхъ будутъ:

$$x=\frac{A}{R}$$

$$y=\frac{B}{R}$$

$$z=\frac{C}{R}$$

$$u=\frac{D}{R}.$$

Вычисленіе опредѣлителя A произведемъ, прибавляя сначала первую строку къ третьей, умножая ее кромѣ того на 5 и вычитая затѣмъ изъ второй.

Такъ мы получаемъ;

$$A=\begin{vmatrix} 4 & 4 & -9 & 5 \\ 20 & 5 & 8 & -15 \\ -4 & -7 & 12 & 25 \\ \frac{1}{5} & 3 & -11 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -9 & 5 \\ 0 & -15 & 53 & -40 \\ 0 & -3 & 3 & 30 \\ \frac{1}{5} & 3 & -11 & 11 \end{vmatrix}$$

Вычтя въ послѣднемъ опредѣлителѣ умноженную на 20 четвертую строку изъ первой, мы получаемъ:

$$A=\begin{vmatrix} 0 & -56 & 211 & -215 \\ 0 & -15 & 53 & -40 \\ 0 & -3 & 3 & 30 \\ \frac{1}{5} & 3 & -11 & 11 \end{vmatrix},$$

а отсюда:

$$A=-\frac{1}{5}.\begin{vmatrix} -56 & 211 & -215 \\ -15 & 53 & -40 \\ -3 & 3 & 30 \end{vmatrix}=$$

$$\frac{1}{5}.3.5.\begin{vmatrix} 56 & 211 & -43 \\ 15 & 53 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Здѣсь вычтемъ изъ первой строки учетверенную вторую:

$$A=3.\begin{vmatrix} -4 & -1 & -11 \\ 15 & 53 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычтя еще утроенный первый столбецъ изъ второго и вынеся множителя —1 изъ третьяго столбца множителемъ передъ детерминантъ, мы находимъ:

$$A=-3.\begin{vmatrix} -4 & 11 & 11 \\ 15 & 8 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

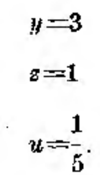
Такъ какъ въ послѣднемъ опредѣлителѣ второй и третій столбецъ совершенно одинаковы, то онъ ,по теоремѣ, доказанной въ § 704, долженъ равняться 0. Опредѣлитель же R по вычисленіи его оказывается не равнымъ 0.

Слѣдовательно,

$$x=0.$$

Какъ обыкновенно при рѣшеніи системы численныхъ уравненій, такъ и здѣсь, удобнѣе находить остальныя неизвѣстныя не путемъ вычисленія опредѣлителей, получаемыхъ по общему правилу (въ данномъ случаѣ опредѣлителей *B*, *C*, *D*), а подставивъ полученное уже значеніе неизвѣстнаго въ соотвѣтствующее число уравненій данной системы (въ данномъ случаѣ въ 3) и рѣшая затѣмъ такимъ же способомъ новую систему, а затѣмъ такимъ же образомъ систему, въ которой еще однимъ неизвѣстнымъ меньше, и т. д.

Опредѣливъ тѣмъ ли или другимъ способомъ значенія остальныхъ неизвѣстныхъ данной системы, мы находимъ:



$$y=3$$

$$z=1$$

$$u=\frac{1}{5}.$$



ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ И НЕДОСМОТРЫ.

Страница:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
24	18 сверху	примѣняя теорему 15 и опредѣленіе 17^{5}	примѣняя доказанную уже первую часть этой теоремы 20
28	20 снизу	§ 1	§ 3.
80	19 сверху	§ 84	§ 83.
84	6 снизу	Признаки	Признакъ
141	9 снизу	$1 : \left(\frac{1}{a}\right)^{\nu}$	$1 : \left(\frac{1}{a^{\mu}}\right)^{\nu}$
147	7 снизу	$\sqrt{a} = a$	$\sqrt[1]{a} = a$
156	8 снизу	въ предыдущемъ параграфѣ	въ § 142
212	14 сверху	относительныхъ	относительныхъ цѣлыхъ
374	4 сверху	мантиссы	мантиссою
450	12 снизу	притомъ всякою (такъ какъ въ рѣшеніи b исчезло)	отстоящею отъ AB на разстояніи b.
491	12 снизу	2 линейныхъ уравненій 1-ой степени	2 уравненія 1-ой степени
559	18 сверху	[§ 182]	[§ 132]
560	13 сверху	$x = \pm \frac{\;}{3}$	$x = \pm \frac{8}{3}$
600	4 сверху	котораго	которыхъ
615	12 сверху	$x = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm \frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$x = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm \frac{i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
617	5 снизу	$x_1 = -\frac{3}{2}J_2$	$x_2 = -\frac{3}{2}J_2$
639	10 сверху	122^{6}	122^{5}
715	16 сверху	$6 \cdot \frac{3-2x}{2}$	$6 \cdot \frac{3-2x}{23}$
774	13 сверху	предыдущаго параграфа.	§ 647.